В. И. Малыхин, Л. Б. Шапиро, О псевдокомпактных группах без сходящихся последовательностей,
Матем. заметки, 1985, том 37, выпуск 1, 103–109

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 37, № 1 (1985)

О ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ ГРУППАХ БЕЗ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. И. Малыхин, Л. Б. Шапиро

Статья посвящена изучению вопроса о существовании сходящихся последовательностей в предкомпактных и псевдокомпактных топологических группах. Каждая предкомпактная и тем более псевдокомпактная группа является подгруппой бикомпактной группы, которая, будучи диадическим бикомпактом, содержит «много» сходящихся последовательностей. Поэтому вполне оправданным был вопрос, поставленный А. В. Архангельским: существуют ли псевдокомпактные группы без сходящихся последовательностей? С. Сирота [1] положительно ответил на этот вопрос, построив псевдокомпактную группу с указанным свойством, вес которой равен τ, где τ — произвольное заранее заданное кардинальное число, удовлетворяющее условию $\tau^{\aleph_0} = \tau$. В связи с этим результатом он же поставил вопрос: существует ли псевдомкомпактная группа без сходящихся последовательностей, вес которой равен τ и $\tau^{\aleph_0} > \tau$? Мы покажем, что ответ на этот вопрос не зависит от системы ZFC аксиом теории множеств. В первой части статьи доказано, что в предположении обобщенной континуум-гипотезы *GCH* таких групп нет. Во второй части статьи строится в дополнительном предположении, совместном с любой кардинальной арифметикой псевдокомпактная группа веса $\aleph_1$ без сходящихся последовательностей. Результаты первой части статьи получены Л. Б. Шапиро, а результаты второй — В. И. Малыхиным.

I. Основным результатом здесь является следующая

ТЕОРЕМА 1 (GCH). *Во всякой предкомпактной группе веса* τ, *где* $\tau^{\aleph_0} > \tau$, *есть сходящаяся последовательность.*

Доказательство. В силу предкомпактности G ее пополнение $\tilde{G}$ является бикомпактной группой, причем $w\tilde{G} = wG$, так как $\tilde{G}$ — диадический бикомпакт. В предположении GCH из неравенства $\tau^{\aleph_0} > \tau$ следует, что $\mathrm{cf}\,(\tau) = \aleph_0$.

Следовательно, $\tau = \Sigma\ \{m_i\colon i \in \omega\}$, где $m_i < m_{i+1} < \tau$. В группе $\tilde{G}$ стандартным образом строим последовательность замкнутых нормальных делителей $\{N_i\colon i \in \omega\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $N_{i+1} \subset N_i$
2. $\bigcap \{N_i\colon i \in \omega\} = \{e\}$;
3. $\chi\,(N_i,\ \tilde{G}) \leqslant m_i$.

Теперь покажем, что $|\, G \cap N_i\, | > 1$ для любого $i \in \omega$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $h\colon \tilde{G} \to \tilde{G}/N_i$. Группа $\tilde{G}/N_i$ является диадическим бикомпактом, характер которого не превосходит m_i (в силу условия 3). Следовательно, $|\, \tilde{G}/N_i\, | \leqslant 2^{m_i} \leqslant m_{i+1}$.

Если $|\, G \cap N_i\, | = 1$, то сужение гомоморфизма h на группе $\tilde{G}$ будет взаимно однозначно. Отсюда вытекает, что $|\, G\, | \leqslant m_{i+1}$. Но тогда $w\tilde{G} \leqslant 2^{|G|} \leqslant 2^{m_{i+1}} < \tau$. Таким образом мы пришли к противоречию с нашим предположением о том, что $|\, G \cap N_i\, | = 1$. Следовательно, $|\, G \cap N_i\, | > 1$. Для любого $i \in \omega$ выбираем точку $x_i \in G \cap N_i$ такую, что $x_i \neq e$. Тогда $\{x_i\colon i \in \omega\}$ — искомая последовательность, сходящаяся к e. Теорема доказана.

Следующий несложный результат показывает, что отсутствие сходящихся последовательностей в предкомпактной абелевой топологической группе не накладывает никаких ограничений на алгебраическую структуру группы.

ТЕОРЕМА 2. *У любой абелевой алгебраической группы* G *мощности* τ *существует предкомпактная топология без сходящихся последовательностей, вес которой не превосходит* $\tau^{\aleph_0}$.

Доказательство. Для каждого счетного подмножества $A \subset G$ построим гомоморфизм φ_A группы G в единичную окружность $\mathbf{T}$ такой, что $\varphi_A\,(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность. Пусть $H\,(A)$ — подгруппа G, порожденная множеством A. Построим гомоморфизм h группы $H\,(A)$ в $\mathbf{T}$, удовлетворяющий условию, что $h\,(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность, тогда продолжение h на всю группу G будет искомым.

Рассмотрим два случая.

1. Группа $H(A)$ конечнопорожденная. Тогда, в силу одного результата В. Бельнова [2] существует гомоморфизм $h: H(A) \to \mathbf{T}$, такой что $h(A)$ всюду плотно в $\mathbf{T}$ и тем более $h(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность.

2. Группа $H(A)$ не является конечнопорожденной. В этом случае гомоморфизм h построим по индукции. Пусть мы определили h на группе $H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset A$. Определим h на группе $H(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$. При этом могут возникнуть следующие случаи:

а) $a_{n+1} \in H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда $H(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и, следовательно, h уже определен на группе $H(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$;

б) $a_{n+1} \notin H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, но $k \cdot a_{n+1} \in H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и k — наименьшее из натуральных чисел, обладающих этим свойством. Положим $h(a_{n+1}) = \exp\left(i \frac{m}{k} 2\pi\right)$, где $m = [k/2]$ — целая часть $k/2$. Ясно, что число $h(a_{n+1})$ лежит в левой полуплоскости;

в) $k \cdot a_{n+1} \notin H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ни при каком целом k. Тогда положим $h(a_{n+1}) = 1$.

Очевидно, что гомоморфизм $h: H(A) \to \mathbf{T}$ определен корректно и кроме того $h(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность. Пусть φ_A — продолжение h на всю группу G. Тогда $\varphi = \Pi \{\varphi_A: A \subset G, |A| \leqslant \aleph_0\}$ — вложение G в соответствующую степень группы $\mathbf{T}$. Ясно, что топология образа G при этом вложении является искомой.

II. Ниже доказывается совместность с системой ZFC аксиом теории множеств следующего утверждения.

Мощность континуума $\mathfrak{c}$ может быть любым возможным кардиналом и при этом существует псевдокомпактная группа веса $\aleph_1$ без сходящихся последовательностей.

Сразу уточним, что эта группа есть всюду плотная подгруппа D^{ω_1}. При построении этой группы будет использовано следующее утверждение.

ПП ($\aleph_1$). В D^{ω} существует семейство $\mathcal{T}$ мощности $\aleph_1$ подгрупп 2-го порядка, такое что для всякого счетного бесконечного подмножества $L \subset D^{\omega}$ найдется $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, для которого каждое из множеств $L \cap \mathbf{T}$, $L \setminus \mathbf{T}$ бесконечно [1].

[1]) Легко видеть, что таких подгрупп будет несчетное число.

Доказательство совместности ПП ($\aleph_1$) с системой ZFC аксиом теории множеств будет проведено ниже. Перейдем к построению искомой группы.

Для всякого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ обозначим $\Pi\,\{D_\beta\colon \beta \in \alpha\}$ через D^α. Ясно, что D^α изоморфно D^ω. Разобьем $\omega_1 \setminus \omega$ на $\aleph_1$ дизъюнктных несчетных подмножеств, таких, что $\omega_1 \setminus \omega = \bigcup\,\{A_\alpha\colon \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ и $A_\alpha \cap \alpha = \varnothing$ для каждого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$. Обозначим через $\mathcal{T}^\alpha$ семейство подгрупп в D^α, существование которого гарантирует предположение ПП ($\aleph_1$). Пусть $\psi^\alpha\colon \mathcal{T}^\alpha \to A_\alpha$ — взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{T}^\alpha$ и A_α.

Определим теперь искомую подгруппу $X \subset D^{\omega_1}$ следующим образом: точка $x \in D^{\omega_1}$ принадлежит X если и только если для каждого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ условие:

$$x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi_\alpha(x) \in \mathbf{T}, \\ 1, & \text{если } \pi_\alpha(x) \notin \mathbf{T}, \end{cases} \tag{1}$$

выполнено для всех $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^\alpha$, за исключением, возможно, счетного их числа.

Покажем, что X группа. Пусть $x, y \in X$ и условие (1) выполнено для α и $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^\alpha$. Возможны три случая.

1. $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$, $y(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$. Это значит, что $\pi_\alpha(x) \in \mathbf{T}$, $\pi_\alpha(y) \in \mathbf{T}$. Следовательно, $(x + y)(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$ и $\pi_\alpha(x + y) \in \mathbf{T}$, т. е. для точки $x + y$ выполнено условие (1), а это значит, что $x + y \in X$.

2. $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0, y(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$. Тогда $(x + y)(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$, но $\pi_\alpha(x) \in \mathbf{T}$, а $\pi_\alpha(y) \notin \mathbf{T}$, следовательно, $\pi_\alpha(x + y) \notin \mathbf{T}$, т. е. для точки $x + y$ условие (1) выполнено.

3. $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$, $y(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$. Следовательно, $\pi_\alpha(x) \notin \mathbf{T}$, $\pi_\alpha(y) \notin \mathbf{T}$. Но так как $\mathbf{T}$ — подгруппа 2-го порядка D^α, то $\pi_\alpha(x) + \pi_\alpha(y) \in \mathbf{T}$. Таким образом, получаем, что $(x + y)(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$ и $\pi_\alpha(x + y) = \pi_\alpha(x) + \pi_\alpha(y) \in \mathbf{T}$. Следовательно, условие (1) выполнено.

Покажем, что в X нет сходящихся последовательностей. Пусть L — счетное бесконечное подмножество X. Найдем $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$, для которого $\pi_\alpha \mid L$ — взаимно однозначно. Найдется такое $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^\alpha$, что: во-первых, $\pi_\alpha(L) \cap \mathbf{T}$ и $\pi_\alpha(L) \setminus \mathbf{T}$ бесконечны; во-вторых, условие (1) выполняется для всех $x \in L$ при найденном α и $\mathbf{T}$. Пусть L_1 и L_2 — подмножества L, такие, что $\pi_\alpha(L_1) = \pi_\alpha(L) \cap \mathbf{T}$ и $\pi_\alpha(L_2) = \pi_\alpha(L) \setminus \mathbf{T}$. Так как условие (1) выполнено для всех $x \in L$ при данных α и $\mathbf{T}$, то $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$ для всех $x \in L_1$ и $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$ для всех $x \in L_2$, значит, L не сходится ни к одной точке D^{ω_1}.

Докажем псевдокомпактность X. Для этого достаточно доказать, что для любого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ отображение π_α: $X \to D^\alpha$ есть отображение «на» (Б. А. Ефимов, см., например, [1]). Пусть z_1 — произвольная точка из D^α. Пусть $x \in D^{\omega_1}$, $x \mid \alpha = z_1$, а для каждого $\beta \in \omega_1 \setminus \alpha$ определим $x(\beta)$ так, чтобы условие (1) выполнялось. Ясно, что $x \in X$ и $\pi_\alpha(x) = z_1$.

Доказательство совместности ПП ($\aleph_1$) с произвольной кардинальной арифметикой проведем методом итерированного форсинга. Опишем сначала однократное расширение.

Опишем частично упорядоченное множество условий $\mathcal{P}$. Условие p есть гомоморфизм конечной подгруппы $\operatorname{dom} p \subset D^\omega$ в $\{0, 1\}$. Скажем, что $p \leqslant q$, если $\operatorname{dom} q \subseteq \operatorname{dom} p$ и $p \mid \operatorname{dom} q = q$.

Утверждение 1. *Множество $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию Суслина.*

Доказательство этого утверждения есть в [3]. Приведем его здесь для полноты изложения.

Если Q — несчетное подмножество $\mathcal{P}$, то в силу теоремы Эрдеша — Радо найдутся несчетное подмножество $Q_1 \subseteq Q$ и такая конечная подгруппа $\Delta \subset D^\omega$, что $\operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q = \Delta$ для любых различных $p, q \in Q_1$. Так как Δ — конечная группа, то можно выбрать несчетное подмножество $Q_2 \subseteq Q_1$ такое, что $p \mid \Delta = q \mid \Delta$ для любых $p, q \in Q_2$. Возьмем $p, q \in Q_2$. Определим $r \in \mathcal{P}$ такое, что $r \leqslant p$, $r \leqslant q$. Положим $\operatorname{dom} r = \operatorname{dom} p + \operatorname{dom} q$. Очевидно, что $\operatorname{dom} r$ — конечная подгруппа D^ω. Если $z \in \operatorname{dom} r$, то $z = x + y$, где $x \in \operatorname{dom} p$ и $y \in \operatorname{dom} q$. Положим $r(z) = p(x) + q(y)$. Ясно, что r — гомоморфизм $\operatorname{dom} r$ в $\{0, 1\}$. Так как $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$, то Q_2 не может состоять из несовместных условий.

Пусть G — генерическое подмножество $\mathcal{P}$ и $\mathfrak{M}[G]$ — соответствующее генерическое расширение. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{M}$ образует класс в $\mathfrak{M}[G]$. Значение этого для нас состоит в том, что мы можем употреблять $\mathfrak{M}$ во многих формулах.

Утверждение 2. *В $\mathfrak{M}[G]$ верно, что $D^\omega \cap \mathfrak{M}$ есть подгруппа D^ω.*

Это утверждение очевидно, так как если $x, y \in D^\omega \cap \mathfrak{M}$, то и $(x + y) \in D^\omega \cap \mathfrak{M}$. Обозначим эту подгруппу через T'.

Утверждение 3. *В $\mathfrak{M}[G]$ верно, что если l — счетное бесконечное подмножество D^ω и $l \in \mathfrak{M}$, то $l \cap T'$ и $l \setminus T'$ бесконечны.*

Действительно, нетрудно убедиться, что для любого $n \in \omega$ множество условий $\{p\colon |p^{-1}(0) \cap l| > n$ и множество условий $\{p\colon |p^{-1}(1) \cap l| > n\}$ плотны в $\mathcal{P}$.

Очевидно, в $\mathfrak{M}[G]$ на T' определен гомоморфизм h' на $\{0, 1\}$. Нам необходимо продолжить гомоморфизм h' на всю группу D^ω. Это можно сделать в силу того, что D^ω состоит из элементов второго порядка.

Итак, справедливо

Утверждение 4. *В $\mathfrak{M}[G]$ на D^ω существует подгруппа T второго порядка такая, что если l — бесконечное счетное подмножество D^ω и $l \in \mathfrak{M}$, то $l \cap T$ и $l \setminus T$ бесконечны.*

Пусть теперь $\mathfrak{M}_0$ — модель с произвольной кардинальной арифметикой, в частности, в $\mathfrak{M}_0$ мощность континуума $\mathfrak{c}$ есть какой-нибудь произвольный не счетноконфинальный кардинал. Будем предполагать, что $\mathfrak{M}_0$ достаточно простая модель (см. замечание выше).

По трансфинитной индукции по всем ординалам $\alpha \leqslant \omega_1$ определим возрастающее семейство моделей $\mathfrak{M}_\alpha$. Если α — непредельный ординал, то $\mathfrak{M}_\alpha$ определяется как генерическое расширение $\mathfrak{M}[G_{\alpha-1}]$ модели $\mathfrak{M}_{\alpha-1}$ с помощью частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$, определение которого дано выше. Если α — предельный ординал, то $\mathfrak{M}_\alpha$ определяется как естественное замыкание до модели суммы $\bigcup \{\mathfrak{M}_\beta\colon \beta < \alpha\}$. Модель $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ — искомая. Покажем это.

Действительно, в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ есть семейство подгрупп $\{T_\alpha\colon \alpha \in \omega_1\}$ второго порядка в D^ω. Каждая такая подгруппа T_α появилась уже в модели $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$. Далее, если в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ верно, что L — счетное бесконечное подмножество D^ω, то в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ верно, что $L \in \mathfrak{M}_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \omega_1$. Но тогда $L \cap T_\alpha$, $L \setminus T_\alpha$ бесконечны.

Конечно, вместо возрастающего семейства моделей $\{\mathfrak{M}_\alpha\colon \alpha \leqslant \omega_1\}$ можно говорить о возрастающем семействе частично упорядоченных множеств $\mathcal{P}_\alpha$ в $\mathfrak{M}$, затем построить из этого семейства некоторое заключительное частично упорядоченное множество $\mathcal{P}_{\omega_1}$ и с его помощью генерически расширить $\mathfrak{M}$. Так как $c(\mathcal{P}_\alpha) \leqslant \aleph_0$ для всякого $\alpha \leqslant \omega_1$ (см. [4, с. 106]), и $|\mathcal{P}_\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$ для всякого $\alpha \leqslant \omega_1$, то можно доказать по индукции, что расширение $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_{\omega_1}$ сохраняет кардиналы и степенную функцию, значит, $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ остался на прежнем месте.

Несколько подробнее аналогичное построение модели с помощью итерированного форсинга см. в [3].

Отметим в заключение, что Ван Дауэн [5] в предположении аксиомы Мартина построил счетнокомпактную группу без сходящихся последовательностей.

Московский институт управления

Поступило 30.03.83

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Сирота С. Произведение топологических групп и экстремальная несвязность.— Мат. сб., 1969, т. 79, № 2, с. 179—192
[2] Бельнов В. К. Об одном свойстве тора.— Докл. АССР, 1973, т. 213, № 4, с. 764—765.
[3] Van Douwen E. K., Fleissner W. G. The definable forcing axiom: an alternative to Martins axiom.— Preprint.
[4] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.
[5] Van Douwen E. K. The products of two countably compact topological groups — Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 262, № 2, p. 417—427.