Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Бонштедт, В. А. Зайцев, П. К. Мачехин, Е. Л. Тонков, Оптимизация управления твердотельным волновым гироскопом, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем.*, 2005, выпуск 1, 189–214

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
17 февраля 2025 г., 11:54:22

УДК 517.934

**А. В. Бонштедт, В. А. Зайцев,
П. К. Мачехин, Е. Л. Тонков**

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ ГИРОСКОПОМ[1]

Изучаются задачи идентификации параметров твердотельного волнового гироскопа (ТВГ), возникающих в связи с внутренними потерями и неточностями изготовления прибора. В общей сложности таких параметров одиннадцать. Даются алгоритмы идентификации этих параметров, описываются также процедуры управления ТВГ, компенсирующие внутренние потери и неточности изготовления ТВГ. Построенные управления обладают свойством неупреждаемости.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, идентификация, неупреждающее управление.

Введение

В последние годы проводятся интенсивные работы по созданию твердотельного волнового гироскопа (ТВГ) — нового инерциального прибора, обладающего целым рядом преимуществ по сравнению с традиционно используемыми гироскопами [1, 2]. Математическое описание ТВГ содержит системы дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории тонких оболочек [3, 4]. Такие системы не интегрируются в квадратурах, а численное интегрирование с достаточной точностью требует значительных вычислительных мощностей и не может быть применено в гироскопе, находящемся в составе изделия с ограничениями в объеме и энергопотреблении.

В целях упрощения расчетов и анализа работы ТВГ возможно применение различных механических моделей, описание которых осуществляется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [5] рассматривается «обобщенная модель ТВГ»,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ОАО ИЭМЗ «Купол» (договор № 2878 от 30.10.2001).

представляющая собой массу, связанную пружинами по двум координатам с жестким вращающимся кольцом, исследуется ее динамика в плоскости кольца (ранее анализ этой задачи приводился в работе [6]). В работе [7] рассматривается 8-точечная модель ТВГ, состоящая из 8 масс, соединенных с центром системы пружинами, а между собой — жесткими невесомыми, нерастяжимыми шарнирными соединениями (условие нерастяжимости кольца). В такой модели в отсутствие соединений имеется 16 степеней свободы, наличие связей сокращает число степеней свободы до 8. В системе могут существовать различные формы колебаний — как осесимметричные так и несимметричные. Для получения симметричной картины колебаний (основная вторая форма колебаний в ТВГ представляет собой осесимметричный эллипс) в систему необходимо ввести дополнительные связи, симметрирующие колебательную картину и позволяющие уменьшить число степеней свободы.

Здесь мы пользуемся математической моделью ТВГ, полученной и исследованной С. В. Кузьминым, П. К. Мачехиным и А. В. Бонштедтом в работе [8].

§ 1. Идеальная модель ТВГ

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\dfrac{2\sigma v}{1+\sigma^2}\dot{x}_2 - \dfrac{2\sigma\dot{v}}{1+\sigma^2}x_2 + \dfrac{\omega^2 - v^2}{1+\sigma^2}x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\dfrac{2\sigma v}{1+\sigma^2}\dot{x}_1 + \dfrac{2\sigma\dot{v}}{1+\sigma^2}x_1 + \dfrac{\omega^2 - v^2}{1+\sigma^2}x_2 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Согласно статье [8] эта система с достаточной степенью точности описывает свободные колебания идеального ТВГ. Здесь $\sigma = \sqrt{2} - 1$, $v = v(t)$ — действующая на систему относительно оси симметрии внешняя угловая скорость, $\dot{v} = dv/dt$.

Введем следующие обозначения: $K_1 = \dfrac{\sigma}{1+\sigma^2}$, $K_0 = K_1 + 4K_1^2$,

$$\omega(v) = \sqrt{\frac{\omega^2 - v^2}{1+\sigma^2} + 4K_1^2 v^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{\omega^2}{1+\sigma^2}.$$

Тогда, так как $\sigma = \sqrt{2} - 1$, то $K_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $K_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+\sigma^2}$,

$$\frac{\omega^2 - v^2}{1+\sigma^2} = \omega_0^2 - K_0 v^2, \quad \omega(v) = \sqrt{\omega_0^2 - K_1 v^2}.$$

В новых обозначениях система (1.1) запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 4K_1 v\dot{x}_2 - 2K_1\dot{v}x_2 + (\omega_0^2 - K_0 v^2)x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 4K_1 v\dot{x}_1 + 2K_1\dot{v}x_1 + (\omega_0^2 - K_0 v^2)x_2 = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Далее мы будем рассматривать только такие функции $v(t)$, чтобы для некоторого $\delta > 0$ и всех $t \geqslant 0$ было выполнено неравенство

$$\omega_0^2 - K_0 v^2(t) \geqslant \delta^2. \tag{1.3}$$

Перейдем от системы (1.2) к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка. С этой целью введем в рассмотрение вектор $y = \operatorname{col}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, где

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \dot{x}_1, \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = \dot{x}_2, \tag{1.4}$$

и матричную функцию

$$v \to A(v) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a(v) & 0 & \vartheta(\dot{v}) & 2\vartheta(v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\vartheta(\dot{v}) & -2\vartheta(v) & a(v) & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1.5}$$

где $\vartheta(v) = 2K_1 v$, $a(v) = K_0 v^2 - \omega_0^2$. Тогда легко проверить, что для каждой дифференцируемой функции $v(t)$ система (1.2) эквивалентна системе уравнений

$$\dot{y} = A(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^4, \quad \text{где} \quad A(t) \doteq A\big(v(t)\big), \tag{1.6}$$

и эта эквивалентность устанавливается равенствами (1.4).

Построим инвариантные множества системы (1.6). Напомним, что множество $Q(t)$, расположенное при каждом $t \geqslant 0$ в пространстве $\mathbb{R}^4$, называется *положительно инвариантным* (мы будем говорить *инвариантным*), если для любого решения $y(t)$ системы (1.6) из включения $y(0) \in Q(0)$ следует для всех $t \geqslant 0$ включение $y(t) \in Q(t)$.

Рассмотрим функциональную матрицу

$$v \to L(v) = \begin{Vmatrix} \omega(v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega(v) & 0 \\ 0 & 1 & -\vartheta(v) & 0 \\ \vartheta(v) & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.7}$$

Тогда $\det L(v) = -\omega^2(v) \leqslant -\delta^2$ $\bigl($см. (1.3)$\bigr)$,

$$L^{-1}(v) = \omega^{-1}(v) \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta(v) & \omega(v) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\vartheta(v) & 0 & 0 & \omega(v) \end{Vmatrix} \quad \text{и}$$

$$\dot{L}(v) = \begin{Vmatrix} \dot{\omega}(v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\omega}(v) & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta(\dot{v}) & 0 \\ \vartheta(\dot{v}) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\dot{\omega}(v) = \dfrac{d\omega(v)}{dt} = -K_1 \dfrac{v\dot{v}}{\omega(v)}$. Таким образом, если функция $v(t)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$ вместе с производной, то функция $L(t) \doteq L\bigl(v(t)\bigr)$ является ляпуновским преобразованием. Отметим далее, что преобразование $z = L(t)y$ приводит систему (1.6) к системе

$$\dot{z} = F(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^4, \quad \text{где} \quad F(t) \doteq F\bigl(v(t)\bigr), \tag{1.8}$$

$$F(v) \doteq \bigl(\dot{L}(v) + L(v)A(v)\bigr)L^{-1}(v) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\dot{\omega}(v)}{\omega(v)} & \vartheta(v) & \omega(v) & 0 \\ -\vartheta(v) & \dfrac{\dot{\omega}(v)}{\omega(v)} & 0 & \omega(v) \\ -\omega(v) & 0 & 0 & \vartheta(v) \\ 0 & -\omega(v) & -\vartheta(v) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Так как

$$F(v) + F^*(v) = 2\frac{\dot{\omega}(v)}{\omega(v)} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

то для всякого решения $z(t)$ системы (1.8) имеем

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = \frac{d}{dt}\big(z^*(t)z(t)\big) = 2z^*(t)\dot z(t) = 2z^*(t)F(t)z(t) = \\ = z^*(t)\big(F(t)+F^*(t)\big)z(t) = 2\frac{\dot\omega(v)}{\omega(v)}\big(z_1^2(t)+z_2^2(t)\big) \quad (1.9)$$

(звезда означает операцию транспонирования, $|z|^2 = z_1^2 + \ldots + z_4^2$). Из равенств (1.9) следует, что

$$\omega(t)|z(t)|^2 = \omega(0)|z(0)|^2 + \int_0^t \big(z_3^2(s)+z_4^2(s)\big)\dot\omega(s)ds,$$

где $\omega(t) = \omega\big(v(t)\big)$, поэтому *если* $v(t) \equiv \mathrm{const}$, *то для любого* $c \in \mathbb{R}$ *сфера*

$$S_c^3(v) \doteq \Big\{z \in \mathbb{R}^4\colon\ |z|^2 = \frac{c^2}{\omega(v)}\Big\} \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^4$$

является инвариантным множеством системы (1.8).

Кроме того, непосредственной проверкой легко убедиться, что для любого решения $z(t) = \mathrm{col}\big(z_1(t)\ldots z_4(t)\big)$ системы (1.8)

$$\frac{d}{dt}\big(z_1(t)z_4(t) - z_2(t)z_3(t)\big) = \frac{\dot\omega(t)}{\omega(t)}\big(z_1(t)z_4(t) - z_2(t)z_3(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

$$z_1(t)z_4(t) - z_2(t)z_3(t) = \big(z_1(0)z_4(0) - z_2(0)z_3(0)\big)\exp\Big(-\int_0^t \frac{\dot\omega(s)}{\omega(s)}ds\Big) = \\ = \big(z_1(0)z_4(0) - z_2(0)z_3(0)\big)\frac{\omega(0)}{\omega(t)},$$

и, следовательно, *для всякого* $c \in \mathbb{R}$ *поверхность*

$$V_c^3(v) \doteq \{z \in \mathbb{R}^4\colon\ \omega(v)(z_1z_4 - z_2z_3) = c\} \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^4$$

является инвариантным множеством системы (1.8) *в следующем смысле: для любой функции* $v(t)$ (*удовлетворяющей условию* (1.3)) *и любого решения* $z(t)$ *системы* (1.8), *отвечающего функции* $v(t)$, *найдется такое* c, *что* $z(t) \in V_c^3\big(v(t)\big)$.

Многообразие $V_c^3(v)$ можно записать в виде

$$V_c^3(v) = \{z \in \mathbb{R}^4 \colon\ z^* P z = 2c\},$$

$$\text{где}\quad P \doteq \omega(v)\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, *если* $v = \mathrm{const}$, *то всякое* (*т. е. для любых* c_1 *и* c_2) *двумерное многообразие*

$$M^2(v, c_1, c_2) \doteq S^3_{c_1}(v) \bigcap V^3_{c_2}(v)$$

(*вложенное в* $\mathbb{R}^4$) *является инвариантным для системы* (1.8).

Система (1.8) обладает еще одним важным свойством: *если*

$$z(t) = \mathrm{col}\big(z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t)\big)$$

— *решение системы* (1.8), *то* $\widehat{z}(t) = \mathrm{col}\big(z_2(t), -z_1(t), z_4(t), -z_3(t)\big)$ — *тоже решение системы* (1.8), *причем* $z(t)$ *и* $\widehat{z}(t)$ *ортогональны при всех* t. Это свойство можно сформулировать по-другому. Пусть

$$J \doteq \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

тогда $\widehat{z}(t) = Jz(t)$, где $z(t)$ и $\widehat{z}(t)$ имеют прежний смысл. Отметим далее, что $J^{-1} = -J$ и $JF(t)J^{-1} = F(t)$.

Пусть теперь $v(t) = v = \mathrm{const}$, тогда $\vartheta(v) = 2K_1 v = \mathrm{const}$. В этом случае система (1.8) интегрируется. Непосредственной проверкой можно убедиться, что характеристический полином матрицы $F(v)$ имеет вид

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\big(\omega_0^2 + \big(K_0 - 2K_1\big)v^2\big)\lambda^2 + (\omega_0^2 - K_0 v^2)^2, \tag{1.10}$$

поэтому $\lambda^2 = -\big(\omega(v) \pm \vartheta(v)\big)^2$, и поскольку выполнены неравенства

$$\omega(v) > \vartheta(v), \quad \omega(v) > -\vartheta(v),$$

$\big($см. неравенство (1.3)$\big)$, то корни полинома (1.10) определяются равенствами

$$\lambda_1 = \big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)i, \quad \lambda_2 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)i,$$
$$\lambda_3 = \big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)i, \quad \lambda_4 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)i, \quad i^2 = 1. \qquad (1.11)$$

Далее, если $h = p + iq$, где $p, q \in \mathbb{R}^4$ — собственный вектор, отвечающий первому или третьему собственному значению, то векторы p и q находятся из систем уравнений

$$\begin{cases} \vartheta(v)p_2 + \omega(v)p_3 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)q_1, \\ -\vartheta(v)q_2 - \omega(v)q_3 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)p_1, \\ -\vartheta(v)p_1 + \omega(v)p_4 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)q_2, \\ \vartheta(v)q_1 - \omega(v)q_4 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)p_2, \\ -\omega(v)p_1 + \vartheta(v)p_4 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)q_3, \\ \omega(v)q_1 - \vartheta(v)q_4 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)p_3, \\ -\omega(v)p_2 - \vartheta(v)p_3 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)q_4, \\ \omega(v)q_2 + \vartheta(v)q_3 = -\big(\omega(v)+\vartheta(v)\big)p_4\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta(v)p_2 + \omega(v)p_3 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)q_1, \\ -\vartheta(v)q_2 - \omega(v)q_3 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)p_1, \\ -\vartheta(v)p_1 + \omega(v)p_4 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)q_2, \\ \vartheta(v)q_1 - \omega(v)q_4 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)p_2, \\ -\omega(v)p_1 + \vartheta(v)p_4 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)q_3, \\ \omega(v)q_1 - \vartheta(v)q_4 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)p_3, \\ -\omega(v)p_2 - \vartheta(v)p_3 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)q_4, \\ \omega(v)q_2 + \vartheta(v)q_3 = -\big(\omega(v)-\vartheta(v)\big)p_4\,. \end{cases}$$

Решая эти системы, найдем все собственные векторы, отвечающие собственным значениям (1.11) (они не зависят от v):

$$h^1 = \begin{Vmatrix} 1-i \\ -1-i \\ -1-i \\ -1+i \end{Vmatrix}, \; h^2 = \begin{Vmatrix} 1+i \\ -1+i \\ -1+i \\ -1-i \end{Vmatrix}, \; h^3 = \begin{Vmatrix} -1+i \\ 1+i \\ -1-i \\ -1+i \end{Vmatrix}, \; h^4 = \begin{Vmatrix} -1-i \\ 1-i \\ -1+i \\ -1-i \end{Vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Поэтому четыре линейно независимых решения системы (1.8) можно записать в следующем виде $\big($здесь $\nu = \omega(v) + \vartheta(v)$, $\mu = \omega(v) - \vartheta(v)\,\big)$:

$$z^1(t) = \begin{Vmatrix} \cos\nu t - \sin\nu t \\ -\cos\nu t - \sin\nu t \\ -\cos\nu t - \sin\nu t \\ -\cos\nu t + \sin\nu t \end{Vmatrix} = \sqrt{2}\begin{Vmatrix} \sin(\nu t - \pi/4) \\ \sin(\nu t + \pi/4) \\ \sin(\nu t + \pi/4) \\ -\sin(\nu t - \pi/4) \end{Vmatrix},$$

$$z^2(t) = \begin{Vmatrix} \cos\nu t + \sin\nu t \\ \cos\nu t - \sin\nu t \\ \cos\nu t - \sin\nu t \\ -\cos\nu t - \sin\nu t \end{Vmatrix} = \sqrt{2}\begin{Vmatrix} \sin(\nu t + \pi/4) \\ \sin(\nu t - \pi/4) \\ \sin(\nu t - \pi/4) \\ -\sin(\nu t + \pi/4) \end{Vmatrix},$$

$$z^3(t) = \begin{Vmatrix} -\cos\mu t + \sin\mu t \\ \cos\mu t + \sin\mu t \\ -\cos\mu t - \sin\mu t \\ -\cos\mu t + \sin\mu t \end{Vmatrix} = \sqrt{2}\begin{Vmatrix} -\sin(\mu t - \pi/4) \\ \sin(\mu t + \pi/4) \\ -\sin(\mu t + \pi/4) \\ -\sin(\mu t - \pi/4) \end{Vmatrix},$$

$$z^4(t) = \begin{Vmatrix} \cos\mu t + \sin\mu t \\ \cos\mu t - \sin\mu t \\ -\cos\mu t + \sin\mu t \\ \cos\mu t + \sin\mu t \end{Vmatrix} = \sqrt{2}\begin{Vmatrix} \sin(\mu t + \pi/4) \\ \sin(\mu t - \pi/4) \\ -\sin(\mu t - \pi/4) \\ \sin(\mu t + \pi/4) \end{Vmatrix}.$$

Учитывая теперь, что $y(t) = L^{-1}(v)z(t)$ — решение системы (1.6), а решения системы (1.6) связаны с решениями системы уравнений (1.2) равенствами (1.4), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Общее решение системы уравнений* (1.2) *определяется равенствами*

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1\cos\nu t + a_2\sin\nu t + a_3\cos\mu t + a_4\sin\mu t, \\ x_2(t) = a_2\cos\nu t - a_1\sin\nu t - a_4\cos\mu t + a_3\sin\mu t, \end{cases} \tag{1.13}$$

где $\nu = \omega(v) + 2K_1 v$, $\mu = \omega(v) - 2K_1 v$, a_1, a_2, a_3, a_4 — *произвольные постоянные. Решение* (1.13) *можно записать в виде*

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\sin(\nu t + \varphi_1) + A_2\sin(\mu t + \varphi_2), \\ x_2(t) = A_1\sin(\nu t - \varphi_1) + A_2\sin(\mu t - \varphi_2), \end{cases} \tag{1.14}$$

где A_1, A_2, φ_1, φ_2 — *постоянные,* $A_k \geqslant 0$, $\varphi_k \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Пусть теперь $v(t)$ — произвольная функция. Возвращаясь к исходной системе (1.6), из (1.9) получим следующие утверждения:

1) *для всякого* $c \in \mathbb{R}$ *и любого решения* $y(t)$ *системы* (1.6) *с начальным условием* $y(0) \in \mathcal{V}_c^3(0)$, *где*

$$\mathcal{V}_c^3(t) \doteq \{y \in \mathbb{R}^4 \colon\ y^* S(t) y = 2c\}, \quad S(t) = S\bigl(v(t)\bigr),$$

$$S(v) \doteq L^*(v) P L(v) = \omega^2(v) \begin{Vmatrix} 2\vartheta(v) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\vartheta(v) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

для всех t *имеет место включение*

$$y(t) \in \mathcal{V}_c^3(t) \doteq \{y \in \mathbb{R}^4 \colon\ y^* S(t) y = 2c\};$$

2) *для любой непрерывно дифференцируемой функции* $t \to v(t)$ *и каждого решения* $y(t)$ *системы* (1.6) *имеет место равенство*

$$\omega(t) y^*(t) Q(t) y(t) = \omega(0) y^*(0) Q(0) y(0) + \int_0^t y^*(s) Q^0(s) y(s) d\omega(s),$$

$$Q(v) \doteq L^*(v) L(v) = \begin{Vmatrix} \omega^2(v) + \vartheta^2(v) & 0 & 0 & \vartheta(v) \\ 0 & 1 & -\vartheta(v) & 0 \\ 0 & -\vartheta(v) & \omega^2(v) + \vartheta^2(v) & 0 \\ \vartheta(v) & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$Q^0(v) \doteq \begin{Vmatrix} \vartheta^2(v) & 0 & 0 & \vartheta(v) \\ 0 & 1 & -\vartheta(v) & 0 \\ 0 & -\vartheta(v) & \vartheta^2(v) & 0 \\ \vartheta(v) & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

где $Q(t) \doteq Q\bigl(v(t)\bigr)$, $Q^0(t) \doteq Q^0\bigl(v(t)\bigr)$.

Далее, пусть $y(t)$ — произвольное решение системы (1.6), тогда $\widehat{y}(t) = G(t) y(t)$, где $G(t) \doteq G\bigl(v(t)\bigr)$, $G(v) \doteq L^{-1}(v) J L(v)$, тоже решение системы (1.6). Так как

$$G(v) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\vartheta(v) & 0 \end{Vmatrix},$$

то из сказанного следует:

3) *если* $y(t) = \mathrm{col}\bigl(y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)\bigr)$ *— произвольное решение системы* (1.6), *то* $\widehat{y}\,(t) = \mathrm{col}\bigl(y_3(t), y_4(t), -y_1(t), -y_2(t) - \vartheta(t) y_3\bigr)$ *— тоже решение системы* (1.6) *и* $2\widehat{y}^{\,*}(t) y(t) = -\vartheta(t) y_3(t) y_4(t)$.

§ 2. Модель ТВГ с учетом потерь на трение

С учетом внутренних потерь динамика ТВГ описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\alpha\dot{x}_1 - 4K_1 v\dot{x}_2 - 2K_1\dot{v}x_2 + (\omega_0^2 - K_0 v^2)x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\alpha\dot{x}_2 + 4K_1 v\dot{x}_1 + 2K_1\dot{v}x_1 + (\omega_0^2 - K_0 v^2)x_2 = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где коэффициент затухания $\alpha > 0$ (он мал и в первом приближении им можно пренебречь).

Рассмотрим сначала случай $v = \mathrm{const}$. Будем искать решение системы (2.1) в виде

$$x_1(t) = w_1(t)\exp(-\alpha t), \quad x_2(t) = w_2(t)\exp(-\alpha t). \tag{2.2}$$

Тогда пара $w_1(t)$, $w_2(t)$ должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \ddot{w}_1 - 2\vartheta\dot{w}_2 + 2\alpha\vartheta w_2 + (\omega_\alpha^2 - \vartheta^2)w_1 = 0, \\ \ddot{w}_2 + 2\vartheta\dot{w}_1 - 2\alpha\vartheta w_1 + (\omega_\alpha^2 - \vartheta^2)w_2 = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\vartheta = 2K_1 v$, $\omega_\alpha^2 = \omega^2(v) - \alpha^2$ (для сокращения записи мы не будем подчеркивать, что ϑ и ω_α зависят от v, отметим еще, что $\omega_\alpha^2 > 0$, так как α близко к нулю). Характеристический полином, отвечающий системе (2.3), имеет вид

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\left(\omega_\alpha^2 + \vartheta^2\right)\lambda^2 - 8\alpha\vartheta^2\lambda + (\omega_\alpha^2 - \vartheta^2)^2 + 4\vartheta^2\alpha^2. \tag{2.4}$$

Корни этого полинома (полученного с помощью пакета Maple) найти не удается. Далее, Maple выражает общее решение системы (2.3) через корни λ_k полинома (2.4) в следующем виде:

$$\begin{cases} w_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t}, \\ w_2(t) = \dfrac{1}{2\vartheta\,(K_0 v^2 - \omega_0^2)}\Big(\alpha(\omega_\alpha^2 - 5\vartheta^2)w_1(t) + \\ + \sum\limits_{k=1}^{4} c_k\lambda_k[\lambda_k^2 + \alpha\lambda_k + \omega_\alpha^2 + 3\vartheta^2]e^{\lambda_k t}\Big). \end{cases} \tag{2.5}$$

Но корни полинома $p(\lambda)$ можно разложить в ряды по степеням α :

$$\begin{cases} \lambda_1(\alpha) = -\dfrac{\alpha\vartheta}{\omega_\alpha} + \dfrac{\alpha^3\vartheta^3}{2\omega_\alpha^5} + \Big(\vartheta + \omega_\alpha + \dfrac{\alpha^2\vartheta^2}{2\omega_\alpha^3} - \dfrac{5\alpha^4\vartheta^4}{8\omega_\alpha^7}\Big)i + o(\alpha^4), \\ \lambda_2(\alpha) = -\dfrac{\alpha\vartheta}{\omega_\alpha} + \dfrac{\alpha^3\vartheta^3}{2\omega_\alpha^5} - \Big(\vartheta + \omega_\alpha + \dfrac{\alpha^2\vartheta^2}{2\omega_\alpha^3} - \dfrac{5\alpha^4\vartheta^4}{8\omega_\alpha^7}\Big)i + o(\alpha^4), \\ \lambda_3(\alpha) = +\dfrac{\alpha\vartheta}{\omega_\alpha} - \dfrac{\alpha^3\vartheta^3}{2\omega_\alpha^5} + \Big(\vartheta - \omega_\alpha - \dfrac{\alpha^2\vartheta^2}{2\omega_\alpha^3} + \dfrac{5\alpha^4\vartheta^4}{8\omega_\alpha^7}\Big)i + o(\alpha^4), \\ \lambda_4(\alpha) = +\dfrac{\alpha\vartheta}{\omega_\alpha} - \dfrac{\alpha^3\vartheta^3}{2\omega_\alpha^5} - \Big(\vartheta - \omega_\alpha - \dfrac{\alpha^2\vartheta^2}{2\omega_\alpha^3} + \dfrac{5\alpha^4\vartheta^4}{8\omega_\alpha^7}\Big)i + o(\alpha^4). \end{cases} \tag{2.6}$$

Теорема 2. *Пусть* $\omega_\alpha = \sqrt{\omega^2(v) - \alpha^2}$, $\vartheta = 2K_1 v$,

$$\nu_\alpha = \sqrt{\omega^2(v) - \alpha^2} + 2K_1 v, \quad \mu_\alpha = \sqrt{\omega^2(v) - \alpha^2} - 2K_1 v.$$

Тогда общее решение системы (2.3) *можно записать при помощи рядов по степеням параметра* α *в следующем виде:*

$$\begin{cases} w_1(t) = c_1 w_{11}(t) + c_2 w_{12}(t) + c_3 w_{13} + c_4 w_{14}(t), \\ w_2(t) = c_1 w_{13}(t) + c_2 w_{14}(t) - c_3 w_{11}(t) - c_4 w_{12}(t), \end{cases} \tag{2.7}$$

где обозначены:

$$w_{11}(t) = \cos\nu_\alpha t - \frac{\alpha\vartheta t\cos\nu_\alpha t}{\omega_\alpha} + \frac{\alpha^2\vartheta^2 t(\omega_\alpha t\cos\nu_\alpha t - \sin\nu_\alpha t)}{2\omega_\alpha^3} -$$
$$- \frac{\alpha^3\vartheta^3 t(\omega_\alpha^2 t^2\cos\nu_\alpha t - 3\omega_\alpha t\sin\nu_\alpha t - 3\cos\nu_\alpha t)}{6\omega_\alpha^5} +$$
$$\frac{\alpha^4\vartheta^4 t(-15\omega_\alpha t\cos\nu_\alpha t + 15\sin\nu_\alpha t - 6\omega_\alpha^2 t^2\sin\nu_\alpha t + \omega_\alpha^3 t^3\cos\nu_\alpha t)}{24\omega_\alpha^7} + o(\alpha^4),$$

$$w_{12}(t) = \cos\mu_\alpha t + \frac{\alpha\vartheta t\cos\mu_\alpha t}{\omega_\alpha} + \frac{\alpha^2\vartheta^2 t(\omega_\alpha t\cos\mu_\alpha t - \sin\mu_\alpha t)}{2\omega_\alpha^3} +$$
$$+ \frac{\alpha^3\vartheta^3 t(\omega_\alpha^2 t^2\cos\mu_\alpha t - 3\omega_\alpha t\sin\mu_\alpha t - 3\cos\mu_\alpha t)}{6\omega_\alpha^5} +$$
$$\frac{\alpha^4\vartheta^4 t(-15\omega_\alpha t\cos\mu_\alpha t + 15\sin\mu_\alpha t - 6\omega_\alpha^2 t^2\sin\mu_\alpha t + \omega_\alpha^3 t^3\cos\mu_\alpha t)}{24\omega_\alpha^7} + o(\alpha^4),$$

$$w_{13}(t) = -\sin\nu_\alpha t + \frac{\alpha\vartheta t\sin\nu_\alpha t}{\omega_\alpha} - \frac{\alpha^2\vartheta^2 t(\omega_\alpha t\sin\nu_\alpha t + \cos\nu_\alpha t)}{2\omega_\alpha^3} + \\ + \frac{\alpha^3\vartheta^3 t(\omega_\alpha^2 t^2\sin\nu_\alpha t + 3\omega_\alpha t\cos\nu_\alpha t - 3\sin\nu_\alpha t)}{6\omega_\alpha^5} + \\ \frac{\alpha^4\vartheta^4 t(15\omega_\alpha t\sin\nu_\alpha t + 15\cos\nu_\alpha t - 6\omega_\alpha^2 t^2\cos\nu_\alpha t - \omega_\alpha^3 t^3\sin\nu_\alpha t)}{24\omega_\alpha^7} + o(\alpha^4),$$

$$w_{14}(t) = \sin\mu_\alpha t + \frac{\alpha\vartheta t\sin\mu_\alpha t}{\omega_\alpha} + \frac{\alpha^2\vartheta^2 t(\omega_\alpha t\sin\mu_\alpha t + \cos\mu_\alpha t)}{2\omega_\alpha^3} + \\ + \frac{\alpha^3\vartheta^3 t(\omega_\alpha^2 t^2\sin\mu_\alpha t + 3\omega_\alpha t\cos\mu_\alpha t - 3\sin\mu_\alpha t)}{6\omega_\alpha^5} - \\ \frac{\alpha^4\vartheta^4 t(15\omega_\alpha t\sin\mu_\alpha t + 15\cos\mu_\alpha t - 6\omega_\alpha^2 t^2\cos\mu_\alpha t - \omega_\alpha^3 t^3\sin\mu_\alpha t)}{24\omega_\alpha^7} + o(\alpha^4).$$

§ 3. Стабилизация стоячей волны

Рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\alpha(1+2\Delta\alpha)\dot{x}_1 - 4K_1(1-2\Delta K)v\dot{x}_2 - 2K_1(1-4\Delta K)\dot{v}x_2 \\ +(\omega_0^2 - K_0v^2)(1+2\Delta\omega)x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\alpha(1-2\Delta\alpha)\dot{x}_2 + 4K_1(1+2\Delta K)v\dot{x}_1 + 2K_1(1+4\Delta K)\dot{v}x_1 \\ +(\omega_0^2 - K_0v^2)(1-2\Delta\omega)x_2 = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $K_0 = K_1 + 4K_1^2$, α — коэффициент затухания, обусловленный внутренними потерями (малая величина), $\Delta\alpha$, ΔK, $\Delta\omega$ — малые величины, возникающие в связи с погрешностями изготовления резонатора. Заметим, что если α, $\Delta\alpha$, ΔK, $\Delta\omega = 0$, то система (3.1) совпадает с идеальной системой.

Пусть $x_1(t) = q_1(\omega_0 t)$, $x_2(t) = q_2(\omega_0 t)$, тогда

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\alpha(1+2\Delta\alpha)\dfrac{1}{\omega_0}\dot{q}_1 - 4K_1(1-2\Delta K)\dfrac{v}{\omega_0}\dot{q}_2 - \\ -2K_1(1-4\Delta K)\dfrac{\dot{v}}{\omega_0^2}q_2 + \Big(1 - \dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}\Big)(1+2\Delta\omega)q_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + 2\alpha(1-2\Delta\alpha)\dfrac{1}{\omega_0}\dot{q}_2 + 4K_1(1+2\Delta K)\dfrac{v}{\omega_0}\dot{q}_1 + \\ +2K_1(1+4\Delta K)\dfrac{\dot{v}}{\omega_0^2}q_1 + \Big(1 - \dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}\Big)(1-2\Delta\omega)q_2 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Перенесем малые величины в правую часть

$$
\begin{cases}
\ddot q_1 + q_1 = -2\alpha(1+2\Delta\alpha)\dfrac{1}{\omega_0}\dot q_1 + 4K_1(1-2\Delta K)\dfrac{v}{\omega_0}\dot q_2 + \\
+2K_1(1-4\Delta K)\dfrac{\dot v}{\omega_0^2}q_2 - 2\Delta\omega\Big(1-\dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}\Big)q_1 + \dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}q_1, \\
\ddot q_2 + q_2 = -2\alpha(1-2\Delta\alpha)\dfrac{1}{\omega_0}\dot q_2 - 4K_1(1+2\Delta K)\dfrac{v}{\omega_0}\dot q_1 - \\
2K_1(1+4\Delta K)\dfrac{\dot v}{\omega_0^2}q_1 + 2\Delta\omega\Big(1-\dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}\Big)q_2 + \dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}q_1.
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

Обозначим $q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix}$. Система (3.3) перепишется в векторном виде

$$
\begin{Vmatrix} \ddot q_1 \\ \ddot q_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{2\alpha}{\omega_0} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\alpha}{\omega_0} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -\dfrac{4\alpha\Delta\alpha}{\omega_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{4\alpha\Delta\alpha}{\omega_0} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{Vmatrix} +
$$

$$
\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{4K_1v}{\omega_0} \\ -\dfrac{4K_1v}{\omega_0} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -\dfrac{8K_1\Delta Kv}{\omega_0} \\ -\dfrac{8K_1\Delta Kv}{\omega_0} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{Vmatrix} +
$$
$$
\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{2K_1\dot v}{\omega_0^2} \\ -\dfrac{2K_1\dot v}{\omega_0^2} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -\dfrac{8K_1\Delta K\dot v}{\omega_0^2} \\ -\dfrac{8K_1\Delta K\dot v}{\omega_0^2} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} +
$$
$$
\begin{Vmatrix} -2\Delta\omega\Big(1-\dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}\Big) & 0 \\ 0 & 2\Delta\omega\Big(1-\dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2}\Big) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_0v^2}{\omega_0^2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix}.
$$

Это система с малым параметром. В качестве параметра ε можно взять какую-нибудь малую величину, исходя из физического смысла. Перепишем эту систему в матричном виде

$$
\ddot q + q = \varepsilon\Big((K+L+M+N)\dot q + (P+R+S+T)q\Big). \tag{3.4}
$$

Здесь

$$K = \begin{Vmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{Vmatrix},\ \varepsilon k = \frac{2\alpha}{\omega_0}, \quad L = \begin{Vmatrix} -l & 0 \\ 0 & l \end{Vmatrix},\ \varepsilon l = \frac{4\alpha\Delta\alpha}{\omega_0},$$
$$M = \begin{Vmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{Vmatrix},\ \varepsilon m = \frac{4K_1 v}{\omega_0}, \quad N = \begin{Vmatrix} 0 & -n \\ -n & 0 \end{Vmatrix},\ \varepsilon n = \frac{8K_1\Delta K v}{\omega_0},$$
$$P = \begin{Vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{Vmatrix},\ \varepsilon p = \frac{2K_1 \dot v}{\omega_0^2}, \quad R = \begin{Vmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{Vmatrix},\ \varepsilon r = \frac{8K_1\Delta K \dot v}{\omega_0^2},$$
$$S = \begin{Vmatrix} -s & 0 \\ 0 & s \end{Vmatrix},\ \varepsilon s = 2\Delta\omega\Big(\frac{\omega_0^2 - K_0 v^2}{\omega_0^2}\Big), \quad T = \begin{Vmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{Vmatrix},\ \varepsilon \tau = \frac{K_0 v^2}{\omega_0^2}.$$

Параметры этой системы зависят от времени. Выполним в системе (3.4) замену переменных $(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) \to (y_1, y_2, y_3, y_4)$ по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= y_1 \cos t + y_3 \sin t, & q_2 &= y_2 \cos t + y_4 \sin t, \\ \dot q_1 &= -y_1 \sin t + y_3 \cos t, & \dot q_2 &= -y_2 \sin t + y_4 \cos t \end{aligned} \tag{3.5}$$

и произведем осреднение по явно входящему времени. Система (3.4) перейдет в автономную систему

$$\dot y = \varepsilon Y(y). \tag{3.6}$$

В координатах эта система имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \\ \dot y_3 \\ \dot y_4 \end{Vmatrix} = \varepsilon \left((-k) \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix} + l \begin{Vmatrix} -y_1 \\ y_2 \\ -y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix} + m \begin{Vmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ y_4 \\ -y_3 \end{Vmatrix} + (-n) \begin{Vmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_4 \\ y_3 \end{Vmatrix} + \right.$$
$$\left. + p \begin{Vmatrix} -y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ -y_1 \end{Vmatrix} + r \begin{Vmatrix} y_4 \\ y_3 \\ -y_2 \\ -y_1 \end{Vmatrix} + s \begin{Vmatrix} y_3 \\ -y_4 \\ -y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix} + \tau \begin{Vmatrix} -y_3 \\ -y_4 \\ y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix} \right).$$

Параметры системы (3.6) — это некоторые константы; в них переходят соответствующие параметры (обозначенные теми же буквами) системы (3.4) после осреднения.

Если возмущения отсутствуют, то есть $\varepsilon = 0$, то $y \equiv \text{const}$ и в пространстве (q_1, q_2) уравнения (3.5) определяют эллипс. Каждой точке $y \in \mathbb{R}^4$ отвечает эллиптическая траектория в пространстве

(q_1, q_2) и, наоборот, каждой эллиптической траектории в пространстве q соответствует неподвижная точка в пространстве y. Среди эллиптических траекторий есть вырожденные. Когда эллипс вырождается в отрезок прямой, решение определяет стоячую волну. В этом случае y удовлетворяет условию $V = 0$, где $V = y_1y_4 - y_2y_3$. Условие $V = 0$ задает конус в пространстве y.

Пусть $\varepsilon \neq 0$. Тогда $y \not\equiv \mathrm{const}$ и точка $y(t)$ медленно движется в пространстве y. Соответствующий отрезок (отвечающий стоячей волне) в пространстве (q_1, q_2) претерпевает изменения под действием возмущений. Можно выяснить, как возмущения в правой части системы (3.4) влияют на поведение формы, и найти базис инфинитезимальных эволюций. Этот базис состоит из таких векторов, в направлении которых происходит та или иная эволюция. Он найден в работе [9, с.13]:

$$\begin{aligned} &e_1 = \mathrm{col}(y_4, -y_3, -y_2, y_1), \qquad e_2 = \mathrm{col}(y_2, -y_1, y_4, -y_3), \\ &e_3 = \mathrm{col}(y_3, y_4, -y_1, -y_2), \qquad e_4 = \mathrm{col}(y_1, y_2, y_3, y_4). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь e_4 определяет изменение амплитуды колебаний, когда изменяется только длина отрезка; e_3 — изменение частоты колебаний $q(t)$ вдоль неподвижного отрезка; e_2 — прецессию формы — медленное вращение отрезка в плоскости q, когда существует такая вращающаяся система кооординат, в которой отрезок неподвижен; e_1 определяет разрушение формы — это эволюция, которая не сводится к трем упомянутым.

Теперь для того, чтобы выяснить, как влияют коэффициенты системы (3.4) на поведение формы, достаточно спроектировать соответствующие векторы в правой части системы (3.6) на векторы базиса (3.7). Так, например, матрицы M и T (а на конусе $V = 0$ также и матрица K) системы (3.4) никак не влияют на разрушение стоячей волны, поскольку соответствующие векторы правой части системы (3.6) ортогональны вектору e_1. Тем не менее в системе (3.4) стоячая волна является неустойчивой при постоянно действующих воздействиях. Возникает вопрос: каким образом следует построить обратную связь, чтобы прямолинейная форма колебаний в системе (3.4) была устойчивой? В работе [9] предложено следующее решение этой задачи.

Введем управление $U(y) = e_1V + e_4W$, где $V = y_1y_4 - y_2y_3$, $W = \dfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1)$, и построим обратную связь в системе

(3.6). Получим систему

$$\dot{y} = \varepsilon Y(y) - \varepsilon U(y). \tag{3.8}$$

Наряду с системой (3.8) рассмотрим систему без возмущений

$$\dot{y} = -\varepsilon U(y). \tag{3.9}$$

Система (3.9) в координатной форме имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\varepsilon\Big(y_4(y_1y_4 - y_2y_3) + \frac{1}{2}y_1(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1)\Big),\\
\dot{y}_2 &= -\varepsilon\Big(-y_3(y_1y_4 - y_2y_3) + \frac{1}{2}y_2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1)\Big),\\
\dot{y}_3 &= -\varepsilon\Big(-y_2(y_1y_4 - y_2y_3) + \frac{1}{2}y_3(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1)\Big),\\
\dot{y}_4 &= -\varepsilon\Big(y_1(y_1y_4 - y_2y_3) + \frac{1}{2}y_4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1)\Big).
\end{aligned}$$

Если y принадлежит конусу $V = 0$ и сфере единичного радиуса $W = 0$, то $U(y) = 0$. Таким образом, многообразие $(V = 0) \cap (W = 0)$ является многообразием точек покоя системы (3.9). Обратная связь e_1V должна приводить фазовую точку на конус $V = 0$, а обратная связь e_4W стабилизирует амплитуду. Если в системе (3.9) многообразие $(V = 0) \cap (W = 0)$ окажется асимптотически устойчивым, то оно будет устойчивым и для системы с возмущениями (3.8). Таким образом, обратная связь $U(y)$ в системе (3.6) будет стабилизировать стоячую волну. В терминах системы (3.4) это означает, что нужно построить управление в системе (3.4) в виде $-\varepsilon\big(u_1 \begin{Vmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Vmatrix} + u_2 \begin{Vmatrix}q_2\\ -q_1\end{Vmatrix}\big)$, причем выбрать числа u_1 и u_2 пропорциональными V и W.

§ 4. Идентификация погрешностей изготовления

В этом параграфе мы исследуем вопрос об идентификации параметров ТВГ (см. также [10]). Рассмотрим систему

$$\begin{cases}
\ddot{x}_1 + 2\alpha(1+2\Delta\alpha)\dot{x}_1 - 4K_1(1-2\Delta K)v\dot{x}_2 - 2K_1(1-4\Delta K)\dot{v}x_2\\
+(\omega_0^2 - K_0v^2)(1 + 2\Delta\omega)x_1 = K_{10}v^2 + hK_{20}\dot{v}+\\
+2\varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{11})x_1u_{11} + 2\varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{12})x_2u_{12},\\
\ddot{x}_2 + 2\alpha(1-2\Delta\alpha)\dot{x}_2 + 4K_1(1+2\Delta K)v\dot{x}_1 + 2K_1(1+4\Delta K)\dot{v}x_1\\
+(\omega_0^2 - K_0v^2)(1 - 2\Delta\omega)x_2 = K_{20}v^2 - hK_{10}\dot{v}+\\
+2\varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{21})x_1u_{21} + 2\varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{22})x_2u_{22},
\end{cases} \tag{4.1}$$

где константы K_0, K_1, ω_0, h, ε нам известны точно, а функцию $t \to v(t)$ и управления $u_{ij} = u_{ij}(t)$ мы можем выбирать по своему усмотрению. Таким образом, функция $t \to v(t)$ и управления $u_{ij}(t)$, играют роль входных параметров. Наблюдению доступны

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cos 2\varphi + x_2(t)\sin 2\varphi, \\ y_2(t) = -x_1(t)\sin 2\varphi + x_2(t)\cos 2\varphi, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} x_1(t) = x_1\big(t, v(\cdot), u_{11}(\cdot), \ldots, u_{22}(\cdot)\big), \\ x_2(t) = x_2\big(t, v(\cdot), u_{11}(\cdot), \ldots, u_{22}(\cdot)\big) \end{cases}$$

— решения системы (4.1), отвечающие заданным входным параметрам $v(\cdot), u_{11}(\cdot), \ldots, u_{22}(\cdot)$ (начальные условия для решения системы (4.1) тоже неизвестны), φ — неизвестный постоянный угол.

Для того чтобы эффективно управлять системой (4.1), нам по результатам наблюдений (4.2) требуется восстановить следующие неизвестные параметры:

$$\varphi, \quad \alpha, \quad \Delta\alpha, \quad \Delta K, \quad \Delta\omega, \quad K_{10}, \quad K_{20}, \quad \delta_{11}, \quad \delta_{12}, \quad \delta_{21}, \quad \delta_{22}, \tag{4.3}$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} \delta_{11} = \varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{11}), & \delta_{12} = \varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{12}), \\ \delta_{21} = \varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{21}), & \delta_{22} = \varepsilon(1 + 2\Delta\varepsilon_{22}), \end{cases} \tag{4.4}$$

возникновение которых в системе (4.1) связано с внутренними потерями и погрешностями изготовления резонатора.

Из равенств (4.2) следуют равенства

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t)\cos 2\varphi - y_2(t)\sin 2\varphi, \\ x_2(t) = y_1(t)\sin 2\varphi + y_2(t)\cos 2\varphi, \end{cases} \tag{4.5}$$

которые для нас в дальнейшем будут основными. Процесс идентификации разобьем на несколько подпроцессов, в результате которых мы будем последовательно находить параметры (4.3).

0. Пусть сначала $v = u_{11} = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$. Тогда система (4.1) перепишется в следующем простом виде:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\alpha(1 + 2\Delta\alpha)\dot{x}_1 + \omega_0^2(1 + 2\Delta\omega)x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\alpha(1 - 2\Delta\alpha)\dot{x}_2 + \omega_0^2(1 - 2\Delta\omega)x_2 = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Эта система содержит неизвестные параметры $\alpha, \Delta\alpha$ и $\Delta\omega$. Так как общее решение системы (4.6) представимо в виде

$$\begin{cases} x_1(t) = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1 \cos\gamma_1 t + B_1 \sin\gamma_1 t\Big), \\ x_2(t) = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2 \cos\gamma_2 t + B_2 \sin\gamma_2 t\Big), \end{cases} \tag{4.7}$$

где $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ — произвольные постоянные,

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha(1+2\Delta\alpha), & \beta_2 = \alpha(1-2\Delta\alpha), \\ \gamma_1 = \sqrt{\omega_0^2(1+2\Delta\omega)-\beta_1^2}, & \gamma_2 = \sqrt{\omega_0^2(1-2\Delta\omega)-\beta_2^2}, \end{cases} \tag{4.8}$$

то, учитывая равенства (4.5), при каждом $t \geqslant 0$ получим систему пяти уравнений

$$\begin{cases} y_{01}(t)a - y_{02}(t)b = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1 \cos\gamma_1 t + B_1 \sin\gamma_1 t\Big), \\ y_{01}(t)b + y_{02}(t)a = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2 \cos\gamma_2 t + B_2 \sin\gamma_2 t\Big), \\ y_{01}(0)a - y_{02}(0)b = A_1, \\ y_{01}(0)b + y_{02}(0)a = A_2, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \tag{4.9}$$

относительно десяти неизвестных

$$a = \cos 2\varphi,\ b = \sin 2\varphi,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2. \tag{4.10}$$

Отметим, что наблюдаемые параметры $y_{01}(t),\ y_{02}(t)$ в системе (4.9) отмечены двумя индексами, где индекс 0 подчеркивает, что они отвечают подпроцессу **0**. Аналогичным образом мы будем нумеровать наблюдаемые параметры и далее.

Если будут найдены параметры (4.10), то в силу соотношений (4.8) несложно будет найти и интересующие нас неизвестные параметры $\varphi,\ \alpha,\ \Delta\alpha$ и $\Delta\omega$.

Для решения системы (4.9) можно поступить следующим образом. Зафиксируем конечное число точек $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Тогда получим равенства

$$\begin{cases} y_{01}(t_k)a - y_{02}(t_k)b = \\ = \exp(-\beta_1 t_k)\Big([y_{01}(0)a - y_{02}(0)b] \cos\gamma_1 t_k + B_1 \sin\gamma_1 t_k\Big), \\ y_{01}(t_k)b + y_{02}(t_k)a = \\ = \exp(-\beta_2 t_k)\Big([y_{01}(0)b + y_{02}(0)a] \cos\gamma_2 t_k + B_2 \sin\gamma_2 t_k\Big), \\ a^2 + b^2 = 1, \qquad\qquad k = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{4.11}$$

которые можно рассматривать как уравнения, недостающие для нахождения искомых параметров (4.10). Таких уравнений можно выписать достаточно много, и тогда мы получим избыточную систему уравнений. Поэтому в качестве искомого результата можно взять усредненные значения решений

$$a_k, \quad b_k, \quad B_{1k}, \quad B_{2k}, \quad \beta_{1k}, \quad \beta_{2k}, \quad \gamma_{1k}, \quad \gamma_{2k}, \quad k=1,\ldots,m$$

системы уравнений (4.11).

1. Таким образом, мы считаем, что параметры φ, α, $\Delta\alpha$ и $\Delta\omega$ найдены с достаточной степенью точности. Пусть теперь $v=0$, $u_{11}=1$, $u_{12}=u_{21}=u_{22}=0$, тогда система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\beta_1\dot{x}_1 + (\gamma_1^2+\beta_1^2-2\delta_{11})x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\beta_2\dot{x}_2 + (\gamma_2^2+\beta_2^2)x_2 = 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

а общее решение системы (4.12) определяется равенствами

$$\begin{cases} x_1(t) = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1\cos\gamma_{11}t + B_1\sin\gamma_{11}t\Big), \\ x_2(t) = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2\cos\gamma_2 t + B_2\sin\gamma_2 t\Big), \end{cases} \tag{4.13}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные,

$$\gamma_{11} = \sqrt{\gamma_1^2 - 2\delta_{11}}. \tag{4.14}$$

Таким образом, мы имеем два равенства

$$\begin{cases} y_{11}(t)a - y_{12}(t)b = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1\cos\gamma_{11}t + B_1\sin\gamma_{11}t\Big), \\ y_{11}(t)b + y_{12}(t)a = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2\cos\gamma_2 t + B_2\sin\gamma_2 t\Big), \end{cases} \tag{4.15}$$

где $y_{11}(t)$ и $y_{12}(t)$ — наблюдаемые параметры. Систему (4.15) можно рассматривать как систему относительно трех неизвестных γ_{11}, B_1, B_2 (константы $a=\cos 2\varphi$, $b=\sin 2\varphi$, β_1, β_2, γ_2 уже найдены, а константы A_1 и A_2 находятся из равенств

$$A_1 = y_{11}(0)a - y_{12}(0)b, \quad A_2 = y_{11}(0)b + y_{12}(0)a),$$

но фактически, поскольку нас интересует только константа (4.14), достаточно рассматривать только первое уравнение системы (4.15)

$$\begin{aligned} &[y_{11}(t)a - y_{12}(t)b]\exp(\beta_1 t) = \\ &\qquad = [y_{11}(0)a - y_{12}(0)b]\cos\gamma_{11}t + B_1\sin\gamma_{11}t, \end{aligned} \tag{4.16}$$

с двумя неизвестными B_1 и γ_{11} (второе уравнение не содержит γ_{11}). Для нахождения B_1 и γ_{11} мы можем поступить как в предыдущем случае, рассматривая систему

$$\begin{aligned}&[y_{11}(t_k)a - y_{12}(t_k)b]\exp(\beta_1 t_k) = \\ &\quad = [y_{11}(0)a - y_{12}(0)b]\cos\gamma_{11}t_k + B_1\sin\gamma_{11}t_k, \quad k = 1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{4.17}$$

а затем усредняя результат. Построив γ_{11}, найдем $2\delta_{11} = \gamma_1^2 - \gamma_{11}^2$.

2. Положив $v = 0$, $u_{11} = u_{12} = u_{21} = 0$, $u_{22} = 1$, мы получим систему

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\beta_1\dot{x}_1 + (\gamma_1^2 + \beta_1^2)x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\beta_2\dot{x}_2 + \Big(\gamma_2^2 + \beta_2^2 - 2\delta_{22}\Big)x_2 = 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

аналогичную системе (4.12). Поступая как в предыдущем случае, найдем решение

$$\begin{cases} x_1(t) = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1\cos\gamma_1 t + B_1\sin\gamma_1 t\Big), \\ x_2(t) = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2\cos\gamma_{22} t + B_2\sin\gamma_{22} t\Big) \end{cases} \tag{4.19}$$

системы (4.18) и, используя уравнения

$$\begin{cases} y_{21}(t)a - y_{22}(t)b = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1\cos\gamma_1 t + B_1\sin\gamma_1 t\Big), \\ y_{21}(t)b + y_{22}(t)a = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2\cos\gamma_{22} t + B_2\sin\gamma_{22} t\Big), \end{cases} \tag{4.20}$$

величину $2\delta_{22} = \gamma_2^2 - \gamma_{22}^2$.

3. Положим $v = u_{11} = 0$, $u_{12} = 1$, $u_{21} = u_{22} = 0$. Тогда система (4.1) запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\beta_1\dot{x}_1 + (\gamma_1^2 + \beta_1^2)x_1 = 2\delta_{12}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\beta_2\dot{x}_2 + (\gamma_2^2 + \beta_2^2)x_2 = 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Интегрируя второе уравнение системы (4.21), получим

$$x_2(t) = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2\cos\gamma_2 t + B_2\sin\gamma_2 t\Big),$$

где A_2, B_2 — произвольные постоянные. Подставляя $x_2(t)$ в первое уравнение системы (4.21) и подбирая частное решение $v(t)$ первого уравнения в виде $v(t) = \exp(-\beta_2 t)\Big(a\cos\gamma_2 t + b\sin\gamma_2 t\Big)$, где a и b — константы, которые подлежат определению, находим, что

$$a = \frac{2\delta_{12}(\theta A_2 - \vartheta B_2)}{\theta^2 + \vartheta^2}, \quad b = \frac{2\delta_{12}(\vartheta A_2 + \theta B_2)}{\theta^2 + \vartheta^2}, \tag{4.22}$$

$\theta = \beta_2^2 - \gamma_2^2 - 2\beta_1\beta_2 + \gamma_1^2 + \beta_1^2$, $\vartheta = 2\gamma_2(\beta_1 - \beta_2)$. Таким образом, общее решение системы (4.21) представимо в виде

$$\begin{cases} x_1(t) & = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1\cos\gamma_1 t + B_1\sin\gamma_1 t\Big) + \\ & \quad + \exp(-\beta_2 t)\Big(a\cos\gamma_2 t + b\sin\gamma_2 t\Big), \\ x_2(t) & = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2\cos\gamma_2 t + B_2\sin\gamma_2 t\Big), \end{cases} \tag{4.23}$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные, а константы a и b определяются равенствами (4.22). Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} y_{31}(t)a - y_{32}(t)b & = \exp(-\beta_1 t)\Big(A_1\cos\gamma_1 t + B_1\sin\gamma_1 t\Big) + \\ & \quad + \exp(-\beta_2 t)\Big(a\cos\gamma_2 t + b\sin\gamma_2 t\Big), \\ y_{31}(t)b + y_{32}(t)a & = \exp(-\beta_2 t)\Big(A_2\cos\gamma_2 t + B_2\sin\gamma_2 t\Big), \end{cases} \tag{4.24}$$

а неизвестными в этой системе являются A_1, B_1, A_2, B_2 и δ_{12}. Нас же интересует только константа δ_{12}.

4. Аналогичным образом исследуется и ситуация $v = 0$, $u_{11} = 0$, $u_{12} = 0$, $u_{21} = 1$, $u_{22} = 0$. В этом случае система уравнений (4.1) запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\beta_1\dot{x}_1 + (\gamma_1^2 + \beta_1^2)x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\beta_2\dot{x}_2 + (\gamma_2^2 + \beta_2^2)x_2 = 2\delta_{21}x_1. \end{cases} \tag{4.25}$$

Она интегрируется (сверху вниз), а нахождению подлежит δ_{21}.

5. Положим теперь $v = 1$, $u_{11} = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$. Тогда система уравнений (4.1) запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\beta_1\dot{x}_1 - 4K_1(1 - 2\Delta K)\dot{x}_2 + (\omega_0^2 - K_0)(1 + 2\Delta\omega)x_1 = K_{10}, \\ \ddot{x}_2 + 2\beta_2\dot{x}_2 + 4K_1(1 + 2\Delta K)\dot{x}_1 + (\omega_0^2 - K_0)(1 - 2\Delta\omega)x_2 = K_{20}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Неизвестными в этом случае являются константы ΔK, K_{10} и K_{20}. Система (4.26) имеет очевидное частное решение

$$\widehat{x}_1 = \frac{K_{10}}{(\omega_0^2 - K_0)(1 + 2\Delta\omega)}, \quad \widehat{x}_2 = \frac{K_{20}}{(\omega_0^2 - K_0)(1 - 2\Delta\omega)}. \tag{4.27}$$

Для решения однородной системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1+2\beta_1\dot{x}_1-4K_1(1-2\Delta K)\dot{x}_2+(\omega_0^2-K_0)(1+2\Delta\omega)x_1=0, \\ \ddot{x}_2+2\beta_2\dot{x}_2+4K_1(1+2\Delta K)\dot{x}_1+(\omega_0^2-K_0)(1-2\Delta\omega)x_2=0 \end{cases} \quad (4.28)$$

построим характеристический полином, отвечающий системе (4.28)

$$p(\lambda) = \lambda^4+2(\beta_1+\beta_2)\lambda^3+2\big(8(1-4\Delta K^2)K_1^2+4\beta_1\beta_2+2\omega_0^2-2K_0\big)\lambda^2- \\ -2(\omega_0^2-K_0)\big(2\Delta\omega(\beta_1-\beta_2)-\beta_1-\beta_2\big)\lambda+ \\ +\big(1-4(\Delta\omega)^2\big)(\omega_0^2-K_0)^2. \quad (4.29)$$

Первые члены разложения корней полинома (4.29) имеют вид:

$$\lambda_1 = i\sqrt{8K_1^2(1-4\Delta K^2)+\omega_0^2-K_0-2\sqrt{\mu}}+ \\ +\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)-\sqrt{\mu}\big)\,\beta_1}{2\sqrt{\mu}}- \\ -\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)+\sqrt{\mu}\big)\,\beta_2}{2\sqrt{\mu}}+o(\beta_1,\beta_2),$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{8K_1^2(1-4\Delta K^2)+\omega_0^2-K_0-2\sqrt{\mu}}+ \\ +\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)-\sqrt{\mu}\big)\,\beta_1}{2\sqrt{\mu}}- \\ -\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)+\sqrt{\mu}\big)\,\beta_2}{2\sqrt{\mu}}+o(\beta_1,\beta_2),$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{8K_1^2(1-4\Delta K^2)+\omega_0^2-K_0+2\sqrt{\mu}}+ \\ -\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)+\sqrt{\mu}\big)\,\beta_1}{2\sqrt{\mu}}- \\ +\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)-\sqrt{\mu}\big)\,\beta_2}{2\sqrt{\mu}}+o(\beta_1,\beta_2),$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{8K_1^2(1-4\Delta K^2)+\omega_0^2-K_0+2\sqrt{\mu}}+ \\ -\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)+\sqrt{\mu}\big)\,\beta_1}{2\sqrt{\mu}}- \\ +\frac{\big(4K_1^2\,(1-4\Delta K^2)+\Delta\omega(\omega_0^2-K_0)-\sqrt{\mu}\big)\,\beta_2}{2\sqrt{\mu}}+o(\beta_1,\beta_2),$$

где

$$\mu=16\left(1-4\Delta K^2\right)^2 K_1^4+4(1-4\Delta K^2)(\omega_0^2-K_0)K_1^2+(\Delta\omega)^2\left(\omega_0^2-K_0\right)^2.$$

§ 5. Численные методы идентификации параметров ТВГ

Численные методы идентификации параметров ТВГ разработаны на основе описанных здесь алгоритмов идентификации и реализованы в виде пакета прикладных программ сотрудниками математического факультета УдГУ Н. В. Миличем и Д. М. Оленчиковым.

§ 6. Управление системой (4.1)

Мы по-прежнему рассматриваем систему (4.1), но запишем ее в следующем, удобном для дальнейших исследований виде:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1+2\beta_1\dot{x}_1-4K_1(1-2\Delta K)v\dot{x}_2-\\ -\big((2K_1(1-4\Delta K)\dot{v}+2\delta_{12}u_{12}\big)x_2+\\ +\big((\omega_0^2-K_0v^2)(1+2\Delta\omega)-2\delta_{11}u_{11}\big)x_1=K_{10}v^2+hK_{20}\dot{v},\\ \ddot{x}_2+2\beta_2\dot{x}_2+4K_1(1+2\Delta K)v\dot{x}_1+\\ +\big(2K_1(1+4\Delta K)\dot{v}-2\delta_{21}u_{21}\big)x_1+\\ +\big((\omega_0^2-K_0v^2)(1-2\Delta\omega)-2\delta_{22}u_{22}\big)x_2=K_{20}v^2-hK_{10}\dot{v}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Будем предполагать теперь, что все параметры системы нам известны. Управления u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} будем формировать как функции двух переменных v и $\dot{v}$: $u_{kj}=u_{kj}(v,\dot{v})$. Таким образом, если в каждый момент времени t нам известна функция $v(t)$ переменного t и ее производная $\dot{v}(t)$, то управления $u_{kj}(t)\doteq u_{kj}\big(v(t),\dot{v}(t)\big)$ становятся функциями времени t. Такие управления называются *неупреждающими*, поскольку в каждый момент времени они формируются на основании информации об $v(t)$ и $\dot{v}(t)$ только в момент времени t и не используют информацию об $v(t)$ и $\dot{v}(t)$ в последующие моменты времени.

Неформальная постановка задачи управления состоит в том, чтобы построить управления $u_{kj}=u_{kj}(v,\dot{v})$ так, чтобы решения системы (6.1), содержащей погрешности изготовления, в каждый момент времени t «по возможности близко» располагались к соответствующим решениям идеальной системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1-4K_1v\dot{x}_2-2K_1\dot{v}x_2+(\omega_0^2-K_0v^2)x_1=0,\\ \ddot{x}_2+4K_1v\dot{x}_1+2K_1\dot{v}x_1+(\omega_0^2-K_0v^2)x_2=0. \end{cases}$$

Из вида системы (6.1) следует, что с помощью управлений u_{kj} мы не можем влиять на неоднородности

$$K_{10}v^2(t) + hK_{20}\dot{v}(t), \quad K_{20}v^2(t) - hK_{10}\dot{v}(t)$$

системы (6.1).

Выберем управления u_{kj} в виде

$$\begin{aligned} u_{12}(\dot{v}) = \frac{\sqrt{2}\,\Delta K\,\dot{v}}{\delta_{12}}, \quad u_{21}(\dot{v}) = \frac{\sqrt{2}\,\Delta K\,\dot{v}}{\delta_{21}}, \\ u_{11}(v) = \frac{(\omega_0^2 - K_0v^2)\Delta\omega}{\delta_{11}}, \quad u_{22}(v) = -\frac{(\omega_0^2 - K_0v^2)}{\delta_{22}}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Тогда система (6.1), замкнутая управлениями (6.2), принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 4K_1v\dot{x}_2 - 2K_1\dot{v}x_2 + (\omega_0^2 - K_0v^2)x_1 = \\ \qquad = K_{10}v^2 + hK_{20}\dot{v} - 2\beta_1\dot{x}_1 - 8K_1\Delta Kv\dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 + 4K_1v\dot{x}_1 + 2K_1\dot{v}x_1 + (\omega_0^2 - K_0v^2)x_2 = \\ \qquad = K_{20}v^2 - hK_{10}\dot{v} - 2\beta_2\dot{x}_2 - 8K_1\Delta Kv\dot{x}_1. \end{cases} \tag{6.3}$$

Так как из равенств (4.5) следуют равенства

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}_1(t)\cos 2\varphi - \dot{y}_2(t)\sin 2\varphi, \\ \dot{x}_2(t) = \dot{y}_1(t)\sin 2\varphi + \dot{y}_2(t)\cos 2\varphi, \end{cases} \tag{6.4}$$

то, подставляя (6.4) в (6.3), получим

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 4K_1v(t)\dot{x}_2 - 2K_1\dot{v}(t)x_2 + \big(\omega_0^2 - K_0v^2(t)\big)x_1 = f_1(t), \\ \ddot{x}_2 + 4K_1v(t)\dot{x}_1 + 2K_1\dot{v}(t)x_1 + \big(\omega_0^2 - K_0v^2(t)\big)x_2 = f_2(t), \end{cases} \tag{6.5}$$

где $f_1(t) = f_1\big(v(t), \dot{v}(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t)\big)$, $f_2(t) = f_1\big(v(t), \dot{v}(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t)\big)$,

$$\begin{cases} f_1(v, \dot{v}, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = K_{10}v^2 + hK_{20}\dot{v} - 2(\beta_1\cos 2\varphi - \\ -4K_1\Delta Kv\sin 2\varphi)\dot{y}_1 + 2(\beta_1\sin 2\varphi - 4K_1\Delta Kv\cos 2\varphi)\dot{y}_2, \\ f_2(v, \dot{v}, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = K_{20}v^2 - hK_{10}\dot{v} - 2(\beta_2\sin 2\varphi + \\ +4K_1\Delta Kv\cos 2\varphi)\dot{y}_1 - 2(\beta_2\cos 2\varphi - 4K_1\Delta Kv\sin 2\varphi)\dot{y}_2. \end{cases} \tag{6.6}$$

§ 7. Управление системой с аддитивно входящим управлением

В этом случае наряду с управлениями u_{kj} $\big($мы считаем, что эти управления уже выбраны и определяются равенствами (6.2)$\big)$ в систему входит пара аддитивных управлений w_1 и w_2. Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 4K_1 v(t)\dot{x}_2 - 2K_1\dot{v}(t)x_2 + \big(\omega_0^2 - K_0 v^2(t)\big)x_1 = f_1(t) + \varkappa_1 w_1, \\ \ddot{x}_2 + 4K_1 v(t)\dot{x}_1 + 2K_1\dot{v}(t)x_1 + \big(\omega_0^2 - K_0 v^2(t)\big)x_2 = f_2(t) + \varkappa_2 w_2, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — известные константы. В этом случае управления w_1 и w_2 выберем следующим образом

$$\begin{cases} w_1(v, \dot{v}, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = -\dfrac{f_1(v, \dot{v}, \dot{y}_1, \dot{y}_2)}{\varkappa_1}, \\ w_2(v, \dot{v}, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = -\dfrac{f_2(v, \dot{v}, \dot{y}_1, \dot{y}_2)}{\varkappa_2}. \end{cases} \tag{7.2}$$

Тогда эти управления компенсируют все погрешности изготовления и внутренние потери на трения. Таким образом, построенные так управления u_{kj}, w_1 и w_2 приводят исходную систему с погрешностями к идеальной системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 123 с.
2. Егармин Н. Е. Динамика неидеальной оболочки и управление ее колебаниями // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 49–59.
3. Сарапулов С. А., Киселенко С. П., Иосифов А. О. Влияние вращения на динамику неидеального полусферического резонатора // Механика гироскопических систем. 1993. № 12. С. 59–66.
4. Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ. 1997.
5. Lynch D. D. Vibratory Gyro Analysis by the Method of Averaging // Proc. 2nd St. Petersburg International Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation. Russia, May 24–25, 1995. P. 26–34.
6. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1977. С. 50, 262–263.

7. Zhbanov Yu. K. Eight–Point Model of the Hemispherical Resonator Gyro // Institute for Problems in Mechanics. Moscow: Russian Academy of Sciences.
8. Кузьмин С. В., Мачехин П. К., Бонштедт А. В. Восьмиточечная модель твердотельного волнового гироскопа. // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2002. Вып. 2(22). 104 с.
9. Журавлев В. Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 6–19.
10. Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В. Идентификация неоднородности распределения массы резонатора волнового твердотельного гироскопа // Вестн. МГТУ. 1997. С. 104–108.

Поступила в редакцию 01.09.04

A. V. Bonshtedt, V. A. Zaitsev, P. K. Machehin, E. L. Tonkov
Optimization of control by hardbody wave gyroscope
This work is about problems of identification of hardbody wave gyroscope (HWG) parameters, which appear because of intrinsical wastage and of roughness of instrument. There are eleven parameters. The algorithms of identification of these parameters are developed. The procedures of control by HWG are described also, which compensate the intrinsical wastage and of roughness of HWG. These controls are nonanticipating.

Бонштедт Андрей Владимирович
Ижевский электромеханический завод «Купол»
426033, Россия, г. Ижевск,
ул. Песочная, 3
e-mail: 065@kupol.ru

Мачехин Петр Кузьмич
Ижевский электромеханический завод «Купол»
426033, Россия, г. Ижевск,
ул. Песочная, 3
e-mail: 065@kupol.ru

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный университет
Кафедра дифференциальных уравнений
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1(корп. 4)
e-mail: verba@udm.ru

Тонков Евгений Леонидович
Удмуртский государственный университет
Кафедра дифференциальных уравнений
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская 1(корп. 4)
e-mail: elt@udman.ru