А. М. Васильев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА КАК АППАРАТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В настоящей работе определяется класс алгебраических систем—внешних дифференциальных алгебр с линейной системой образующих. Изучаются способы их образования. Намечается схема, следуя которой дифференциально-геометрические исследования укладываются в рамки теории внешних дифференциальных алгебр с линейной системой образующих.

I. Внешней алгеброй [1] называется ассоциативная алгебра над полем k, которая, как линейное пространство над k, разложена в прямую сумму подпространств $A^{(i)}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, причем умножение (обозначается через $\wedge$) подчинено законам: если $a \in A^{(p)}$, $b \in A^{(q)}$, то $a \wedge b \in A^{(p+q)}$ и $b \wedge a = (-1)^{pq} a \wedge b$. В частности, $A^{(0)}$ есть коммутативная подалгебра алгебры A.

Будем предполагать поле k имеющим нулевую характеристику. Для дальнейшего естественно понимать под k поле вещественных или комплексных чисел.

Будем рассматривать далее лишь такие подалгебры внешней алгебры, которые разлагаются в прямую сумму своих пересечений с $A^{(i)}$. Системой образующих элементов алгебры, как всегда, будем называть такое множество ее элементов, что всякий элемент алгебры есть конечная линейная комбинация (с коэффициентами из k) произведений конечного числа образующих элементов. Определяющими соотношениями называется совокупность всех независимых соотношений, существующих между образующими элементами.

Внешней алгеброй с линейной системой образующих будем называть внешнюю алгебру, обладающую системой образующих элементов нулевой и первой степени (т. е. принадлежащих $A^{(0)}$ и $A^{(1)}$, причем образующие первой степени независимы, т. е. не входят ни в какие определяющие соотношения, не вытекающие из упомянутых выше основных: $b\wedge a = (-1)^{pq} a\wedge b$ ($a \in A^{(p)}$, $b \in A^{(q)}$).

Базисом идеала в алгебре A называется множество его элементов такое, что каждый элемент идеала есть конечная линейная комбинация (с коэффициентами из A!) элементов базиса. Если алгебра A задана образующими элементами и определяющими соотношениями, а элементы h_α составляют базис идеала I, то факторалгебру A/I можно определить, добавив к определяющим соотношениям алгебры A соотношения $h_\alpha = 0$. Очевидно, факторалгебра внешней алгебры с линейной системой образующих по идеалу с базисом, принадлежащим $A^{(0)}$, также является внешней алгеброй с линейной системой образующих. Факторалгебра алгебры с линейной системой образующих по идеалу с базисом, принадлежащим $A^{(0)}$ и $A^{(1)}$, будет алгеброй с линейной системой образующих, если базисные элементы первой степени можно выбрать таким образом, чтобы они составляли часть независимых образующих элементов первой степени всей алгебры A.

Мы будем в дальнейшем пользоваться также следующим свойством алгебры с линейной системой образующих. Пусть ω^λ — каким-либо образом вполне упорядоченное множество независимых образующих элементов первой степени. Тогда каждый элемент степени p, т. е. принадлежащий $A^{(p)}$, единственным образом представляется в виде линейной комбинации (с коэффициентами из $A^{(0)}$) конечного числа элементов вида $\omega^{\lambda_1}\wedge\omega^{\lambda_2}\wedge\ldots\wedge\omega^{\lambda_p}$, где $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \ldots \prec \lambda_p$.

2. Внешняя алгебра называется дифференциальной [1], если в ней задан линейный оператор d, обладающий свойствами (1)* $dd = 0$, (2*): для всякого $a \in A^{(p)}$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$), $da \in A^{(p+1)}$, $d(a\wedge b) = da\wedge b + (-1)^p a\wedge db$. Для алгебр с единицей e следует добавить условие (3)*: $de = 0$.

Рассмотрим примеры внешних дифференциальных алгебр с линейной системой образующих.

Совокупность односторонне инвариантных внешних дифференциальных форм на n-мерной группе Ли G или, что то же самое, совокупность кососимметрических ковариантных тензоров на соответствующей алгебре Ли $\hat{G}$ представляет собой дифференциальную алгебру A_G с n независимыми образующими элементами ω^i первой степени. Дифференциал задается структурными уравнениями Картана:

$$d\omega^i = \frac{1}{2} c^i_{kl}\omega^k\wedge\omega^l \quad (c^i_{kl} = \mathrm{const}). \tag{1}$$

Пусть e_i — базис алгебры Ли $\hat{G}$, соответствующий базису форм ω^i. Представление алгебры $\hat{G}$ дифференцированиями кольца многочленов $P(x^a)$ задается по формулам

$$e_i(x^a) = \xi_i^a(x^b), \quad \xi_i^a \in P(x^b),$$

$$\frac{\partial \xi_i^a}{\partial x^b}\xi_k^b - \frac{\partial \xi_k^a}{\partial x^b}\xi_i^b = c_{ik}^l \xi_l^a.$$

Задание представления равносильно заданию внешней дифференциальной алгебры с образующими элементами нулевой степени x^a и первой степени ω^i, дифференциал в которой задается уравнениями (1) и

$$dx^a = \xi_i^a(x^b)\,\omega^i. \tag{2}$$

Д. Ритт [2, 3] называет кольцо R дифференциальным, если в нем задано некоторое число n линейных операторов ∂_i, обладающих свойствами: $\partial_i\partial_k = \partial_k\partial_i$, $\partial_i(a\cdot b) = \partial_i a\cdot b + a\cdot\partial_i b$. Если R является коммутативной алгеброй над полем k, то задание операторов ∂_i равносильно заданию внешней дифференциальной алгебры, у которой $A^{(0)} = R$ и имеется, кроме того, n независимых образующих элементов первой степени ω^i, причем дифференциал определяется условиями

$$d\omega^i = 0, \quad da = \partial_i a\cdot\omega^i \ (a \in R = A^{(0)}).$$

Таким образом, теорию дифференциальных алгебр в смысле Д. Ритта естественно рассматривать как часть теории внешних дифференциальных алгебр с линейной системой образующих.

Из двух первых примеров усматривается, что внешние дифференциальные алгебры с конечной линейной системой образующих тесно связаны с основными понятиями геометрии и смежных разделов математики. Еще больший круг вопросов оказывается связанным со специальными классами внешних дифференциальных алгебр с бесконечной линейной системой образующих, к рассмотрению которых мы перейдем дальше.

3. Имеет смысл ввести следующее обобщение понятия внешней дифференциальной алгебры.

Внешней алгеброй с дифференциалом будем называть внешнюю алгебру A, в которой выделена подалгебра C и на C определен линейный оператор d, отображающий ее в A и обладающий свойствами: если $da \in C$, то $d(da) = 0$. Если $a \in C \cap A^{(p)}$, $b \in C$, то $da \in A^{(p+1)}$, $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^p a \wedge db$. Если единица e алгебры A принадлежит C, то $de = 0$.

Подалгебру H внешней алгебры с дифференциалом будем называть дифференциальной, если для всякого элемента $a \in C \cap H$, $da \in H$. Аналогично определяется дифференциальный идеал алгебры с дифференциалом. В качестве частного случая ($C = A$) получаем определения дифференциальной подалгебры и дифференциального идеала дифференциальной алгебры. Легко проверить, что в факторалгебре алгебры с дифференциалом по дифференциальному идеалу I естественно индуцируется дифференциал, превращающий A/I в алгебру с дифференциалом. Его областью определения является образ подалгебры C при гомоморфизме $A \to A/I$.

Пусть A и B — алгебры с дифференциалами, определенными, соответственно, на подалгебрах C и E. Гомоморфизм $\varphi : A \to B$ называется дифференциальным, если $\varphi(C) \subset E$ и для всякого $a \in C$, $\varphi(da) = d(\varphi(a))$. Мы будем рассматривать лишь гомоморфизмы, сохраняющие степени, т. е. для которых $\varphi(A^{(p)}) \subset B^{(p)}$.

Расширением алгебры A называется всякая алгебра B, содержащая A в качестве подалгебры. Дифференциальным расширением или дифференциальным продолжением алгебры A с дифференциалом, определенным на подалгебре C, назовем ее расширение B, которое обладает дифференциалом, совпадающим на подалгебре C с дифференциалом алгебры A.

Нормальным продолжением алгебры A с дифференциалом назовем ее дифференциальное продолжение A', обладающее следующими свойствами: (1)*. Областью определения дифференциала на A' является подалгебра A. (2)*. A' не содержит собственной подалгебры B' такой, что $da \in B'$ для любого $a \in A$. (3)*. Для всякого дифференциального продолжения $\tilde{A}$ алгебры A, обладающего свойствами (1)* и (2)*, существует дифференциальный гомоморфизм $p : A' \to \tilde{A}$ такой, что диаграмма дифференциальных гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dd, "p'"] \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\tilde{i}"'] & \\ & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Здесь i, $\tilde{i}$ — гомоморфизмы вложения.

4. Нижеследующие алгебраические построения служат для определения класса допускающих нормальное продолжение алгебр с дифференциалом и с линейной системой образующих.

Лемма. Пусть во внешней алгебре A с линейной системой образующих имеется конечное число элементов Θ^{α} второй степени и ϑ^{u}, ω^{l} — первой степени, причем

1) ω^{l} независимы и могут быть приняты за часть образующих элементов всей алгебры,

2) удовлетворяются уравнения

$$a^{\xi}_{\alpha i}\Theta^{\alpha}\wedge\omega^{i}+a^{\xi}_{uki}\theta^{u}\wedge\omega^{k}\wedge\omega^{i}=0,\qquad b^{\lambda}_{uk}\theta^{u}\wedge\omega^{k}=0, \tag{3}$$

где $a^{\xi}_{\alpha i}$, $a^{\xi}_{uki}(=-a^{\xi}_{uik})$, b^{λ}_{uk} — константы (элементы поля k) и все Θ^{α}, θ^{u} входят в (3) существенно, т. е. система уравнений

$$a^{\xi}_{\alpha l}X^{\alpha}=0 \tag{4}$$

равносильна $X^{\alpha}=0$, а система

$$a^{\xi}_{\alpha l}Z^{\alpha}_{k}-a^{\xi}_{\alpha k}Z^{\alpha}_{l}+a^{\xi}_{ukl}V^{u}=0,\qquad b^{\lambda}_{uk}V^{u}=0 \tag{5}$$

с неизвестными Z^{α}_{k}, V^{u} имеет следствием $V^{u}=0$.

При этих условиях соотношения (3) равносильны существованию в алгебре A элементов Ω^{φ} первой и z^{a} нулевой степени таких, что

$$\Theta^{\alpha}=H^{\alpha}_{\varphi l}\Omega^{\varphi}\wedge\omega^{l}+H^{\alpha}_{akl}z^{a}\omega^{k}\wedge\omega^{l},\qquad \theta^{u}=K^{u}_{al}z^{a}\omega^{l}. \tag{6}$$

Здесь $H^{\alpha}_{\varphi l}$, $H^{\alpha}_{akl}\left(=-H^{\alpha}_{alk}\right)$, K^{u}_{al} — константы, выбранные таким образом, что $Z^{\alpha}_{l}=H^{\alpha}_{\varphi l}$ ($\varphi=1,\dots s$) — фундаментальная система решений системы

$$a^{\xi}_{\alpha l}Z^{\alpha}_{k}-a^{\xi}_{\alpha k}Z^{\alpha}_{l}=0, \tag{7}$$

а $K^{u}_{l}=K^{u}_{al}$, $H^{\alpha}_{kl}=H^{\alpha}_{akl}$ $(a=1,\dots,\sigma)$ — фундаментальная система решений для системы уравнений, полученных объединением уравнений

$$a^{\xi}_{\alpha(i}H^{\alpha}_{kl)}+a^{\xi}_{u(ki}K^{u}_{l)}=0,\qquad b^{\lambda}_{uk}K^{u}_{l}-b^{\lambda}_{ul}K^{u}_{k}=0 \tag{8}$$

и линейных уравнений, определяющих в линейном пространстве над полем k, с координатами $H^{\alpha}_{kl}\left(=-H^{\alpha}_{lk}\right)$, некоторое подпространство P, дополнительное к подпространству, заполненному векторами с координатами

$$H^{\alpha}_{kl}=H^{\alpha}_{\varphi k}L^{\varphi}_{l}-H^{\alpha}_{\varphi l}L^{\varphi}_{k},$$

где L^{φ}_{l} пробегают всевозможные значения.

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что из (6), с учетом указанных выше условий на $H^{\alpha}_{\varphi l}$, H^{α}_{akl}, K^{u}_{al}, следует (3).

Для доказательства обратного предложения выразим элементы Θ^{α} и θ^{u} через независимые образующие элементы первой степени алгебры A, среди которых, в силу сделанных предположений, можем считать содержащимися элементы ω^{l}. Обозначив остальные входящие в Θ^{α}, θ^{u} элементы через ω^{A}, будем иметь

$$\begin{aligned}&\Theta^{\alpha}=H^{\alpha}_{AB}\omega^{A}\wedge\omega^{B}+H^{\alpha}_{Al}\omega^{A}\wedge\omega^{l}+H^{\alpha}_{kl}\omega^{k}\wedge\omega^{l},\\&\theta^{u}=K^{u}_{A}\omega^{A}+K^{u}_{l}\,\omega^{l}\quad\left(H^{\alpha}_{AB}=-H^{\alpha}_{BA},\ H^{\alpha}_{kl}=-H^{\alpha}_{lk}\right).\end{aligned}\tag{9}$$

Подставляя это в (3) и приравнивая нулю коэффициенты при $\omega^{A}\wedge\omega^{B}\wedge\omega^{l}$ $(A<B)$, получим

$$H^{\alpha}_{AB}a^{\xi}_{\alpha l}=0,$$

т. е., в силу (4), $H^{\alpha}_{AB}=0$. Далее, приравнивая нулю коэффициенты при $\omega^{A}\wedge\omega^{l}$ в уравнениях 2-й степени и при $\omega^{A}\wedge\omega^{k}\wedge\omega^{l}$ в уравнениях 3-й степени, получим

$$\begin{aligned}&a^{\xi}_{\alpha l}H^{\alpha}_{Ak}-a^{\xi}_{\alpha k}H^{\alpha}_{Al}+a^{\xi}_{ukl}K^{u}_{A}=0,\\&b^{\lambda}_{uk}K^{u}_{A}=0,\end{aligned}\tag{10}$$

т. е. (см. (5)) $K^{u}_{A}=0$. Из оставшихся уравнений (10) видим, что элементы $\omega^{\alpha}_{l}=H^{\alpha}_{Al}\omega^{A}$ удовлетворяют системе (7), т. е. найдутся элементы Ω^{φ} такие, что $\omega^{\alpha}_{l}=H^{\alpha}_{\varphi l}\Omega^{\varphi}$. Уравнения (9) примут вид

$$\begin{aligned}&\Theta^{\alpha}=H^{\alpha}_{\varphi l}\Omega^{\varphi}\wedge\omega^{l}+H^{\alpha}_{kl}\omega^{k}\wedge\omega^{l},\\&\theta^{u}=K^{u}_{l}\,\omega^{l}.\end{aligned}\tag{11}$$

Не меняя Θ^{α}, к Ω^{φ} можно добавлять слагаемые $L^{\varphi}_{k}\omega^{k}$, где L^{φ}_{k} — произвольные элементы из $A^{(0)}$, вычитая одновременно из H^{α}_{kl} величины $H^{\alpha}_{\varphi l}L^{\varphi}_{k}-H^{\alpha}_{\varphi k}L^{\varphi}_{l}$. За счет этого можно добиться, чтобы H^{α}_{kl} удовлетворяли указанным выше уравнениям подпространства P. После этого, подставляя (11) в (3), увидим, что H^{α}_{ki}, K^{u}_{i} должны удовлетворять и уравнениям (8) и, значит, могут быть представлены в виде

$$H^{\alpha}_{ki} = H^{\alpha}_{aki} z^{a}, \quad K^{u}_{i} = K^{u}_{ai} z^{a},$$

что и требовалось доказать.

Отметим наиболее употребительные частные случаи доказанной леммы.

Следствие 1 (лемма Картана), см. [4]. Пусть в алгебре с линейной системой образующих имеются элементы θ_l, ω^l первой степени, причем ω^l удовлетворяют условиям, сформулированным в лемме. Тогда равенство

$$\theta_l \wedge \omega^l = 0$$

равносильно существованию в алгебре элементов $z_{lk} = z_{kl}$ таких, что

$$\theta_l = z_{lk} \omega^k.$$

Следствие 2 (обобщенная лемма Картана, ср. [5]). Пусть в алгебре с линейной системой образующих имеются элементы Θ_l второй степени и элементы ω^l — первой, причем ω^l удовлетворяют условиям леммы. Тогда равенство

$$\Theta_l \wedge \omega^l = 0$$

равносильно существованию в алгебре элементов первой степени $\omega_{lk} = \omega_{kl}$ таких, что

$$\Theta_l = \omega_{lk} \wedge \omega^k.$$

5. Переходим к вопросу о нормальных продолжениях алгебр с дифференциалом. Пусть алгебра A с дифференциалом обладает конечной независимой системой образующих элементов x^{λ}, y^{u} — нулевой степени и ω^l, $\omega^{\hat{\xi}}$, ω^{α} — первой степени. Пусть при этом x^{λ}, ω^l, $\omega^{\hat{\xi}}$ — система образующих элементов подалгебры C. Введем для индексов элементов ω^l, $\omega^{\hat{\xi}}$ обобщающий индекс ξ (соотв. η, ζ) и предположим, что дифференциал в алгебре A задается уравнениями

$$\begin{aligned} d\omega^{\xi} &= p^{\xi}_{\eta\zeta} \omega^{\eta} \wedge \omega^{\zeta} + a^{\xi}_{\alpha l} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{l} + a^{\xi}_{ukl} y^{u} \omega^{k} \wedge \omega^{l}, \\ dx^{\lambda} &= b^{\lambda}_{\xi} \omega^{\xi} + b^{\lambda}_{ul} y^{u} \omega^{l}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $p^{\xi}_{\eta\zeta}$, b^{λ}_{ξ} — элементы из C, а $a^{\xi}_{\alpha l}$, a^{ξ}_{ukl}, b^{λ}_{ul} — константы. Мы предположим также, что все элементы ω^{α}, y^{u} входят в (12) существенно, т. е. $a^{\xi}_{\alpha l}$, a^{ξ}_{ukl}, b^{λ}_{uk} удовлетворяют тем же условиям, что и так же обозначенные константы в уравнениях (3) леммы п. 4. Для того чтобы выяснить возможность распространения дифференциала на элементы ω^α, y^u, применим операцию «d» к обеим частям равенств (12), требуя, чтобы она была определена на A, удовлетворяла обычным условиям и на C определялась уравнениями (12). Предположим, что после элементарных преобразований мы сможем прийти к уравнениям (3), где $a^\xi_{\alpha i}$, a^ξ_{uki}, b^λ_{ui} — те же, что в (12), а

$$\Theta^\alpha = d\omega^\alpha - \widetilde{\Theta}^\alpha, \quad \theta^u = dy^u - \widetilde{\theta}^u, \tag{13}$$

где $\widetilde{\Theta}^\alpha$, $\widetilde{\theta}^u$ — некоторые элементы алгебры A. Расширим теперь алгебру A до алгебры A', присоединив к ней новые независимые образующие элементы Ω^φ ($\varphi = 1, \ldots, s$) первой степени и z^a ($a = 1, \ldots, \sigma$) — нулевой степени, и определим на подалгебре A алгебры A' дифференциал с помощью уравнений (12) и уравнений, полученных исключением Θ^α, θ^u из (13) и (6). Требуем при этом, чтобы коэффициенты уравнений (6) удовлетворяли условиям, сформулированным в лемме п. 4. Алгебра с дифференциалом, полученная таким образом, является нормальным продолжением алгебры A.

Для доказательства заметим прежде всего, что на указанном пути мы приходим к единственной алгебре с дифференциалом A'. Действительно, иной выбор фундаментальных решений $H^\alpha_{\varphi i}$, H^α_{akl}, K^u_{al}, систем, фигурирующих в лемме п. 4, а также иной выбор подпространства P приводят лишь к допустимой замене образующих элементов в алгебре A'. Далее, во всякой алгебре $\widetilde{A}$, удовлетворяющей условиям (1)*, (2)* нормального продолжения, дифференцирование уравнений (12) приводит к уравнениям (3), (13). Следовательно, в $\widetilde{A}$ найдутся элементы $\widetilde{\Omega}^\varphi$, $\widetilde{z}^a$ такие, что $d\omega^\alpha$, dy^u будут определяться теми же формулами, что и в A', с заменой z^a, Ω^φ на $\widetilde{z}^a$, $\widetilde{\Omega}^\varphi$. Подалгебра алгебры $\widetilde{A}$, полученная расширением A при помощи элементов $\widetilde{z}^a$, Ω^φ, сама будет удовлетворять требованиям (1*), (2)* нормального продолжения и, следовательно, совпадать с $\widetilde{A}$. Но тогда отображение A' на $\widetilde{A}$, переводящее A в себя и Ω^φ, z^a в $\widetilde{\Omega}^\varphi$, $\widetilde{z}^a$, будет дифференциальным гомоморфизмом p, указанным в условии (3) нормального продолжения, что и доказывает нормальность продолжения A'.

Заметим теперь, что уравнения, определяющие дифференциал в алгебре A', имеют точно такое же строение, что и уравнения (12) (роль элементов ω^ξ начинают играть элементы ω^ξ, ω^α; роль элементов x^λ — элементы x^λ, y^u; роль элементов ω^α — элементы Ω^φ, а роль элементов y^u — элементы z^a. Элементы ω^i играют прежнюю роль). Значит, можно пытаться по тем же правилам построить нормальное продолжение алгебры A', затем — нормальное продолжение построенной алгебры, и т. д. Может оказаться, что процесс нормального продолжения повторяется неограниченно. Тогда в конечном счете мы приходим к некоторой дифференциальной алгебре B, обладающей, вообще говоря, бесконечной линейной системой образующих. Мы будем говорить в этом случае, что алгебра B получена процессом нормального продолжения алгебры A по базису ω^i.

Для выяснения возможности неограниченного нормального продолжения часто оказывается полезным предложение, принадлежащее Г. Ф. Лаптеву [5]. В терминах теории дифференциальных алгебр оно может быть сформулировано следующим образом.

Теорема. Пусть в дифференциальной алгебре с линейной системой образующих содержатся элементы θ, θ_i, степени p, Φ, Φ_i — степени $p+1$ и ω^i_k, ω^i — первой степени ($i=1, \ldots n$), причем ω^i независимы и могут быть приняты за часть образующих элементов первой степени, и пусть

$$d\theta + \Phi = \theta_k \wedge \omega^k,$$

$$d\Phi = \Phi_k \wedge \omega^k, \quad d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k,$$

тогда в алгебре найдутся элементы Φ_{ik} степени $p+1$ и θ_{ik} — степени p, такие, что

$$d\theta_i = \theta_k \wedge \omega^k_i + \theta_{ik} \wedge \omega^k + \Phi_i,$$

$$d(\theta_k \wedge \omega^k_i + \Phi_i) = \Phi_{ik} \wedge \omega^k.$$

6. Рассмотрим теперь некоторые специальные случаи образования алгебр процессом нормального продолжения.

Лемма. Пусть во внешней алгебре с линейной системой образующих существуют независимые элементы первой степени ω^ξ, ω^i такие, что ω^i могут быть приняты за часть линейной системы образующих и имеет место система равенств

$$a^\lambda_{\xi i_1 \ldots i_{p_\lambda}} \omega^\xi \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{p_\lambda}} = 0, \qquad (14)$$

где $\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_{p_\lambda}}$ пробегают множество элементов ω^i, $a^\lambda_{\xi i_1 \ldots i_{p_\lambda}}$ — постоянные, антисимметричные по $i_1, \ldots, i_{p_\lambda}$ и все ω^ξ входят в (14) существенно, т. е. из уравнений

$$a^\lambda_{\xi i_1 \ldots i_{p_\lambda}} X^\xi = 0$$

следует $X^\xi = 0$. Тогда уравнения (14) равносильны существованию в алгебре элементов y^u таких, что

$$\omega^{\xi} = b^{\xi}_{ui} y^{u} \omega^{i}. \tag{15}$$

Здесь b^{ξ}_{ui} $(u = 1, \ldots, \sigma)$ — постоянные, образующие фундаментальную систему решений системы

$$a^{\lambda}_{\xi\,[i_1 \ldots i_{p_\lambda}} Y^{\xi}_{i]} = 0 \tag{16}$$

с неизвестными Y^{ξ}_{i}.

Лемма доказывается вполне аналогично лемме п. 4; ω^{ξ} выражаются через образующие элементы алгебры, подстановка этих выражений в (14) приводит к равенствам (15), (16).

Пусть теперь в дифференциальной алгебре A с линейной системой образующих задан дифференциальный идеал I с конечным базисом из элементов θ^{λ} вида

$$\theta^{\lambda} = a^{\lambda}_{\xi i_1 \ldots i_{p_\lambda}} \omega^{\xi} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{p_\lambda}},$$

где ω^{ξ}, ω^{i}, $a^{\lambda}_{\xi i_1 \ldots i_{p_\lambda}}$ удовлетворяют тем же условиям, что и в лемме.

Решением дифференциального идеала I, принадлежащим базису ω^{i}, будем называть внешнюю дифференциальную алгебру S с линейной системой образующих, обладающую следующими свойствами: (1)*. Определен дифференциальный гомоморфизм алгебры A в алгебру S, отображающий элементы ω^{i} в независимые элементы, которые могут быть приняты за часть независимых образующих первой степени алгебры S, а идеал I отображающий в нуль (2)* S не содержит собственной подалгебры, обладающей свойством (1)*.

Общим решением идеала I, принадлежащим базису ω^{i}, будем называть такое решение $\widetilde{S}$, что для каждого другого решения S с тем же базисом существует дифференциальный гомоморфизм p: $\widetilde{S}$ на S, причем диаграмма гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{S} \arrow[dd, "p"] \\
A \arrow[ur, "\widetilde{\sigma}"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \\
 & S
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Здесь $\widetilde{\sigma}$, σ — гомоморфизмы, задающие $\widetilde{S}$, S как решения идеала I.

Предположим, что все элементы ω^{i}, ω^{ξ}, входящие в θ^{λ}, независимы и могут быть выбраны за часть линейной системы образующих алгебры A. Для выяснения вопроса о существовании общего решения идеала I определим алгебру с дифференциалом B_I по следующим правилам. Выберем в алгебре A образующие элементы так, чтобы в их число входили ω^ξ, ω^i. В алгебре B_I за образующие элементы возьмем все образующие элементы алгебры A, кроме ω^ξ, и прибавим к ним еще σ независимых образующих нулевой степени y^u. Дифференциал определим на подалгебре C, порожденной всеми образующими элементами, кроме y^u, подставив в соответствующие формулы дифференцирования в алгебре A вместо ω^ξ их выражения (15). Будем теперь пытаться построить дифференциальное продолжение алгебры B_I, по следующим правилам. Продифференцируем (15) по правилам дифференцирования в алгебре A, с последующим исключением ω^ξ по тем же формулам (15). Предположим, что после элементарных преобразований мы придем к уравнениям вида

$$b^\xi_{ui}(dy^u - \theta^u)\wedge\omega^i = 0,$$

где θ^u — элементы алгебры B_I. Применение леммы п. 4 приводит к уравнениям

$$dy^u = \theta^u + K^u_{ai} z^a \omega^i. \qquad (17)$$

Определим искомое дифференциальное продолжение алгебры B_I, присоединив к ней новые независимые элементы z^a и задавая дифференциал y^u по формулам (17).

Предположим теперь, что полученная алгебра с дифференциалом допускает неограниченную последовательность нормальных продолжений по базису ω^i по правилам, указанным в п. 5. Дифференциальная алгебра, возникающая на этом пути, является общим решением идеала I алгебры A.

Действительно, для всякого решения, в силу определяющих его условий, должны выполняться, при некоторых $\tilde{y}^u$, $\tilde{z}^a$ и т. д. уравнения (14), (15), (17) и далее все уравнения, которые возникают при нормальном продолжении. Тем самым определяется нужный гомоморфизм, переводящий y^u в $\tilde{y}^u$, z^a в $\tilde{z}^a$ и т. д., и оставляющий на месте элементы, возникшие из элементов алгебры A, не содержащих ω^ξ.

Отметим следующий класс идеалов, допускающих общее решение. Пусть ω^ξ, ω^i ($i = 1, \ldots, n$; $\xi = n+1, \ldots, n+m$), элементы первой степени дифференциальной алгебры с линейной системой образующих, которые можно взять за часть независимых образующих и которые составляют базис дифференциального идеала I_0. Тогда элементы

$$\omega^\xi \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$$

$(\zeta = n+1, \ldots, n+m)$ также образуют базис дифференциального идеала I. Отправляясь от уравнений

$$\omega^{\xi} = \lambda^{\xi}_{i}\,\omega^{i} \tag{18}$$

и применяя последовательно теорему Г. Ф. Лаптева (см. п. 5) для случая $p=0$, убеждаемся, что идеал I имеет общее решение, принадлежащее базису ω^{i}. Его образующими элементами будут образующие элементы алгебры А, за исключением ω^{i}, и элементы $\lambda^{\xi}_{i}, \lambda^{\xi}_{ik}, \ldots, \lambda^{\xi}_{i_1\ldots i_p}, \ldots$ нулевой степени, симметричные по нижним индексам, а в остальном независимые. Дифференциал последних имеет вид

$$d\lambda^{\xi}_{i_1\ldots i_p} = \theta^{\xi}_{i_1\ldots i_p} + \lambda^{\xi}_{i_1\ldots i_p i}\omega^{i}, \tag{19}$$

где $\theta^{\xi}_{i_1\ldots i_p}$ содержит лишь $\lambda^{\xi}_{i_1\ldots i_q}$ для $q \leqslant p$ (ср. [5]).

7. Построения, аналогичные приведенным в п. 6, можно проводить и для дифференциальных идеалов более общего типа. Не рассматривая вопроса во всей общности, остановимся на некоторых специальных случаях, нужных для дальнейшего.

Лемма. Пусть во внешней алгебре с линейной системой образующих имеются элементы θ^{α}, ω^{i} первой степени и B^{ξ}_{ik} — нулевой, причем ω^{i} могут быть выбраны за часть системы независимых образующих первой степени, и имеют место равенства

$$a^{\xi}_{\alpha k}\theta^{\alpha}\wedge\omega^{k} + B^{\xi}_{ik}\omega^{i}\wedge\omega^{k} = 0. \tag{20}$$

При этом $a^{\xi}_{\alpha k}$ — постоянные, а θ^{α}, $B^{\alpha}_{ik} (= -B^{\alpha}_{ki})$ входят в (20) существенно, т. е. из

$$a^{\xi}_{\alpha k}X^{\alpha} = 0$$

следует $X^{\alpha}=0$, а из уравнений

$$a^{\xi}_{\alpha k}Y^{\alpha}_{i} - a^{\xi}_{\alpha i}Y^{\alpha}_{k} + Y^{\xi}_{ik} = 0$$

с неизвестными Y^{α}_{i}, $Y^{\alpha}_{ik} (= -Y^{\alpha}_{ki})$ следует $Y^{\alpha}_{ik}=0$. Тогда (20) равносильны существованию в алгебре элементов Z^{a} таких, что

$$\theta^{\alpha} = H^{\alpha}_{al}Z^{a}\omega^{l},\quad B^{\xi}_{ik} = 0,$$

где постоянные H^{α}_{al} образуют фундаментальную систему решений системы

$$a^{\xi}_{\alpha k}Y^{\alpha}_{l} - a^{\xi}_{\alpha l}Y^{\alpha}_{k} = 0.$$

Доказательство леммы вполне аналогично доказательству леммы п. 4.

Рассмотрим теперь алгебру A с образующими элементами ω^i первой степени и u^ξ, v^α — нулевой, дифференциал в которой определен на подалгебре с образующими элементами ω^i, u^ξ по формулам

$$d\omega^i = 0, \ du^\xi = (a^\xi_{\alpha i} v^\alpha + a^\xi_{\eta i} u^\eta)\, \omega^i, \tag{21}$$

где $a^\xi_{\alpha i}$, $a^\xi_{\eta i}$ — постоянные, и все v^α входят в (21) существенно. Покажем, что существует единственная дифференциальная алгебра с линейной системой образующих, обладающая следующими свойствами: (1)*. Определен дифференциальный гомоморфизм $\tilde\sigma: A \to \tilde A$, переводящий ω^i в независимые элементы, которые могут быть выбраны за часть независимых образующих элементов первой степени (2)*. В $\tilde A$ нет собственной подалгебры, обладающей тем же свойством (1)*, (3)*. Для всякой дифференциальной алгебры $\tilde{\tilde A}$, обладающей свойствами (1)*, (2)*, определен дифференциальный гомоморфизм $p: \tilde A \to \tilde{\tilde A}$ такой, что диаграмма гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} & \tilde A \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, "\tilde\sigma"] \arrow[r, "\tilde{\tilde\sigma}"'] & \tilde{\tilde A} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Продифференцировав (21) и произведя преобразования, придем к уравнениям вида (20), где $\theta^\alpha = dv^\alpha + \tilde\theta^\alpha$, $\tilde\theta^\alpha$ — некоторые элементы алгебры A, а B^ξ_{ik} — линейные однородные, с постоянными коэффициентами выражения относительно v^α, u^ξ. В силу леммы, получим $B^\xi_{ik} = 0$. Разрешая эти уравнения относительно некоторых элементов и подставляя в (21), получим уравнения того же типа, с меньшим числом неизвестных. С ними поступим аналогичным образом. В конце концов придем к уравнениям вида (21), для которых после дифференцирования B^ξ_{ik} тождественно равны нулю. Тогда, в силу леммы, вводя новые элементы z^a, придем к уравнениям вида

$$dv^\alpha = (H^\alpha_{ai} z^a + H^\alpha_{\gamma i} v^\gamma + H^\alpha_{\xi i} u^\xi)\, \omega^i,$$

т. е. к нормальному продолжению алгебры с дифференциалом, обладающему всеми свойствами исходной алгебры. С этим продолжением поступаем прежним образом, и так далее. Рассуждая, как в п. 7, убеждаемся, что полученная в результате этого дифференциальная алгебра обладает требуемыми свойствами.

Важно отметить, что с некоторого момента при построении нашей алгебры соотношения типа $B^{\xi}_{ik}=0$ перестанут возникать, т. е. мы придем либо к дифференциальной алгебре с конечным числом образующих, либо к алгебре с дифференциалом, допускающей неограниченные нормальные продолжения, как это описано в п. 5. Действительно, наш процесс представляет собой построение продолжений линейной однородной системы уравнений Пфаффа (21) с постоянными коэффициентами (см. [4]). Но, как следует из известной теоремы Картана ([4], гл. X), после некоторого числа продолжений системы Пфаффа становится системой в инволюции, т. е., во всяком случае, не налагает новых уравнений на переменные, входящие в систему на некотором данном этапе продолжения.

Дифференциальная алгебра $F(n, m)$, полученная указанным образом из алгебры с образующими ω^i, u^{ξ}, u^{ξ}_i $(i=1, \ldots, n;\ \xi=n+1, \ldots, n+m)$ и дифференциалом

$$d\omega^i=0,\quad du^{\xi}=u^{\xi}_i\omega^i, \tag{22}$$

содержит, кроме того, образующие $u^{\xi}_{ik}, \ldots, u^{\xi}_{i_1\ldots i_p}, \ldots$, симметричные по нижним индексам, для которых

$$du^{\xi}_{i_1\ldots i_p}=u^{\xi}_{i_1\ldots i_p i}\omega^i. \tag{23}$$

Рассмотрим в $F(n, m)$ конечное число элементов h^{λ} $(\lambda=1, \ldots, L)$ вида

$$h^{\lambda}=\sum_{q=1}^{p_\lambda} a_{\xi}^{i_1\ldots i_q\lambda}u^{\xi}_{i_1\ldots i_q},\quad a_{\xi}^{i_1\ldots i_q\lambda}=\mathrm{const}. \tag{24}$$

Эти элементы порождают в алгебре $F(n, m)$ дифференциальный идеал I с базисными элементами нулевой степени

$$h^{\lambda}_{k_1\ldots k_s}=\sum_{q=1}^{p_\lambda} a_{\xi}^{i_1\ldots i_q\lambda}u^{\xi}_{i_1\ldots i_q k_1\ldots k_s}\quad (s=1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Существуют два способа построения факторалгебры $F(n, m)/I$. С одной стороны, можно последовательно разрешать систему уравнений $h^{\lambda}=0$, $h^{\lambda}_{k_1\ldots k_s}=0$ $(s=1, 2, \ldots)$ относительно входящих в них элементов. С другой стороны, можно разрешить лишь уравнения $h^{\lambda}=0$, подставить результат разрешения в уравнения (22), (23) $(p=1, \ldots, t)$, беря t настолько большим, чтобы учесть все уравнения $h^{\lambda}=0$, а затем из полученных уравнений вида (21) построить дифференциальную алгебру описанным выше образом.

Рассмотрим, далее, алгебру $F(n, L)$ с образующими элементами ω^{i}, h^{λ}, $h^{\lambda}_{i_1 \ldots i_s}$, того же строения, что и $F(n, m)$. Уравнения (24), (25) определяют дифференциальный гомоморфизм $P: F(n, L) \to F(n, m)$. Ядро этого гомоморфизма состоит из всех линейных комбинаций элементов h^{λ}, $h^{\lambda}_{i_1 \ldots i_s}$, обращающихся в нуль вследствие уравнений (24), (25), и образует дифференциальный идеал. Оказывается, этот идеал имеет то же строение, что и идеал I в алгебре $F(n, m)$: имеется конечное число элементов

$$K^{\varphi}=\sum_{s=1}^{t_{\varphi}} b_{\lambda}^{i_1 \ldots i_s \varphi} h^{\lambda}_{i_1 \ldots i_s}, \qquad b_{\lambda}^{i_1 \ldots i_s \varphi}=\mathrm{const}$$

таких, что ядро образовано элементами K^{φ}, $K^{\varphi}_{m_1 \ldots m_u}$,

$$K^{\varphi}_{m_1 \ldots m_u}=\sum_{s=1}^{t_{\varphi}} b_{\lambda}^{i_1 \ldots i_s \varphi} h^{\lambda}_{i_1 \ldots i_s m_1 \ldots m_u}.$$

Этот факт является частным случаем теоремы Д. Ритта о конечном базисе дифференциального идеала (см. [2] гл. I, IX. Терминология Ритта не совпадает с нашей).

8. Для приложений, как впрочем, и для самой теории дифференциальных алгебр, весьма важны следующие классы дифференциальных алгебр, которые мы обозначим через $A(n)$ и $A(n, m)$.

Теорема. Для всякого натурального числа n существует единственная дифференциальная алгебра $A(n)$ с линейной системой образующих, обладающая следующими свойствами: (1)*. Она содержит n элементов первой степени ω^{i}, которые можно принять за часть независимых образующих элементов первой степени и которые образуют базис дифференциального идеала в $A(n)$. (2)*. Для всякой дифференциальной алгебры B с линейной системой образующих, содержащей элементы $\tilde{\omega}^{i}$, обладающие свойствами, указанными в (1)* для ω^{i}, существует дифференциальный гомоморфизм $A(n) \to B$, переводящий ω^{i} в $\tilde{\omega}^{i}$. (3)* $A(n)$ не содержит собственной подалгебры, обладающей свойствами (1)*, (2)*.

Доказательство. В силу свойства (1)*, в алгебре $A(n)$ должны содержаться элементы ω^{k}_{i} такие, что

$$d\omega^{i}=\omega^{i}_{k} \wedge \omega^{k}. \tag{26}$$

Рассмотрим алгебру с независмыми образующими ω^i, ω^i_k, с дифференциалом, определенным на подалгебре C, образованной элементами ω^i, при помощи формул (26). Применяя метод математической индукции и следствие 2 из леммы п. 4, убеждаемся, что эта алгебра допускает неограниченные нормальные продолжения, в результате которых приходим к дифференциальной алгебре с образующими элементами первой степени ω^i, ω^i_k, ω^i_{kl}, ..., $\omega^i_{k_1 \dots k_p}$, ... симметричными по нижним индексам, а в остальном независимыми. Дифференциал в алгебре опреляется формулами(26) и (см. [5])

$$d\omega^k_{i_1 \dots i_p} = \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{q!\,(p-q)!}\, \omega^k_{l(i_1 \dots i_q} \wedge \omega^l_{i_{q+1} \dots i_p)} + \omega^k_{i_1 \dots i_p l} \wedge \omega^l, \qquad (27)$$

Далее, дифференциалы элементов $\tilde{\omega}^i$ всякой алгебры B, указанной в (2)*, также имеют вид

$$d\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^i_k \wedge \tilde{\omega}^k.$$

Применяя к этим уравнениям тот же процесс последовательных дифференцирований и раскрытий по лемме п. 4, убеждаемся в существовании в алгебре B еще элементов $\tilde{\omega}^i_k$, $\tilde{\omega}^i_{kl}$, ..., $\tilde{\omega}^i_{k_1 \dots k_p}$, ... симметричных по нижним индексам и удовлетворяющим уравнениям (26), (27). Отображение $\omega^i \to \tilde{\omega}^i$, $\omega^k_{i_1 \dots i_p} \to \tilde{\omega}^k_{i_1 \dots i_p}$ задает искомый гомоморфизм. Единственность построенной алгебры $A(n)$ следует из единственности процесса нормального продолжения.

Теорема. Для всякой пары натуральных чисел n, m существует единственная дифференциальная алгебра $A(n, m)$, обладающая следующими свойствами: (1)*. $A(n, m)$ содержит элементы ω^i, ω^ξ первой степени ($i = 1, \dots, n$; $\xi = n+1, \dots, n+m$), которые можно принять за часть независимых образующих элементов алгебры и которые образуют базис дифференциального идеала $I(n+m)$. При этом ω^i сами образуют базис дифференциального идеала $I(n)$. (2)*. Для всякой дифференциальной алгебры B с линейной системой образующих, содержащей элементы $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}^\xi$, обладающие свойствами, указанными в (I)* для ω^i, ω^ξ, существует дифференциальный гомоморфизм $A(n, m) \to B$, переводящий ω^i, ω^ξ в $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}^\xi$. (3)*. $A(n, m)$ не содержит собственной подалгебры, обладающей свойствами (I)*, (2)*.

Алгебру $A(n, m)$ можно получить, если в алгебре $A(n+m)$ обозначить исходные $n+m$ элементов через ω^i, ω^ξ ($i = 1, \dots, n$; $\xi = n+1, \dots, n+m$) и затем положить равными нулю все элементы $\omega^k_{i_1 \dots i_p \xi_1 \dots \xi_s}$, $s > 0$. Доказательство теоремы вполне аналогично доказательству предыдущей.

Рассмотрим расширение B алгебры $A(n)$ с помощью новых образующих элементов x^a, θ^a, для которых $dx^a = \theta^a$, $d\theta^a = 0$, $(a = 1, \ldots, t)$. В алгебре B рассмотрим дифференциальный идеал I с базисом из независимых элементов первой степени

$$\omega^i,\ \Omega^a \equiv \theta^a - \xi^a_I \omega^I,\ \Omega^\alpha \equiv \omega^\alpha - \xi^\alpha_I \omega^I, \tag{28}$$

где $i = 1, \ldots n$; $a = 1, \ldots, t$; ω^I, ω^α — независимые, с постоянными коэффициентами, комбинации элементов ω^k_i, $\omega^k_{i_1 \ldots i_s}$, а ξ^a_I, ξ^α_I — многочлены относительно x^a. С помощью идеала I, можно образовать следующие дифференциальные алгебры:

а. Разобьем совокупность элементов ω^i, Ω^a, Ω^α на два класса, обозначим элементы первого класса через Φ^u и второго—через $\varphi^\lambda (\lambda = 1, \ldots p)$ и образуем принадлежащее базису φ^λ общее решение идеала, имеющего базис

$$F^u = \Phi^u \wedge \varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^p \tag{29}$$

(см. конец п. 5).

б. Рассмотрим прямое произведение алгебры B и алгебры $A(p)$, исходные образующие элементы которой обозначим через $\theta^\lambda (\lambda = 1, \ldots, p)$. В алгебре $B \times A(p)$ выделяем дифференциальный идеал с базисом из элементов

$$\omega^i \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^p,\ \Omega^a \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^p,\ \Omega^\alpha \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^p \tag{30}$$

и образуем его общее решение, принадлежащее базису θ^λ.

в. Будем рассматривать алгебру $A(n, m)$ с исходными образующими ω^i, ω^ξ как расширение алгебры $A(n)$ с исходными образующими ω^i. Образуем расширение $\widetilde{B}$ алгебры $A(n, m)$ при помощи тех же элементов x^a, θ^a, что и выше, и в $\widetilde{B}$ дифференциальный идеал с базисом

$$\begin{gathered}\Omega^a \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} \wedge \ldots \wedge \omega^{n+m},\\ \Omega^\alpha \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} \wedge \ldots \wedge \omega^{n+m}.\end{gathered} \tag{31}$$

Строим общее решение этого идеала, принадлежащее базису ω^i, $\omega^\xi (i = 1, \ldots, n;\ \xi = n+1, \ldots n+m)$.

Все три типа алгебр служат одной цели — описанию «семейств дифференциально - геометрических объектов на многообразиях». Алгебры различных классов могут получаться друг из друга процессом канонизации, о котором будет сказано ниже.

При изучении алгебр, получаемых указанными способами, как, впрочем, и всех алгебр, получаемых процессом нормального продолжения по некоторому базису, большое значение имеют два класса дифференциальных идеалов.

Дифференциальный идеал назовем классифицирующим, если он обладает базисом из элементов нулевой степени.

Обычно классифицирующие идеалы алгебры A, полученной процессом нормального продолжения по базису ω^i, строятся следующим образом. Пусть b^λ — некоторые элементы нулевой степени, дифференциалы которых имеют вид

$$db^\lambda = b^\mu \theta^\lambda_\mu + b^\lambda_i \omega^i, \tag{32}$$

где θ^μ_λ — элементы первой степени алгебры A. Дифференцируя уравнения (32), представляя θ^μ_λ и $d\theta^\mu_\lambda$ через независимые образующие элементы первой степени, включающие ω^i, и применяя лемму Картана (см. п. 4), убеждаемся, что дифференциалы элементов b^λ_i обязаны иметь вид

$$db^\lambda_i = b^\mu_k \theta^{\lambda k}_{i\mu} + b^\mu \theta^\lambda_{i\mu} + b^\lambda_{ik}\omega^k,$$

т. е. дифференциалы элементов b^λ, b^λ_i в совокупности удовлетворяют уравнениям вида (32). Продолжая построение, приходим к множеству элементов b^λ, b^λ_i, b^λ_{ik}, ..., $b^\lambda_{i_1 \ldots i_p}$, ... (вообще говоря, бесконечному), образующих базис классифицирующего дифференциального идеала.

Дифференциальный идеал в алгебре A, полученной нормальным продолжением по базису ω^i, назовем канонизирующим, если он обладает базисом из элементов b^λ, db^λ, (b^λ—нулевой степени), причем элементы db^λ, ω^i независимы между собой и могут быть взяты за часть независимых образующих элементов первой степени алгебры A. Таким образом, факторалгебра алгебры A по канонизирующему идеалу остается алгеброй с линейной системой образующих.

При геометрических и иных исследованиях переход к факторалгебре по канонизирующему идеалу — процесс канонизации — иногда очень сильно упрощает вычисления, не отражаясь на общности получаемых результатов. Еще больше упрощений получается, если алгебра, получаемая процессом канонизации, сама оказывается алгеброй, которая может быть получена процессом нормального продолжения по тому же базису, что и исходная алгебра. Мы сейчас рассмотрим класс алгебр, для которых это имеет место.

9. Результаты, полученные в этом разделе статьи, можно было бы перенести на значительно более широкие классы

алгебр, указанных в предыдущем пункте, сохраняя основные этапы доказательства, но добавляя к нему ряд детализирующих построений, иногда довольно громоздких.

Однородными элементами порядка p алгебры $A(n)$ будем называть элементы первой степени, линейно выражающиеся через образующие элементы $\omega^k_{i_1\ldots i_p}$, $p = \mathrm{const}$. Дифференциальный идеал в алгебре $A(n)$ будем называть идеалом с однородным базисом, если у него существует базис из независимых элементов первой степени

$$\omega^l, \omega^{\xi_1}, \ldots, \omega^{\xi_p},$$

где ω^{ξ_λ} — однородные элементы порядка λ. Пусть I_1 — такой идеал. Образуем идеал I с базисом из элементов

$$\omega^{\xi_\lambda} \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$$

и рассмотрим общее решение $H(I)$ этого идеала, принадлежащее базису $\omega^1, \ldots, \omega^n$.

Исходя из основных уравнений (ср. (18))

$$\omega^{\xi_\lambda} = h^{\xi_\lambda}_l \omega^l, \tag{33}$$

приходим к элементам $h^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_q}$ алгебры $H(I)$, симметричным по нижним индексам, дифференциалы которых имеют вид (ср. (19))

$$dh^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_p} - \theta^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_p} = h^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_p i_{p+1}} \omega^{i_{p+1}}, \tag{34}$$

где $\theta^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_p}$ — линейные комбинации элементов алгебры $A(n)$ порядка выше нулевого, с коэффициентами — многочленами относительно $h^{\xi_\mu}_{i_1\ldots i_s}$. Применяя метод математической индукции и пользуясь формулами (26), (27), можно убедиться, что элемент $\theta^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_p}$ содержит элементы алгебры $A(n)$ порядка не выше $p+\lambda$. При этом, если ω^{ξ_λ} имеет вид

$$\omega^{\xi_\lambda} = a_k^{i_1\ldots i_\lambda \xi_\lambda} \omega^k_{i_1\ldots i_\lambda}, \tag{35}$$

то

$$\theta^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_p} = \tilde{\theta}^{\xi_\lambda}_{i_1\ldots i_p} + a_h^{k_1\ldots k_\lambda \xi_\lambda} \omega^h_{k_1\ldots k_\lambda i_1\ldots i_p},$$

где $\widetilde{\theta}^{\xi_\lambda}_{i_1 \ldots i_p}$ содержит элементы порядка ниже $p+\lambda$. Коэффициенты при образующих элементах алгебры $A(n)$ в $\widetilde{\theta}^{\xi_\lambda}_{i_1 \ldots i_p}$ многочлены от $h^{\xi_\mu}_{i_1 \ldots i_s}$, для которых $\mu + s \leqslant p+\lambda$, не содержащие свободных членов, т. е. обращающиеся в нуль при $h^{\xi_\mu}_{i_1 \ldots i_s} = 0$.

Будем теперь производить над элементами $h^{\xi_\lambda}_{i_1 \ldots i_p}$ линейные подстановки по следующим правилам. Возьмем элементы $h^{\xi_1}_i$ и составим максимальное число таких их линейно независимых линейных комбинаций k^{u_1}, что дифференциалы k^{u_1} не содержат элементов второго порядка. Через l^{φ_1} обозначим линейные комбинации элементов $h^{\xi_1}_i$, выбранные таким образом, чтобы k^{u_1} l^{φ_1} вместе составляли независимый базис пространства переменных $h^{\xi_1}_i$. Теперь возьмем элементы $h^{\xi_1}_{ik}$, $h^{\xi_2}_i$ и составим максимальное число таких их линейно независимых линейных комбинаций k^{u_2}, что дифференциалы k^{u_2} не содержат элементов третьего порядка. Через l^{φ_2} обозначим линейные комбинации тех же элементов, вместе с k^{u_2} образующие линейно независимый их базис. Далее аналогичным образом составляем независимые линейные комбинации k^{u_3}, l^{φ_3} элементов $h^{\xi_1}_{ikl}$, $h^{\xi_2}_{ik}$, $h^{\xi_3}_i$ и продолжаем это построение неограниченно. Таким образом, вместо образующих элементов $h^{\xi_\lambda}_{i_1 \ldots i_p}$ будем иметь новые образующие элементы k^{u_s}, l^{φ_s} $(s = 1, 2, \ldots)$. Будем называть k^{u_s} (а также их линейные комбинации) элементами первой группы, а l^{φ_s} и их комбинации — элементами второй группы. В дифференциалы элементов k^{u_s} элементы порядка $s+1$ вообще не входят, а в дифференциалы l^{φ_s} входят в виде независимых комбинаций с постоянными коэффициентами.

Заметим теперь, что дифференциалы элементов k^{u_s} первой группы имеют коэффициентами при ω^i также элементы первой группы — линейные комбинации элементов $k^{u_{s+1}}$.

Рассмотрим дифференциальную алгебру $F(n, n)$ с образующими элементами θ^i первой степени и u^i, $u^i_k, \ldots, u^k_{i_1 \ldots i_p}, \ldots$ нулевой степени, симметричными по нижним индексам, причем

$$d\theta^l = 0, \quad du^l = u^l_k \theta^k, \tag{36}$$

$$du^k_{i_1 \ldots i_p} = u^k_{i_1 \ldots i_p l_{p+1}} \theta^{l_{p+1}}, \tag{37}$$

т. е. $F(n, n)$ получена нормальным продолжением из алгебры с дифференциалом (36) по базису θ^l (см. п. 7). Одновременно рассмотрим алгебру V с образующими θ^l, $v^{\xi\lambda}_i, \ldots, v^{\xi\lambda}_{i_1 \ldots i_p}, \ldots$, аналогичного строения, полученную нормальным продолжением из алгебры с образующими θ^l, $v^{\xi\lambda}_i$, $v^{\xi\lambda}_{ik}$ и дифференциалом

$$d\theta^l = 0, \quad dv^{\xi\lambda}_i = v^{\xi\lambda}_{ik} \theta^k$$

($v^{\xi\lambda}_{i_1 \ldots i_p}$ симметричны по нижним индексам).

Зададим дифференциальный гомоморфизм $V \to F(n, n)$ при помощи уравнений

$$\theta^l = \theta^l, \quad v^{\xi\lambda}_i = a^{i_1 \ldots i_\lambda \xi\lambda}_k u^k_{i_1 \ldots i_\lambda i},$$

где $a^{i_1 \ldots i_\lambda \xi\lambda}_k$ те же, что и в (35). Обозначим через $\varkappa^{u_1}$ максимальное число независимых линейных комбинаций элементов $v^{\xi_1}_i$, принадлежащих ядру гомоморфизма $V \to F(n, n)$, и дополним $\varkappa^{u_1}$ элементами λ^{φ_1} до полного линейного базиса пространства переменных $v^{\xi_1}_i$. Затем аналогичным образом составляем линейные комбинации $\varkappa^{u_2}$, λ^{φ_2} элементов $v^{\xi_1}_{ik}$, $v^{\xi_2}_i$, потом линейные комбинации $\varkappa^{u_3}$, λ^{φ_3} элементов $v^{\xi_1}_{ikl}$, $v^{\xi_2}_{ik}$, $v^{\xi_3}_i$ и т. д. Очевидно, это разбиение полностью соответствует описанному выше разбиению базиса элементов $h^{\xi\lambda}_{i_1 \ldots i_p}$ алгебры $H(I)$. Но мы выяснили в п. 7, что в ядре гомоморфизма $V \to F(n, n)$ можно найти конечное число элементов

$$K^\sigma = \sum_{s=1}^{t_\sigma} b^{i_1 \ldots i_s \sigma}_{\xi\lambda} v^{\xi\lambda}_{i_1 \ldots i_s}$$

такое, что базис ядра состоит из элементов

$$K^\sigma_{m_1 \ldots m_h} = \sum_{s=1}^{t_\sigma} b^{i_1 \ldots i_s \sigma}_{\xi\lambda} v^{\xi\lambda}_{i_1 \ldots i_s m_1 \ldots m_h}.$$

Очевидно, элементы K^σ, $K^\sigma_{m_1 \ldots m_h}$, θ^l образуют дифференциальную подалгебру K алгебры V, которая получается нормальным продолжением алгебры с дифференциалом

$$d\theta^l = 0, \quad dK^\sigma = K^\sigma_l \theta^l.$$

Этот процесс нормального продолжения естественно рассматривать как часть процесса построения всей алгебры V нормальным продолжением.

Заметим теперь, что не только все элементы $\varkappa^{u_1}$, $\varkappa^{u_2}$, ..., $\varkappa^{u_s}$ линейно выражаются через K^σ, $K^\sigma_{m_1 \dots m_h}$, но и обратно, так как по построению, через элементы $\varkappa^{u_s}$ линейно выражаются все элементы ядра гомоморфизма, являющиеся линейными комбинациями элементов $v_i^{\xi\lambda}$, $v_{i_1 \dots i_s}^{\xi\lambda}$. Заметим далее, что процесс образования элементов $v_i^{\xi\lambda}, \dots, v_{i_1 \dots i_s}^{\xi\lambda}, \dots$ при построении алгебры V нормальным продолжением однозначно соответствует аналогичному процессу образования элементов $h_i^{\xi\lambda}, \dots, h_{i_1 \dots i_s}^{\xi\lambda}, \dots$ алгебры $H(I)$. В частности, элементы k^{u_s} $(s = 1, 2, \dots)$ первой группы вводятся по тем же формулам, что и образующие элементы $\varkappa^{u_s}$ дифференциальной подалгебры K при построении ее процессом нормального продолжения.

Рассмотрим в $H(I)$ дифференциальный идеал L, базис которого образован всеми элементами l^{φ_s} $(s = 1, 2, \dots)$ второй группы и их дифференциалами dl^{φ_s}. Этот идеал является канонизирующим (см. п. 8). Действительно, мы видели, что в dl^{φ_s} элементы порядка $s+1$ входят в виде независимых слагаемых с постоянными коэффициентами. Такое строение элементов dl^{φ_s} обеспечивает возможность последовательного (по возрастающим порядкам элементов) обратного выражения образующих элементов первой степени алгебры $H(I)$ через элементы dl^{φ_s} и часть прежних образующих элементов, составляющих вместе с dl^{φ_s} полную систему независимых элементов первой степени.

Эти элементы, дополняющие dl^{φ_s} до полной системы образующих элементов первой степени, будут, очевидно, при гомоморфизме $H(I)$ на ее факторалгебру $h(I) = H(I)/L$ по нашему идеалу переходить в систему независимых элементов первой степени алгебры $h(I)$. За образующие элементы нулевой степени алгебры $h(I)$ можно взять образы элементов k^{u_s} алгебры $H(I)$, которые, очевидно, останутся независимыми.

Заметим теперь, что в качестве образующих элементов первой степени алгебры $h(I)$ можно взять образы образующих элементов алгебры $A(n)$ при сквозном гомоморфизме $A(n) \to H(I) \to h(I)$, остающиеся независимыми в силу наложенных на них уравнений (33) и $dl^{\varphi_s} = 0$. Тем самым на образующие элементы первой степени алгебры $h(I)$ можно перенести понятие порядка элемента. Что касается уравнений (33) и $dl^{\varphi_s}=0$, то они равносильны системе уравнений

$$a_h^{k_1 \dots k_\lambda \xi \lambda} \omega^h_{k_1 \dots k_\lambda l_1 \dots l_p} = \tilde{\tilde{\theta}}^{\xi\lambda}_{l_1 \dots l_p} \tag{38}$$

$(p=0, 1, 2, \dots)$, в каждом из которых правая часть выражается через элементы первой степени порядка ниже, чем $\lambda+p$, с коэффициентами — многочленами от k^{u_s}, $s \leqslant \lambda + p$.

Рассмотрим теперь дифференциальную алгебру $F(n, n)$ (см. п. 7) с элементами первого порядка θ^l и элементами нулевого порядка u^l, u^l_k, ..., $u^k_{l_1 \dots l_p}$, ..., симметричными по нижним индексам, причем

$$\begin{gathered} d\theta^k = 0, \quad du^l = u^l_k \theta^k, \\ du^k_{l_1 \dots l_p} = u^k_{l_1 \dots l_p l_{p+1}} \theta^{l_{p+1}} \end{gathered} \tag{39}$$

и в ней дифференциальный идеал, образованный элементами

$$v^{\xi\lambda}_{k_1 \dots k_s} = a_k^{l_1 \dots l_\lambda \xi \lambda} u^k_{l_1 \dots l_\lambda k_1 \dots k_s} \; (s=0, 1, 2, \dots), \tag{40}$$

где $a_k^{l_1 \dots l_\lambda \xi\lambda}$ те же, что и в (38). Мы установили в п. 7, что факторалгебра Φ по этому идеалу является дифференциальной алгеброй, которая строится единственным образом по некоторой алгебре с дифференциалом и с конечным числом образующих, причем процесс построения с некоторого момента становится процессом нормального продолжения по базису θ^l. В нашем случае, когда элементы $v^{\xi\lambda}_{k_1 \dots k_s}$ «однородны» относительно $u^k_{l_1 \dots l_{s+\lambda}}$, т. е. выражаются через элементы с одинаковым числом индексов внизу, процесс построения алгебры Φ можно вести следующим образом. Выберем максимальное число линейных комбинаций элементов u^l_k, независимых в силу уравнений $v^{\xi_1}=0$ и обозначим их через w^{α_1}. Затем выберем максимальное число линейных комбинаций элементов u^l_{kl}, независимых в силу уравнений $v^{\xi_1}_l=0$, $v^{\xi_2}=0$, и обозначим их через w^{α_2}. Затем аналогичным образом выбираем комбинации w^{α_3} элементов u^l_{klp} с учетом уравнений $v^{\xi_1}_{lk}=0$, $v^{\xi_2}_l=0$, $v^{\xi_3}=0$ и т. д. неограниченно. Повторяя это p раз, чтобы учесть все основные уравнения $v^{\xi_1}=0$, $v^{\xi_p}=0$, мы получим алгебру с дифференциалом, допускающую нормальное продолжение по базису θ^l. Действительно, по построению, дифференциалы элементов w^{α_s} имеют вид

$$\begin{aligned} d\varpi^{\alpha_1} &= H^{\alpha_1}_{\alpha_2 i}\varpi^{\alpha_2}\theta^i, \\ d\varpi^{\alpha_2} &= H^{\alpha_2}_{\alpha_3 i}\varpi^{\alpha_3}\theta^i, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ d\varpi^{\alpha_{p-1}} &= H^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p i}\varpi^{\alpha_p}\theta^i, \end{aligned} \tag{41}$$

где $H^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s i}$ — постоянные. Дифференцирование уравнений последней строки дает

$$H^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p i} d\varpi^{\alpha_p} \wedge \theta^i = 0$$

и не может наложить условий на элементы ϖ^{α_s}, $s = 1, \ldots, p$. Уравнения, выражающие дифференциалы элементов ϖ^{α_s}, $s > p$, будут, очевидно, иметь этот же вид (41).

Сравнивая (38) с (40), видим, что независимые образующие элементы первой степени алгебры $h(I)$ можно выбрать в полном соответствии с выбором образующих элементов ϖ^{α_s} алгебры Φ, т. е. брать в качестве образующих элементов образы Ω^{α_s} таких же линейных комбинаций $\widetilde{\Omega}^{\alpha_s}$ элементов $\omega^k_{i_1 \ldots i_s}$ алгебры $A(n)$ какими являются ϖ^{α_s}, построенные из элементов $u^k_{i_1 \ldots i_s}$. Более того, сравнивая формулы (39) с (26), (27), убеждаемся, что дифференциалы элементов Ω^{α_s} имеют вид

$$d\Omega^{\alpha_s} = H^{\alpha_s}_{\alpha_{s+1} i}\Omega^{\alpha_{s+1}} \wedge \omega^i + \theta^{\alpha_s}, \tag{42}$$

где постоянные $H^{\alpha_s}_{\alpha_{s+1} i}$ те же, что и в (41), а θ^{α_s} содержат элементы первой степени порядка не выше s. Дифференциалы элементов ω^i будут иметь аналогичное строение

$$d\omega^l = H^l_{\alpha_1 k}\Omega^{\alpha_1} \wedge \omega^k + \theta^l, \tag{43}$$

где $\theta^l = P^l_{k i}\omega^k \wedge \omega^i$.

Возьмем теперь совокупность всех образующих элементов первой степени Ω^{α_s} алгебры $h(I)$ порядка не выше t и образующих элементов k^{u_s} нулевой степени, для которых также $s \leqslant t$. Учитывая все выясненное нами ранее относительно строения уравнений (34), (38), (42), (43), убеждаемся, что уравнения, задающие дифференциалы взятых элементов, имеют в совокупности вид (12), где роль элементов ω^ξ играют ω^i, Ω^{α_s} $(s = 1, \ldots, t)$, роль элементов ω^α — элементы $\Omega^{\alpha_{t+1}}$, роль элементов x^λ — k^{u_s} $(s = 1, \ldots, t)$, а роль элементов y^u — элементы $k^{u_{t+1}}$. Наша задача — показать, что если взять t достаточно большим, то переход от t к $t+1$ будет происходить при помощи нормального продолжения. Мы уже видели, что введение элементов $k^{u_{t+2}}$ при достаточно большом t может быть осуществлено дифференцированием уравнений, выражающих dk^{u_t}, и последующим раскрытием этих уравнений. Что касается элементов $\Omega^{\alpha_{t+2}}$, то они вводятся по тем же правилам, что и элементы $\omega^{\alpha_{t+2}}$, которые при достаточно большом t вводятся раскрытием уравнений

$$H^{\alpha_t}_{\alpha_{t+1}i} d\omega^{\alpha_{t+1}} \wedge \theta^i = 0. \tag{44}$$

Но введение новых элементов первой степени при нормальном продолжении уравнений, выражающих $d\Omega^{\alpha_t}$, осуществляется при помощи той же системы (7), т. е. в нашем случае

$$H^{\alpha_t}_{\alpha_{t+1}i} Z^{\alpha_{t+1}}_k - H^{\alpha_t}_{\alpha_{t+1}k} Z^{\alpha_{t+1}}_i = 0,$$

что и при раскрытии уравнений (44). Следовательно, элементы $\Omega^{\alpha_{t+2}}$ также можно считать полученными в процессе нормального продолжения алгебры с дифференциалом, образованной элементами k^{u_s}, Ω^{α_s}, ω^i $(s = 1, \ldots, t+1)$, подалгебра C которой образована элементами k^{u_s}, Ω^{α_s}, ω^i $(s = 1, \ldots, t)$. Сформулируем окончательный результат.

Теорема. Пусть в алгебре $A(n)$ задан дифференциальный идеал с конечным однородным базисом ω^i, ω^{ζ_λ}. Образуем дифференциальный идеал с базисом из элементов

$$\omega^{\zeta_\lambda} \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$$

и его общее решение $H(I)$, принадлежащее базису ω^i. Пусть L — дифференциальный идеал в алгебре $H(I)$, с базисом из элементов I^φ, dI^φ, где I^φ — максимальное множество элементов нулевого порядка, дифференциалы которых содержат в качестве слагаемых с постоянными коэффициентами независимые образы элементов алгебры $A(n)$ при естественном гомоморфизме $A(n) \to H(I)$. Тогда факторалгебра $h(I) = H(I)/L$ является дифференциальной алгеброй с линейной системой образующих, которая может быть получена процессом нормального продолжения по базису ω^i.

Заметим, что приведенное доказательство теоремы позволяет указать порядок t, достаточный для получения алгебры с дифференциалом, нормальным продолжением которой можно получить $h(I)$. Кроме того, легко показать, что алгебры, получаемые из одного идеала I при различном выборе элементов I^φ, оказываются изоморфными между собой.

10. Рассмотрим коротко вопросы реализации построенных алгебр, что позволит выяснить и их значение.

Пусть M_n — n-мерное дифференцируемое многообразие, U — его координатная окрестность, u^i — соответствующие локальные координаты. Образуем n дифференциальных форм $\omega^i = u^i_k du^k$, где u^i_k — новые переменные, удовлетворяющие единственному условию $\det \|u^i_k\| \neq 0$. Внешние дифференциалы форм ω^i имеют вид

$$d\omega^i = \tilde{\omega}^i_k \wedge \omega^k,$$

где $\tilde{\omega}^i_k = du^i_l \tilde{u}^l_k$, а $\|\tilde{u}^i_k\|$ — матрица, обратная $\|u^k_l\|$. В силу леммы Картана, наиболее общие формы ω^k_l, удовлетворяющие условиям

$$d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k, \tag{45}$$

имеют вид $\omega^i_k = \tilde{\omega}^i_k + u^i_{kl}\omega^l$, где u^i_{kl} — новые переменные, удовлетворяющие лишь условиям $u^i_{kl} = u^i_{lk}$. Дифференциалы форм ω^i_k имеют вид

$$d\omega^i_k = \omega^i_l \wedge \omega^l_k + \tilde{\omega}^i_{kl} \wedge \omega^l,$$

где

$$\tilde{\omega}^i_{kl} = du^i_{kl} + u^i_{kp}\,\omega^p_l + u^i_{pl}\,\omega^p_k - u^p_{kl}\,\omega^i_p.$$

Наиболее общие формы ω^i_{kl}, удовлетворяющие условиям

$$d\omega^i_k = \omega^i_l \wedge \omega^l_k + \omega^i_{kl} \wedge \omega^l \tag{46}$$

имеют вид $\omega^i_{kl} = \tilde{\omega}^i_{kl} + u^i_{klp}\omega^p$, где u^i_{klp} — новые переменные, симметричные по нижним индексам. Применяя метод математической индукции, убеждаемся, что этот процесс можно повторять неограниченно. В результате приходим к последовательности форм $\omega^i, \omega^k_i, \ldots, \omega^k_{i_1 \ldots i_p}, \ldots$, симметричных по нижним индексам, а в остальном независимых, от переменных $u^i, u^k_i, \ldots, u^k_{i_1 \ldots i_p}, \ldots$, также симметричных по нижним индексам $(\det \|u^k_i\| \neq 0)$. При этом выполняются уравнения (26), (27), так что мы имеем реализацию алгебры $A(n)$.

Пусть теперь V — другая координатная окрестность в многообразии M_n, пересекающаяся с U, и v^i — соответствующие локальные координаты. Введя переменные $v^i_k, v^i_{kl}, \ldots$ $\ldots, v^k_{i_1 \ldots i_p}$, построим из них, как выше, формы $\Omega^i, \Omega^i_k, \ldots$ $\ldots, \Omega^k_{i_1 \ldots i_p}, \ldots$. На пересечении $U \cap V$ $v^i = v^i(U^k)$. Будем стараться определить переменные $v^k_i, \ldots, v^k_{i_1 \ldots i_p}$, как функции от $u^i, u^k_i, \ldots, u^k_{i_1 \ldots i_p}, \ldots$, таким образом, чтобы формы Ω

перешли в соответствующие формы ω. Сравнение приводит к последовательности необходимых и достаточных условий

$$v_k^i = u_l^i \frac{\partial u^l}{\partial v^k}$$

$$v_{kl}^i = u_{kl}^i - \frac{\partial^2 u^p}{\partial v^q \partial v^s} \tilde{v}_k^q \tilde{v}_l^s u_p^i$$

$$v_{klp}^i = u_{klp}^i + \frac{\partial^3 u^h}{\partial v^q \partial v^s \partial v^t} \tilde{v}_k^q \tilde{v}_l^s \tilde{v}_p^t u_h^i + \frac{\partial^2 u^h}{\partial v^q \partial v^s} \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^f \partial u^t} u_h^i \times$$

$$\times \left(\tilde{v}_k^s \tilde{u}_l^f \tilde{u}_p^t + \tilde{v}_l^s u_p^f u_k^t + \tilde{v}_p^s \tilde{u}_k^t \tilde{u}_l^f \right) \qquad (47)$$

. . . .

и т. д.

Далее, можно проверить, что все формулы, получаемые на этом пути, обладают свойствами транзитивности. Именно, если есть третья окрестность W, пересекающаяся с $U \cap V$, то формулы перехода от переменных $u^i, \ldots, u_{i_1 \ldots i_p}^k$ к $w^i, w_{i_1 \ldots i_p}^k$ могут быть получены последовательным переходом от u^i, $u_{i_1 \ldots i_p}^k$ к $v^i, \ldots, v_{i_1 \ldots i_p}^k$, и затем от $v^i, v_{i_1 \ldots i_p}^k$ к $w^i, w_{i_1 \ldots i_p}^k$.

Отсюда, прежде всего, вытекает, существование последовательности многообразий $M_n, M_n^{(1)}, \ldots, M_n^{(p)}, \ldots$ таких, что переменные $u^i, u_k^i, \ldots, u_{i_1 \ldots i_p}^k$ $\left(u^i \in U,\ \det \|u_k^i\| \neq 0\right)$ являются локальными координатами в $M_n^{(p)}$, а переход к другим локальным координатам задается формулами (47). После этого мы имеем право считать формы $\omega^i, \ldots, \omega_{i_1 \ldots i_{p-1}}^k$, определенные в каждой координатной окрестности так, как указано выше, заданными на всем многообразии $M_n^{(p)}$. Мы приходим к основному здесь результату.

Над каждым дифференцируемым многообразием M_n существует однозначно определенная последовательность многообразий $M_n, M_n^{(1)}, \ldots, M_n^{(p)}, \ldots$ и в этих многообразиях — последовательность дифференциальных форм, реализующая алгебру $A(n)$.

Полный прообраз точки многообразия M_n при естественном отображении $M_n^{(p)}$ на M_n имеет структуру группы Ли $D_n^{(p)}$. Уравнения, определяющие односторонние сдвиги в этой группе, получатся, если положить в уравнениях (47) $u^i = u_0^i$ и считать производные от u^i по v^k независимыми параметрами, определяющими преобразование. Формы $\omega_k^i, \ldots, \omega_{i_1 \ldots i_p}^k$ при $u^i = u_0^i$, $du^i = 0$ становятся односторонне инвариантными формами группы $D_n^{(p)}$. Структурные уравнения определятся уравнениями (27) при $\omega^i = 0$.

Обозначим через E пространство переменных x^a, и рассмотрим на прямом произведении многообразий E и $M_n^{(p)}$ вполне интегрируемую систему Пфаффа

$$\omega^i = 0, \quad \Omega^a = 0, \quad \Omega^\alpha = 0, \tag{48}$$

левые части которой имеют вид (28). Предположим, что множество связных интегральных многообразий этой системы обладает структурой дифференцируемого многообразия M_N, индуцированной на нем естественным образом структурой объемлющего пространства $E \times M_n^{(p)}$.

Например, это всегда будет иметь место, если уравнения $\Omega^\alpha = 0$ отсутствуют, а остальные уравнения соответствуют представлению группы $D_n^{(p)}$ в пространстве переменных x^a (для этого достаточно, чтобы точки интегральных многообразий системы (48) находились во взаимно однозначном соответствии с точками группы $D_n^{(p)}$, рассматриваемой над данной точкой многообразия M_n). Впрочем, можно показать, что при $\Omega^\alpha = 0$ и $n \neq 2$ наше предположение всегда справедливо, если ограничить изменение переменных x^a некоторой областью пространства E (это следует из конечности фундаментальной группы $D_n^{(p)}$). Предположение останется справедливым, если, исходя из случая $\Omega^\alpha = 0$, наложить на переменные x^a рациональные зависимости, приводящие к уравнениям (48) общего вида, и не налагающие на левые части уравнений (48) тождественных линейных зависимостей. Действительно, множество интегральных подмногообразий, на которых формы остаются независимыми, составят открытое подмножество многообразия интегральных подмногообразий системы, рассматриваемой до наложения условий. При отсутствии переменных x^a и уравнений $\Omega^a = 0$ предположение, как известно, означает, что уравнения (48) соответствуют замкнутой подгруппе группы $D_n^{(p)}$. Во всех этих случаях будем называть многообразие M_N пространством дифференциально-геометрических объектов данного типа многообразия M_n.

Пусть в M_N, определенном системой (48), задано p-мерное дифференцируемое подмногообразие S_p («Семейство дифференциально-геометрических объектов») и пусть θ^λ $(\lambda = 1, \ldots, p)$ — основные образующие элементы алгебры $A(p)$, связанной с многообразием S_p. Тогда общее решение $\Sigma(S_p)$ идеала с базисом (30) естественным образом реализуется над подмногообразием S_p и служит для его изучения. Факторалгебры алгебр типа $\Sigma(S_p)$ по канонизирующим идеалам служат той же цели. В частности, общие решения идеалов с базисами (29), (31) можно получить из алгебр типа $\Sigma(S_p)$ канонизирующими построениями, аналогичными рассмотренным в п. 9. Факторалгебры получаемых этими путями алгебр по классифицирующим идеалам служат для изучения специальных классов семейств дифференциально-геометрических объектов, а сами классифицирующие идеалы — для выделения этих специальных семейств.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Борель А., О когомологиях главных расслоенных пространств. Гл. I. В сб. Расслоенные пространства. М., 1958
2. Ritt D., Differential algebra. 1950
3. Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру. М., 1959
4. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1947
5. Лаптев Г. Ф., Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, Л., 1964, 2, 226—233