

© В.Ф. КРАВЧЕНКО,
Н.И. КРАВЧЕНКО, академик АН Украины В.Л. РВАЧЕВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТЕПЛОВЫЕ
ПОЛЯ НА ПРИМЕРЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

1. В данной статье с учетом результатов работ [1, 4] предложен и обоснован строгий метод решения краевых задач о преобразовании электромагнитных волн в волноводах в тепловые поля. Методика иллюстрируется на примере расчета трансформации электромагнитных волн в тепловые поля в прямоугольном волноводе со скругленными углами.

2. Используя симметрию электромагнитных волн в сечении прямоугольного волновода [2], рассмотрим его составную часть Ω (рис. 1). Преобразование электромагнитных волн в тепловые поля исследуем в состоянии термодинамического равновесия путем решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \theta_i(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1(x, y)}{\partial y^2} + K^{-1} \text{diss } P_{mn}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 3,$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_2(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta_2(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + K^{-1} \text{diss } \tilde{P}_{mn}^{(2)} = 0,$$

$$(1) \quad \text{diss } P_{mn}^{(1)} = \left(P_{mn}^+ + P_{mn}^- \cos \frac{2n\pi}{b} y \right) \exp[-A(x-a)],$$

$$\text{diss } P_{mn}^{(3)} = \left(P_{mn}^+ + P_{mn}^- \cos \frac{2m\pi}{a} x \right) \exp[-A(y-b)],$$

$$P_{mn}^\pm = \frac{A^2}{4\sigma} h_{mn}^2 \Lambda_{mn}^\pm; \quad P_{nm}^\pm = \frac{A^2}{4\sigma} h_{nm}^2 \Lambda_{nm}^\pm,$$

$$A = 2\delta^{-1}, \quad \delta = \left(\frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{1/2},$$

$$\Lambda_{mn}^\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm (1 - \Lambda_{mn}^2) / \left(\Lambda_{mn}^2 \left[1 + \left(\frac{bm}{an} \right)^2 \right] \right) \right),$$

$$\Lambda_{nm}^\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm (1 - \Lambda_{mn}^2) / \left(\Lambda_{mn}^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \frac{n}{m} \right)^2 \right] \right) \right),$$

$$\Lambda_{mn} = \lambda / \lambda_{mn}.$$

3. Учитывая связь между системами координат (x, y) , (E, η) и (ρ, φ) , пред-

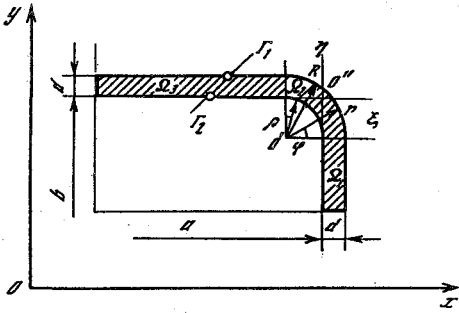


Рис. 1

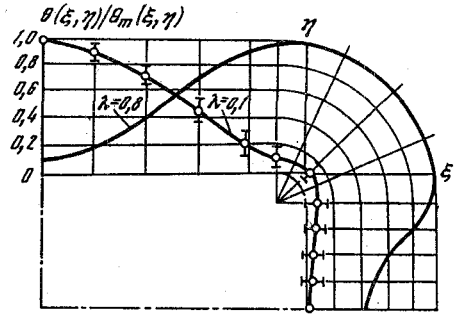


Рис. 2

ставим постановку смешанной краевой задачи (1) в следующем виде:

$$\nabla^2 \theta_1(\xi, \eta) + K^{-1} \left(P_{mn}^+ + P_{mn}^- \cos \frac{2n\pi}{b} \eta \right) \exp(-A\xi) = 0, \quad \xi, \eta \in \Omega_1;$$

$$(2) \quad \nabla_{r,\varphi}^2 \theta_2(r, \varphi) + K^{-1} (P_{mn}^+ + P_{mn}^-) \exp[-A(r, \varphi)] = 0, \quad r, \varphi \in \Omega_2;$$

$$\nabla^2 \theta_3(\xi, \eta) + K^{-1} \left(P_{nm}^+ + P_{nm}^- \cos \frac{2m\pi}{a} \xi \right) \exp(-A\eta) = 0, \quad \xi, \eta \in \Omega_3;$$

$$(3) \quad \theta_1(\xi_1, -\rho) = \theta_2(r, 0),$$

$$[\nabla \theta_1(\xi, \eta)]_\eta = [\nabla \theta_2(r, \varphi)]_\varphi, \quad \eta = -\rho, \quad \varphi = 0;$$

$$(4) \quad \theta_2(r, \pi/2) = \theta_3(-\rho, \eta),$$

$$[-\nabla \theta_2(r, \varphi)]_\varphi = [\nabla \theta_3(\xi, \eta)]_\xi, \quad \varphi = \pi/2, \quad \xi = -\rho;$$

$$(5) \quad [\nabla \theta_1(\xi, \eta)]_\eta = [\nabla \theta_3(\xi, \eta)]_\xi = 0, \quad \eta = -b/2, \quad \xi = -a/2;$$

$$(6) \quad [\nabla \theta_1(\xi, \eta)]_\xi \mp h_{1,2} \theta_1(\xi, \eta) = 0;$$

$$(7) \quad [\nabla \theta_2(r, \varphi)]_r \mp h_{1,2} \theta_2(r, \varphi) = 0;$$

$$(8) \quad [\nabla \theta_3(\xi, \eta)]_\eta \mp h_{1,2} \theta_3(\xi, \eta) = 0.$$

4. Краевая задача (2)–(8) является корректной согласно [3]. Собственные функции, их нормы и характеристические уравнения запишем для каждой области Ω_i , $i = 1, 2, 3$.

а) Область Ω_1 :

$$\Psi_j(\xi) = \sin(\lambda_j \xi + \varphi_j), \quad \varphi_j = \arctg(\mu_j / \text{Bi}_1),$$

$$(9) \quad \|\Psi_j\|^2 = \frac{d}{2} \left[1 + \frac{(\mu_j^2 + \text{Bi}_1 \cdot \text{Bi}_2)(\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2)}{[\mu_j^2 + (\text{Bi}_1)^2][\mu_j^2 + (\text{Bi}_2)^2]} \right],$$

$$\text{ctg } \mu_j = \frac{\mu_j^2 - \text{Bi}_1 \cdot \text{Bi}_2}{\mu_j(\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2)}, \quad \text{Bi}_1 = \frac{\alpha_1}{K} d, \quad \text{Bi}_2 = \frac{\alpha_2}{K} d;$$

б) область Ω_3 :

$$\Psi_i(\eta) = \sin(\lambda_i \eta + \varphi_i), \quad \varphi_i = \arctg\left(\frac{\mu_i}{\text{Bi}_1}\right),$$

(10)

$$\text{ctg } \mu_i = \frac{\mu_i^2 - \text{Bi}_1 \text{Bi}_2}{\mu_i(\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2)},$$

где обозначение критериев Био, коэффициентов теплоотдачи и теплопроводности

аналогично [1]. В области Ω_2 дифференциальное уравнение в частных производных (2) без свободного члена эквивалентно системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(11) \quad r^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) + \lambda^2 \Psi(r) = 0,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} - \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \lambda^2 > 0.$$

Для решения задачи Штурма—Лиувилля (11) приведем следующую лемму.

Л е м м а. *Линейный дифференциальный оператор эрмитов, если функцию веса выбрать в виде потенциала Ньютона.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие эрмитовости линейного оператора в пространстве L^2 имеет вид

$$(12) \quad \langle \hat{\mathcal{E}} \Psi_1(r), \Psi_2(r) \rangle = \langle \Psi_1(r), \hat{\mathcal{E}} \Psi_2(r) \rangle,$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \Psi_1(r), \Psi_2(r) \rangle = \int_{\rho}^R r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_1}{dr} \right) \Psi_2(r) \frac{1}{r} dr =$$

$$= r \left[\frac{d\Psi_1}{dr} \Psi_2(r) - \frac{d\Psi_2}{dr} \Psi_1(r) \right]_{\rho}^R + \int_{\rho}^R \Psi_1(r) \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_2}{dr} \right) dr.$$

Первое слагаемое в (12) при использовании граничных условий (7) обращается в нуль, и равенство (12) переходит в условие эрмитовости для оператора Эйлера. Следовательно, лемма доказана.

6. Собственные функции, их нормы и характеристические уравнения в области Ω_2 таковы:

$$\Psi_k(r) = \sin \left(\lambda_k \ln \frac{r}{\rho} + \varphi_k \right), \quad \varphi_k = \arctg \left(\frac{\mu_k}{\text{Bi}_3} \right),$$

$$(13) \quad \|\Psi_k\|^2 = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{R}{\rho} \left[1 + \frac{(\mu_k^2 + \text{Bi}_3 \cdot \text{Bi}_4) (\text{Bi}_3 + \text{Bi}_4)}{[\mu_k^2 + (\text{Bi}_3)^2] [\mu_k^2 + (\text{Bi}_4)^2]} \right] \right\},$$

$$\text{ctg } \mu_k = \frac{\mu_k^2 - \text{Bi}_3 \cdot \text{Bi}_4}{\mu_k (\text{Bi}_3 + \text{Bi}_4)}, \quad \mu_k = \lambda_k \ln \left(\frac{R}{\rho} \right),$$

$$\text{Bi}_3 = \frac{\alpha_1}{K} \rho \ln \left(\frac{R}{\rho} \right), \quad \text{Bi}_4 = \frac{\alpha_2}{K} \rho \ln \left(\frac{R}{\rho} \right).$$

Решение уравнений (2) с краевыми условиями (3)—(8) находим методом собственных функций:

$$\theta_1(\xi, r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\eta) \sin(\lambda_j \xi + \varphi_j),$$

$$(14) \quad a_j(\eta) = x_1 \text{ch } \lambda_j(\eta + b/2) + P_0 + P_1 \cos \frac{2n\pi}{b} \eta,$$

$$P_0 = P_{mn}^+ i_1 K^{-1} \left[\lambda_j^2 + \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-1} \|\Psi_j(\lambda_j)\|^2,$$

$$P_1 = P_{mn}^+ i_1 K^{-1} \lambda_j^{-2} \|\Psi_j(\lambda_j)\|^{-2},$$

$$(14) \quad i_1 = \frac{1}{\mu_j + (Ad)^2} \left\{ \frac{A \cdot d + Bi_1}{[1 + (Bi_1/\mu_j)^2]^{1/2}} - \frac{(Ad - Bi_2) \exp(-Ad)}{[1 + (Bi_2/\mu_j)^2]^{1/2}} \right\};$$

$$\theta_2(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\varphi) \sin\left(\lambda_k \ln \frac{r}{\rho} + \varphi_k\right),$$

$$(15) \quad b_k(\varphi) = x_2 \operatorname{sh} \lambda_k \varphi + x_3 \operatorname{ch} \lambda_k \varphi + P_2,$$

$$P_2 = (P_{mn}^+ + P_{mn}^-) K^{-1} i_2 \lambda_k^{-2} \|\Psi_k(\lambda_k)\|^{-2},$$

$$i_2 = \int_{\rho}^R r^2 \exp(-Ar) \sin\left(\lambda_k \ln \frac{r}{\rho} + \varphi_k\right) \frac{dr}{r};$$

$$\theta_3(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\xi) \cdot \sin(\lambda_j \eta + \varphi_j),$$

$$(16) \quad c_j(\xi) = x_4 \operatorname{ch} \lambda_j \left(\xi + \frac{a}{2}\right) + P_3 + P_4 \cos \frac{2m\pi}{a} \eta,$$

$$P_3 = P_{mn}^+ i_1 K^{-1} \lambda_j^{-2} \|\Psi_j(\lambda_j)\|^{-2},$$

$$P_4 = P_{mn}^- i_3 K^{-1} \left[\lambda_j^2 + \left(\frac{2m\pi}{a}\right)^2 \right]^{-1} \|\Psi_j(\lambda_j)\|^{-2}.$$

Для определения x_i используется метод перерасложения рядов в областях Ω_1 и Ω_3 по собственным функциям области Ω_2 , а ряды в области Ω_2 перераскладываются по собственным функциям области Ω_1 , а затем используются краевые условия сопряжения (3)–(5) и решается система линейных уравнений четвертого порядка.

Решение краевой задачи (2)–(8) представляется двукратными знакопеременными рядами, сходящимися согласно теореме Лейбница и признака Даламбера:

$$\theta_1(\xi, \eta) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_j(\eta) N_k \Psi_k(\lambda_k r) \Psi_j(\lambda_j \xi),$$

$$\theta_2(r, \varphi) = \sum_{j,k=1}^{\infty} b_k(\varphi) N_j \Psi_j(\lambda_j \xi) \Psi_k(\lambda_k r),$$

$$(17) \quad \theta_3(\xi, \eta) = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_j(\xi) N_k \Psi_k(\lambda_k r) \Psi_j(\lambda_j \eta),$$

$$N_k = \|\Psi_k\|^{-2} \cdot 2(\lambda_k)^{-1} \sin(\mu_k/2) \sin(\varphi_k + \mu_k/2),$$

$$N_j = \|\Psi_j\|^{-2} \cdot 2(\lambda_j)^{-1} \sin(\mu_j/2) \sin(\varphi_j + \mu_j/2).$$

7. Численные результаты, полученные из (17), (9), (10), (13), (15), (16), представлены на рис. 2 для основного H_{10} и высшего H_{11} типов волн, а соответствующие экспериментальные данные нанесены точками с СКО.

Таким образом, анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что при тонких стенках волновода ($d \leq 10\delta$) электромагнитные волны [2] трансформируются в тепловые поля с пространственной структурой, соответствующей распределению квадрата токов проводимости в стенках [5]. Обнаруженный физический эффект может найти применение в разработках измерительных устройств техники сантиметровых и миллиметровых [5] волн, а также в квантовой электронике при возбуждении, модуляции и приеме когерентного излучения [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рвачев В.Л.* Теория R -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.
2. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. и др.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 226 с.
4. *Кравченко В.Ф., Каретников С.Н., Слесаренко А.П.* – Докл. АН УССР. Сер. А, 1973, вып. 1, с. 178–181.
5. *Катица П.Л.* Электроника больших мощностей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 210 с.
6. *Кравченко Н.И., Нижмаков П.И., Орбинский А.Н.* Тез. докл. VIII Всесоюз. науч.-техн. конф.: Фотометрия и ее метрологическое обеспечение. М., 1990, с. 210.