К. В. Полякова, О строении объекта аффинной связности и тензора кручения в расслоении линейных реперов,
*Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2023, том 220, 99–112

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 99–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-99-112

УДК 514.76

# О СТРОЕНИИ ОБЪЕКТА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ И ТЕНЗОРА КРУЧЕНИЯ В РАССЛОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ РЕПЕРОВ

© 2023 г. **К. В. ПОЛЯКОВА**

Аннотация. Проводится исследование аффинных связностей в расслоении линейных реперов над гладким многообразием, опирающееся на структурные уравнения этого расслоения. Получено строение компонент аффинной связности в расслоении реперов над двумерным многообразием с помощью слоевых координат с коэффициентами — функциями базисных координат точки многообразия. Построены выражения для компонент тензора кручения в случае двумерного и трехмерного многообразий с помощью слоевых координат первого порядка и функций от базисных координат. Найдены выражения для объекта плоской связности через координаты абсолютно параллельных векторов и их пфаффовы производные, а также для объекта симметрической плоской связности через координаты абсолютно параллельных ковекторов.

***Ключевые слова***: расслоение линейных реперов, структурные уравнения, базисные и слоевые координаты, пфаффовы производные, аффинная связность, кручение аффинной связности, абсолютный параллелизм, плоская аффинная связность, симметрическая плоская связность.

# ON THE STRUCTURE OF AN AFFINE CONNECTION OBJECT AND THE TORSION TENSOR IN THE BUNDLE OF LINEAR FRAMES

© 2023 **K. V. POLYAKOVA**

Abstract. In this paper, we study affine connections in the bundle of linear frame over a smooth manifold based on the structural equations of this bundle. The structure of the components of an affine connection in the bundle of frames over a two-dimensional manifold is obtained by using the layer coordinates whose coefficients are functions of the base coordinates of a point of the manifold. We construct expressions for the components of the torsion tensor for two- and three-dimensional manifolds by using the first-order layer coordinates and functions of the base coordinates. Also, we find expressions for the object of flat connection in terms of the coordinates of absolutely parallel vectors and their Pfaffian derivatives and expressions for the object of symmetric flat connection in terms of the coordinates of absolutely parallel covectors.

***Keywords and phrases***: bundle of linear frames, structural equations, basic and layer coordinates, Pfaffian derivatives, affine connection, torsion of affine connection, absolute parallelism, flat affine connection, symmetric flat connection.

***AMS Subject Classification***: 53B05, 58A10

**1. Введение.** В данной работе реализуется подход, основанный на применении метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [6, 10], обобщающего метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана, с существенным использованием координатного выражения базисных и слоевых форм. Применение метода Картана—Лаптева, оперирующего инвариантными формами и структурными уравнениями, с применением координатного задания векторов и форм дает возможность уточнить строение объектов расслоений реперов. Особенности геометрического строения пространства расслоения реперов над гладким многообразием исследуются в монографии В. Ф. Кириченко [8], посвященной анализу основных понятий глобальной и локальной дифференциальной геометрии гладкого многообразия, относящихся к фундаментальному понятию связности.

В многочисленных исследованиях используется аффинная связность на гладком многообразии $X_m$, в касательном расслоении $TX_m$, а также в расслоении линейных реперов $L(X_m)$ над многообразием $X_m$. В [24] дана интерпретация классической аффинной связности с помощью аффинной связности Лаптева: при заданном сечении расслоения реперов второго порядка объект аффинной связности Лаптева (с компонентами — функциями на расслоении реперов второго порядка) становится объектом классической аффинной связности. Геометрические интерпретации аффинной связности в касательном пространстве $TL(X_m)$ и в касательном пространстве второго порядка $T^2X_m$ к многообразию $X_m$ построены в [14].

В работе [7] описывается структура любой аффинной связности $\Gamma$ на $TX_m$ как сумма аффинной связности $G'$, построенной из инфинитезимальной связности $G$, и полного поднятия восьми, вообще говоря, различных полей локальных тензоров валентности $(1,2)$, и выделяется семейство симметричных аффинных связностей на расслоении $TX_m$, зависящих от одного симметричного тензора валентности $(1,2)$.

Аффинные связности, порожденные абсолютно параллельными полями векторов и ковекторов, являются плоскими и симметрическими плоскими связностями. В работе [23] в рамках чисто аналитического подхода построены тензоры $\gamma^i_j$ и $\gamma^i$ со специальными полями, порождающие тензор деформации $\gamma^i_{jk}$, а следовательно, компоненты $\Gamma^i_{jk}$ объекта плоской и симметрической плоской связностей с помощью операции дифференциального продолжения, состоящей в дифференцировании уравнений внешним образом и последующем разрешении по лемме Картана. Причем однократное продолжение объекта $\gamma^i_j$ приводит к плоской связности, а двукратное продолжение объекта $\gamma^i$ — к симметрической плоской связности. Данный аналитический подход имеет известную геометрическую интерпретацию (см. [12, с. 134]), фактически состоящую в рассмотрении абсолютно параллельных полей векторов и ковекторов.

В настоящей работе исследуется строение компонент аффинной связности и ее тензора кручения в расслоении линейных реперов над гладким многообразием. Показано, что компоненты аффинной связности в расслоении реперов над двумерным многообразием выражаются через слоевые координаты, причем коэффициентами выражений являются функции базисных координат точки многообразия, которые фактически и определяют конкретную связность. Строение компонент тензора кручения с помощью слоевых координат первого порядка и функций от базисных координат найдено в случае двумерного и трехмерного многообразий. С помощью координат абсолютно параллельных $m$ векторов (ковекторов) и их пфаффовых производных получены выражения для компонент объекта плоской связности, а с помощью координат абсолютно параллельных $m$ ковекторов (полных дифференциалов $m$ функций) построены выражения для компонент объекта симметрической плоской связности.

Текущая точка $x$ некоторой окрестности $m$-мерного гладкого многообразия $X_m$ определяется локальными координатами $x^i$ $(i,j,k,\ldots=1,\ldots,m)$. Формы инвариантного корепера $\{\omega^i,\omega^i_j,\omega^i_{jk}\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i,dx^i_j,dx^i_{jk}\}$ выражаются по формулам (см. [10])

$$\begin{gathered}\omega^i=x^i_jdx^j,\\ \omega^i_j=-\overset{*}{x}{}^k_jdx^i_k-x^i_{jk}\omega^k,\\ \omega^i_{jk}=dx^i_{jk}+x^l_{jk}\omega^i_l-x^i_{lk}\omega^l_j-x^i_{jl}\omega^l_k+(x^s_{jk}x^i_{sl}-x^i_{jkl})\omega^l.\end{gathered}\tag{1}$$

Слоевые координаты первого порядка $x^i_j$ образуют невырожденную матрицу, $\Delta=\det(x^i_j)\neq0$. Элементы обратной матрицы обозначим $\overset{*}{x}{}^i_j$, т.е. $\overset{*}{x}{}^i_jx^j_k=\delta^i_k$. Слоевые координаты второго и третьего порядков $x^i_{jk}$, $x^i_{jkl}$ симметричны по нижним индексам. На пересечении двух окрестностей преобразования слоевых координат $x^i_j$, $y^i_j$ индуцированы преобразованиями исходных локальных координат $x^i$, $y^j$ и имеют вид

$$y^i_j = x^i_k \frac{\partial x^k}{\partial y^j}, \quad x^i_j = y^i_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j}.$$

Базисные касательные векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ относительно натурального (голономного) репера $\{\partial_j = \partial/\partial x^j\}$ имеют вид $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j$, они сопряжены формам кобазиса $\{\omega^i\}$ и удовлетворяют уравнениям (см. [1, с. 56]; [19, с. 20])

$$d\varepsilon_i = \varepsilon_j \omega^j_i + \varepsilon_{ij}\omega^j.$$

Векторы $\varepsilon_{ij}$ являются касательными векторами второго порядка, на них натянуто касательное пространство второго порядка $T^2X_m = \mathrm{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в точке $M$.

Пусть на многообразии $X_m$ задана скалярная функция $f$, тогда ее дифференциал $df$ определяет на $X_m$ поле ковектора. Если в некоторой окрестности $df = \partial_i f dx^i = f_{,i}\omega^i$, то инвариантные производные $f_{,i} = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j f$ (см. [11]) являются координатами указанного ковекторного поля и называются пфаффовыми производными функции $f$ по отношению к кореперу $\{\omega^i\}$ (см., например, [6, с. 67]). Аналогично функциям, векторы $\varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j \partial_{kl} + x^k_{ij}\overset{*}{x}{}^l_k \partial_l$, являющиеся коэффициентами при базисных формах $\omega^i$, являются пфаффовыми производными векторов $\varepsilon_i$.

**2. Структура тензоров валентности 1 и 2 в расслоении линейных реперов.** Известно [8, с. 231], что задание векторного поля $A = (a^i(x^j))$ и ковекторного поля $B = (b_i(x^j))$ на гладком многообразии $X_m$ равносильно заданию системы функций $v^i = v^i(x^k, x^l_s)$ и $q_i = q_i(x^k, x^l_s)$ на многообразии $L(X_m)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (см. [1, 21])

$$dv^i + v^j\omega^i_j = v^i_{,j}\omega^j, \quad dq_i - q_j\omega^j_i = q_{i,j}\omega^j. \tag{2}$$

**Лемма 1.** *Для тензоров $v^i = v^i(x^k, x^l_s)$, $q_i = q_i(x^k, x^l_s)$ в расслоении линейных реперов над многообразием $X_m$ справедливо разложение*

$$v^i(x^k, x^l_s) = a^j(x^k)\cdot x^i_j, \quad q_i(x^k, x^l_s) = b_j(x^k)\cdot \overset{*}{x}{}^j_i, \tag{3}$$

*причем в новых координатах справедливы равенства*

$$\acute{a}^i = a^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad \acute{b}_i = b_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.$$

Действительно, учитывая формулы (1) и уравнения (2) для тензоров $v^i = v^i(x^k, x^l_s)$, $q_i = q_i(x^k, x^l_s)$, получим

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j_k} = \delta^i_j v^s \overset{*}{x}{}^k_s, \quad \frac{\partial q_i}{\partial x^j_k} = q_j \overset{*}{x}{}^k_i.$$

В частности, для тензора $v^i$ при $i = 1, 2$ имеем уравнения

$$\frac{\partial v^1}{\partial x^1_i} = v^k \overset{*}{x}{}^i_k, \quad \frac{\partial v^1}{\partial x^2_i} = 0, \quad \frac{\partial v^2}{\partial x^1_i} = 0, \quad \frac{\partial v^2}{\partial x^2_i} = v^k \overset{*}{x}{}^i_k.$$

Тогда получаем разложение $(3)_1$. Аналогично находится разложение $(3)_2$. Чтобы на пересечении двух окрестностей было справедливо $\acute{v}^i = v^i$, $\acute{q}_i = q_i$, получаем

$$\acute{a}^i = a^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad \acute{b}_i = b_j \frac{\partial x^j}{\partial x^i},$$

т.е. функции $a^j(x^k)$, $b_j(x^k)$ преобразуются как классические тензоры. Из комбинаций (3) следует, что $v^i = v^i(x^k, x^i_s)$, $q_i = q_i(x^k, \overset{*}{x}{}^s_i)$.

Кроме того, из (2) следует, что пфаффовы (обобщенные) производные $v^i_{,j}$, $q_{i,j}$ имеют вид

$$v^i_{,j} = \frac{\partial a^l}{\partial x^k}\overset{*}{x}{}^k_j x^i_l - v^k x^i_{kj}, \quad q_{i,j} = \frac{\partial b_l}{\partial x^k}\overset{*}{x}{}^k_j \overset{*}{x}{}^l_i + q_l x^l_{ij}$$

и зависят не только от координат $x^i$, $x^j_k$ расслоения реперов первого порядка, но также от слоевых координат второго порядка $x^i_{jk}$ (ср. [8, с. 231]). Компоненты $(v^i, v^i_{,j})$ на многообразии $L(X_m)$

определяют векторное поле, которое называют естественным лифтом (лифтом Ли) поля $(v^i)$ на $X_m$ (см. [6, с. 75]).

Согласно основной теореме тензорного анализа задание тензорного поля $T$ на гладком многообразии $X_m$ равносильно заданию системы функций на пространстве $L(X_m)$, причем эти функции удовлетворяют уравнениям, аналогичным (2), и в точке $(x, \varepsilon_i) \in L(X_m)$ равны соответствующим компонентам тензора $T$ в точке $x \in X_m$ в репере $\varepsilon_i$ (см. [8, с. 233]). В следующих двух леммах найдем явные выражения на компоненты тензоров $t_{ij}$, $t^i_j$ в расслоении $L(X_2)$.

**Лемма 2.** *Для тензора $t_{ij} = t_{ij}(x^k, x^l_s)$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием $X_2$ справедливо разложение*

$$t_{11} = \frac{b(x^2_1)^2 + cx^2_1x^2_2 + d(x^2_2)^2}{\Delta^2}, \qquad t_{12} = \frac{a}{\Delta} - \frac{bx^1_1x^2_1 + cx^1_2x^2_1 + dx^1_2x^2_2}{\Delta^2},$$
$$t_{21} = -\frac{a}{\Delta} - \frac{bx^1_1x^2_1 + cx^1_1x^2_2 + dx^1_2x^2_2}{\Delta^2}, \quad t_{22} = \frac{b(x^1_1)^2 + cx^1_1x^1_2 + d(x^1_2)^2}{\Delta^2},$$

*где $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$; $\Delta = \det(x^i_j)$.*

Действительно, учитывая дифференциальные уравнения

$$dt_{ij} - t_{kj}\omega^k_i - t_{ik}\omega^k_j = t_{ij,k}\omega^k$$

на тензор $t_{ij} = t_{ij}(x^k, x^l_s)$, получим

$$t_{11} = \frac{c_{11}(x^k, x^2_i)}{\Delta^2}, \qquad t_{12} = \frac{c_{12}(x^k, x^2_i)}{\Delta} - \frac{c_{11}(x^k, x^2_i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$
$$t_{21} = \frac{c_{21}(x^k, x^1_i)}{\Delta} - \frac{c_{22}(x^k, x^1_i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2}, \quad t_{22} = \frac{c_{22}(x^k, x^1_i)}{\Delta^2},$$

где

$$c_{11}(x^k, x^2_i) = b(x^2_1)^2 + cx^2_1x^2_2 + d(x^2_2)^2, \quad c_{12}(x^k, x^2_i) = \frac{ax^2_2 - bx^2_1}{x^2_2},$$
$$c_{21}(x^k, x^1_i) = \frac{-ax^1_2 + bx^1_1}{x^1_2}, \qquad c_{22}(x^k, x^1_i) = b(x^1_1)^2 + cx^1_1x^1_2 + d(x^1_2)^2.$$

Для кососимметрического тензора $t_{ij} = t_{ij}(x^k, x^l_s)$, $t_{ij} = -t_{ji}$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием $X_2$ имеем $t_{12} = a(x^i)/\Delta$.

**Лемма 3.** *Для тензора $t^i_j = t^i_j(x^k, x^l_s)$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием $X_2$ справедливо разложение*

$$t^1_1 = a - \frac{bx^1_1x^2_1 + cx^1_1x^2_2 + dx^2_1x^2_2}{\Delta}, \quad t^1_2 = \frac{b(x^1_1)^2 + cx^1_1x^1_2 + d(x^1_2)^2}{\Delta},$$
$$t^2_1 = -\frac{b(x^2_1)^2 + cx^2_1x^2_2 + d(x^2_2)^2}{\Delta}, \qquad t^2_2 = a + \frac{bx^1_1x^2_1 + cx^1_2x^2_1 + dx^2_1x^2_2}{\Delta},$$

*причем $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$; $\Delta = \det(x^i_j)$.*

Действительно, учитывая уравнения

$$dt^i_j + t^k_j\omega^i_k - t^i_k\omega^k_j = t^i_{j,k}\omega^k$$

для тензора $t^i_j = t^i_j(x^k, x^l_s)$, получим

$$t^1_1 = c^1_1(x^k, x^1_i) - \frac{c^1_2(x^k, x^1_i)}{\Delta} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2}, \quad t^1_2 = \frac{c^1_2(x^k, x^1_i)}{\Delta},$$
$$t^2_1 = \frac{c^2_1(x^k, x^2_i)}{\Delta}, \qquad t^2_2 = c^2_2(x^k, x^2_i) - \frac{c^2_1(x^k, x^2_i)}{\Delta} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$

где

$$c^1_1(x^k, x^1_i) = a + b \cdot \frac{x^1_1}{x^1_2}, \qquad c^1_2(x^k, x^1_i) = b(x^1_1)^2 + cx^1_1 x^1_2 + d(x^1_2)^2,$$

$$c^2_1(x^k, x^2_i) = -b(x^2_1)^2 - cx^2_1 x^2_2 - d(x^2_2)^2, \quad c^2_2(x^k, x^2_i) = a + b \cdot \frac{x^2_1}{x^2_2}.$$

Для тензора $t^i_j = t^i_j(x^k, x^l_s)$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием $X_2$ имеем $t^1_1 + t^2_2 = 2a - c$, где $a = a(x^i)$, $c = c(x^i)$.

**3. Тензор деформации аффинной связности первого порядка.** В расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов над многообразием $X_m$ способом Лаптева—Лумисте (см. [6, с. 62]; [2–4, 10, 20]) посредством форм $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$ зададим связность $\Gamma^i_{jk}$ с уравнениями

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l}\omega^l, \tag{4}$$

где функции $\Gamma^i_{jk,l}$ являются пфаффовыми, или обобщенными частными, производными. В уравнениях (4) рассмотрим действие тензорного дифференциального оператора $\Delta$ (см. [1–5, 19])

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^s_{jk}\omega^i_s - \Gamma^i_{sk}\omega^s_j - \Gamma^i_{js}\omega^s_k$$

и перейдем к натуральному кореперу по формулам (1). Поскольку компоненты $\Gamma^i_{jk}$ зависят от базисных и слоевых координат $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^l, x^l_s, x^l_{sp})$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}dx^l + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_s}dx^l_s + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}}dx^l_{sp} = -\delta^i_l\delta^s_j\delta^p_k dx^1_{sp} +& \\ + \Big(\delta^i_l\big(\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk}\big)\overset{*}{x}{}^s_p - \big(\Gamma^i_{lk} + x^i_{lk}\big)\overset{*}{x}{}^s_j - \big(\Gamma^i_{jl} + x^i_{jl}\big)\overset{*}{x}{}^s_k\Big)dx^l_s +& \\ + \Big(\big(\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk}\big)x^i_{ps} - \big(\Gamma^i_{pk} + x^i_{pk}\big)x^p_{js} - \big(\Gamma^i_{jp} + x^i_{jp}\big)x^p_{ks} + \Gamma^i_{jk,s} + x^i_{jks} - x^p_{jk}x^i_{ps}\Big)x^s_l dx^l.&\end{aligned} \tag{5}$$

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах $dx^l_{sp}$ в выражении (5) дает равенства

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}} = -\delta^i_l\delta^s_j\delta^p_k,$$

откуда следует разложение (ср. [16, 17])

$$\Gamma^i_{jk} = -x^i_{jk} + \gamma^i_{jk} \tag{6}$$

связности с помощью слоевых координат второго порядка $x^i_{jk}$ и тензора *деформации* (генератор [16, 17]) $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$ аффинной связности $\Gamma^i_{jk}$ к канонической плоской [9, с. 94] (простейшей [13]) связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$. Тензор деформации $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$ зависит только от базисных координат $x^l$ и слоевых координат первого порядка $x^p_q$. Связность $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$ является единственной, не зависящей от слоевых переменных $x^l_s$. Равенство нулю ковариантных производных координат $x^i_j$ выделяет симметрическую плоскую связность $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$.

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах $dx^l_s$ дает выражение частных производных тензора деформации

$$\frac{\partial\gamma^i_{jk}}{\partial x^l_s} = \delta^i_l\gamma^p_{jk}\overset{*}{x}{}^s_p - \gamma^i_{lk}\overset{*}{x}{}^s_j - \gamma^i_{jl}\overset{*}{x}{}^s_k. \tag{7}$$

Объекты кручения $T^i_{jk}$ и кривизны $R^i_{jkl}$ аффинной связности выражаются по формулам

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}, \quad R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[k,l]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\Delta T^i_{jk} = T^i_{jk,l}\omega^l$, $\Delta R^i_{jkl} = R^i_{jkl,s}\omega^s$.

С помощью разложения (6) получим, что кручение и кривизна выражаются через тензор деформации по формулам

$$T^i_{jk} = \gamma^i_{[jk]}, \quad R^i_{jkl} = \frac{\partial \gamma^i_{j[k}}{\partial x^s}\overset{*}{x}{}^s_{l]} - \gamma^s_{j[k}\gamma^i_{sl]}. \tag{8}$$

Ковариантные производные базисных векторов $\varepsilon_i$ относительно аффинной связности $\Gamma^i_{jk}$ находим по формуле $\nabla_j \varepsilon_i = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma^k_{ij}$. Выражение для дифференциалов векторов

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma^k_{ij} \tag{9}$$

преобразуем к виду

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_k(\Delta\Gamma^k_{ij} + \omega^k_{ij}) + \omega^k(\varepsilon_{ijk} + \Gamma^l_{ij}\varepsilon_{lk}). \tag{10}$$

Поскольку компоненты $\Gamma^i_{jk}$ объекта аффинной связности удовлетворяют уравнениям (4), то уравнения (10) принимают вид $\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij} = \omega^k(\varepsilon_l\Gamma^l_{ijk} + \varepsilon_{ijk} + \Gamma^l_{ij}\varepsilon_{lk})$. Векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ относительно инвариантны, так как неподвижны в совокупности при фиксации точки $M \in X_m$, которую обеспечивают уравнения $\omega^i = 0$. Отметим также, что на векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ натянуто оснащающее подпространство $HT^2X_m = \mathrm{span}(\tilde{\varepsilon}_{ij})$ пространства $T^2X_m$ (см. [19, с. 49]).

**4. Структура аффинной связности в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием $X_2$.** Можно записать уравнения (7) для компонент тензора деформации $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$ следующим образом (см. [15]):

$$\frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial x^1_s} = -2\gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_1, \qquad \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{11} - \gamma^2_{21} - \gamma^2_{12})\overset{*}{x}{}^s_1 + \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial x^2_s} = -2\gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_2, \qquad \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial x^1_s} = \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1 + (\gamma^2_{22} - \gamma^1_{12} - \gamma^1_{21})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\gamma^1_{11}}{\partial x^1_s} = -\gamma^1_{11}\overset{*}{x}{}^s_1 + \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \qquad \frac{\partial\gamma^1_{11}}{\partial x^2_s} = -(\gamma^1_{12} + \gamma^1_{21})\overset{*}{x}{}^s_1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\gamma^2_{22}}{\partial x^2_s} = -\gamma^2_{22}\overset{*}{x}{}^s_2 + \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1, \qquad \frac{\partial\gamma^2_{22}}{\partial x^1_s} = -(\gamma^2_{12} + \gamma^2_{21})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\gamma^1_{12}}{\partial x^2_s} = -\gamma^1_{12}\overset{*}{x}{}^s_2 - \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1, \qquad \frac{\partial\gamma^1_{12}}{\partial x^1_s} = (\gamma^2_{12} - \gamma^1_{11})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial x^1_s} = -\gamma^1_{21}\overset{*}{x}{}^s_2 - \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1, \qquad \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial x^1_s} = (\gamma^2_{21} - \gamma^1_{11})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial x^1_s} = -\gamma^2_{12}\overset{*}{x}{}^s_1 - \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \qquad \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{12} - \gamma^2_{22})\overset{*}{x}{}^s_1, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\gamma^2_{21}}{\partial x^1_s} = -\gamma^2_{21}\overset{*}{x}{}^s_1 - \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \qquad \frac{\partial\gamma^2_{21}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{21} - \gamma^2_{22})\overset{*}{x}{}^s_1. \tag{18}$$

**Теорема 1.** *Компоненты аффинной связности $\Gamma^i_{jk}$ $(i, j, k, \ldots = 1, 2)$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием $X_2$ в общем случае имеют вид $\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - x^i_{jk}$, где*

$$\begin{aligned}
&\gamma^1_{22} = \frac{1}{\Delta^2}F^1_{22}(x^i, x^1_s), \quad &&\gamma^2_{11} = \frac{1}{\Delta^2}G^2_{11}(x^i, x^2_s),\\
&\gamma^2_{22} = \frac{F^2_{22}}{\Delta} + \frac{F^1_{22}}{\Delta^2}\cdot\frac{x^2_2}{x^1_2}, \quad &&\gamma^1_{11} = \frac{G^1_{11}}{\Delta} + \frac{G^2_{11}}{\Delta^2}\cdot\frac{x^1_2}{x^2_2},\\
&\gamma^1_{12} = \frac{F^1_{12}}{\Delta} - \frac{F^1_{22}}{\Delta^2}\cdot\frac{x^2_2}{x^1_2}, \quad &&\gamma^2_{12} = \frac{G^2_{12}}{\Delta} - \frac{G^2_{11}}{\Delta^2}\cdot\frac{x^1_2}{x^2_2},\\
&\gamma^1_{21} = \frac{F^1_{21}}{\Delta} - \frac{F^1_{22}}{\Delta^2}\cdot\frac{x^2_2}{x^1_2}, \quad &&\gamma^2_{21} = \frac{G^2_{21}}{\Delta} - \frac{G^2_{11}}{\Delta^2}\cdot\frac{x^1_2}{x^2_2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

*Здесь введены следующие обозначения*:

$$\begin{aligned}
&F^1_{22} = a(x^1_1)^3 + b(x^1_1)^2x^1_2 + cx^1_1(x^1_2)^2 + d(x^1_2)^3, && G^2_{11} = a(x^2_1)^3 + b(x^2_1)^2x^2_2 + cx^2_1(x^2_2)^2 + d(x^2_2)^3,\\
&F^2_{22} = -\frac{a(x^1_1)^2 + ux^1_1x^1_2 + v(x^1_2)^2}{x^1_2}, && G^1_{11} = \frac{a(x^2_1)^2 + ux^2_1x^2_2 + v(x^2_2)^2}{x^2_2},\\
&F^1_{12} = \frac{a(x^1_1)^2 + \xi x^1_1x^1_2 + \eta(x^1_2)^2}{x^1_2}, && G^2_{21} = -\frac{a(x^2_1)^2 + \xi x^2_1x^2_2 + \eta(x^2_2)^2}{x^2_2},\\
&F^1_{21} = \frac{a(x^1_1)^2 + \alpha x^1_1x^1_2 + \beta(x^1_2)^2}{x^1_2}, && G^2_{12} = -\frac{a(x^2_1)^2 + \alpha x^2_1x^2_2 + \beta(x^2_2)^2}{x^2_2},
\end{aligned} \tag{20}$$

*причем* $2b = u+\xi+\alpha$, $c = v+\eta+\beta$; $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$, $u = u(x^i)$, $v = v(x^i)$, $\xi = \xi(x^i)$, $\eta = \eta(x^i)$, $\alpha = \alpha(x^i)$, $\beta = \beta(x^i)$.

*Доказательство.* Из уравнений $(11)_1$—$(18)_1$ следует общий вид (19) компонент тензора деформации $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$. Функции $F = \{F^1_{22}, F^2_{22}, F^1_{12}, F^1_{21}\} = \{F^1_{22}(x^i, x^1_s), F^2_{22}(x^i, x^1_s),\ F^1_{12}(x^i, x^1_s), F^1_{21}(x^i, x^1_s)\}$ и функции $G = \{G^2_{11}, G^1_{11}, G^2_{12}, G^2_{21}\} = \{G^2_{11}(x^i, x^2_s), G^1_{11}(x^i, x^2_s), G^2_{12}(x^i, x^2_s), G^2_{21}(x^i, x^2_s)\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&x^2_1\frac{\partial G^2_{11}}{\partial x^2_1} + x^2_2\frac{\partial G^2_{11}}{\partial x^2_2} = 3G^2_{11}, && x^1_1\frac{\partial F^1_{22}}{\partial x^1_1} + x^1_2\frac{\partial F^1_{22}}{\partial x^1_2} = 3F^1_{22},\\
&x^2_1\frac{\partial G^1_{11}}{\partial x^2_1} + x^2_2\frac{\partial G^1_{11}}{\partial x^2_2} = G^1_{11}, && x^1_1\frac{\partial F^2_{22}}{\partial x^1_1} + x^1_2\frac{\partial F^2_{22}}{\partial x^1_2} = F^2_{22},\\
&x^1_1\frac{\partial F^1_{12}}{\partial x^1_1} + x^1_2\frac{\partial F^1_{12}}{\partial x^1_2} = F^1_{12}, && x^1_1\frac{\partial F^1_{21}}{\partial x^1_1} + x^1_2\frac{\partial F^1_{21}}{\partial x^1_2} = F^1_{21},\\
&x^2_1\frac{\partial G^2_{12}}{\partial x^2_1} + x^2_2\frac{\partial G^2_{12}}{\partial x^2_2} = G^2_{12}, && x^2_1\frac{\partial G^2_{21}}{\partial x^2_1} + x^2_2\frac{\partial G^2_{21}}{\partial x^2_2} = G^2_{21}.
\end{aligned}$$

Теперь найдем вид функций, входящих в эти выражения. Из уравнений $(11)_2$ и $(12)_2$, $(13)_2$ и $(14)_2$, $(15)_2$ и $(18)_2$, $(16)_2$ и $(17)_2$ следует

$$\begin{aligned}
&F^1_{22} = a(x^1_1)^3 + b(x^1_1)^2x^1_2 + cx^1_1(x^1_2)^2 + d(x^1_2)^3, && G^2_{11} = a(x^2_1)^3 + b(x^2_1)^2x^2_2 + cx^2_1(x^2_2)^2 + d(x^2_2)^3,\\
&F^2_{22} = -\frac{w(x^1_1)^2 + ux^1_1x^1_2 + v(x^1_2)^2}{x^1_2}, && G^1_{11} = \frac{w(x^2_1)^2 + ux^2_1x^2_2 + v(x^2_2)^2}{x^2_2},\\
&F^1_{12} = \frac{\zeta(x^1_1)^2 + \xi x^1_1x^1_2 + \eta(x^1_2)^2}{x^1_2}, && G^2_{21} = -\frac{\zeta(x^2_1)^2 + \xi x^2_1x^2_2 + \eta(x^2_2)^2}{x^2_2},\\
&F^1_{21} = \frac{\gamma(x^1_1)^2 + \alpha x^1_1x^1_2 + \beta(x^1_2)^2}{x^1_2}, && G^2_{12} = -\frac{\gamma(x^2_1)^2 + \alpha x^2_1x^2_2 + \beta(x^2_2)^2}{x^2_2},
\end{aligned}$$

причем $w = \zeta = \gamma = a$, $2b = u+\xi+\alpha$, $c = v+\eta+\beta$.

Из уравнений $(15)_2$—$(18)_2$ следует

$$\frac{\partial(F^1_{12} - F^1_{21})}{\partial x^1_1} = \frac{\partial(G^2_{12} - G^2_{21})}{\partial x^2_1}, \quad \frac{\partial(F^1_{12} - F^1_{21})}{\partial x^1_2} = \frac{\partial(G^2_{12} - G^2_{21})}{\partial x^2_2},$$

откуда имеем

$$F^1_{12} - F^1_{21} = a^i(x^j)\cdot x^1_i, \quad G^2_{12} - G^2_{21} = a^i(x^j)\cdot x^2_i.$$

□

«Слоевые» составляющие $x^j_i/\Delta$, $-x^i_{jk}$ одинаковы для всех связностей; конкретная связность выделяется выбором «базисных» составляющих $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$, $u = u(x^i)$, $v = v(x^i)$, $\xi = \xi(x^i)$, $\eta = \eta(x^i)$, $\alpha = \alpha(x^i)$, $\beta = \beta(x^i)$. Таким образом, компоненты $\Gamma^i_{jk}$ объекта связности, как дифференциально-геометрической структуры расслоения реперов второго порядка, существенно зависят от функций $a$, $d$, $u$, $v$, $\xi$, $\eta$, $\alpha$, $\beta$, выражающихся через базисные координаты $x^j$.

Согласно основной теореме тензорного анализа, доказанным леммам и теореме можно заключить, что компоненты $\Gamma^i_{jk}$ $(i,j,k=1,\dots,m)$ имеют аналогичную структуру и зависят от $m^3$ функций базисных переменных $x^i$.

**Следствие 1.** *Равенства $F^1_{22}(x^i,x^1_s)=0$, $G^2_{11}(x^i,x^2_s)=0$ выделяют класс аффинных связностей $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}=\overset{\circ}{\gamma}{}^i_{jk}-x^i_{jk}$ $(i,j,k,\ldots=1,2)$ с тензором деформации следующего вида:*

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^1_{22}=0,\quad \overset{\circ}{\gamma}{}^1_{12}=\frac{a^i+\xi^i}{2}\cdot\frac{x^1_i}{\Delta},\quad \overset{\circ}{\gamma}{}^1_{21}=\frac{-a^i+\xi^i}{2}\cdot\frac{x^1_i}{\Delta},\quad \overset{\circ}{\gamma}{}^2_{22}=\overset{\circ}{\gamma}{}^1_{12}+\overset{\circ}{\gamma}{}^1_{21}=\xi^i\cdot\frac{x^1_i}{\Delta},$$
$$\overset{\circ}{\gamma}{}^2_{11}=0,\quad \overset{\circ}{\gamma}{}^2_{12}=\frac{a^i-\xi^i}{2}\cdot\frac{x^2_i}{\Delta},\quad \overset{\circ}{\gamma}{}^2_{21}=\frac{-a^i-\xi^i}{2}\cdot\frac{x^2_i}{\Delta},\quad \overset{\circ}{\gamma}{}^1_{11}=\overset{\circ}{\gamma}{}^2_{12}+\overset{\circ}{\gamma}{}^2_{21}=-\xi^i\frac{x^2_i}{\Delta},$$

*где $\Delta=\det(x^i_j)$; $a^i=a^i(x^j)$, $\xi^i=\xi^i(x^j)$.*

Все связности класса $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}$ имеют вид

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22}=-x^1_{22},\qquad \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{11}=-x^2_{11},$$
$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{12}=\frac{a^i(x^j)+\xi^i(x^j)}{2}\cdot\frac{x^1_i}{\Delta}-x^1_{12},\quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{21}=\frac{-a^i(x^j)+\xi^i(x^j)}{2}\cdot\frac{x^1_i}{\Delta}-x^1_{21},\quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{22}=\xi^i(x^j)\cdot\frac{x^1_i}{\Delta}-x^2_{22},$$
$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{12}=\frac{a^i(x^j)-\xi^i(x^j)}{2}\cdot\frac{x^2_i}{\Delta}-x^2_{12},\quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{21}=\frac{-a^i(x^j)-\xi^i(x^j)}{2}\cdot\frac{x^2_i}{\Delta}-x^2_{21},\quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{11}=-\xi^i(x^j)\cdot\frac{x^2_i}{\Delta}-x^1_{11};$$

их «слоевые» составляющие $x^j_i/\Delta$, $-x^i_{jk}$ одинаковы для всех связностей этого класса; конкретная связность данного класса выделяется выбором «базисных» составляющих $a^i(x^j)$, $\xi^i(x^j)$.

**Следствие 2.** *Если функции $a^i(x^j)$ равны нулю, то в классе $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}$ выделяется семейство симметричных аффинных связностей, зависящих от функций $\xi^i(x^j)$, с тензором деформации*

$$\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^1_{22}=0,\quad 2\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^1_{12}=2\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^1_{21}=\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^2_{22}=\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^1_{12}+\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^1_{21}=\xi^i(x^j)\cdot\frac{x^1_i}{\Delta},$$
$$\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^2_{11}=0,\quad 2\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^2_{12}=2\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^2_{21}=\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^1_{11}=\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^2_{12}+\overset{\circ\circ}{\gamma}{}^2_{21}=-\xi^i(x^j)\cdot\frac{x^2_i}{\Delta}.$$

*Кривизна этой связности равна нулю тогда и только тогда, когда функции $\xi^i(x^j)$ равны нулю. Следовательно, единственной плоской связностью этого семейства является каноническая плоская связность с тензором деформации $\gamma^i_{jk}=0$.*

**5. Структура тензора кручения аффинной связности в расслоении линейных реперов.** Рассматривая разность компонент тензора деформации $\gamma^1_{12}$, $\gamma^1_{21}$ и $\gamma^2_{12}$, $\gamma^2_{21}$ (19) с учетом (20) или решая дифференциальные уравнения (7) на $X_2$, $i,j,k,\ldots=1,2$, приходим к тому, что две компоненты тензора кручения $T^i_{jk}$ существенно зависят от двух функций $a^j$ с базисными координатами $x^k$, т.е. справедлива следующая теорема.

**Теорема 2** (см. [15]). *Тензор кручения $T^i_{jk}$ $(i,j,k,\ldots=1,2)$ аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием $X_2$, в общем случае имеет вид*

$$T^i_{12}=a^j\cdot\frac{x^i_j}{\Delta},$$

*где $\Delta=\det(x^i_j)$, функции $a^j=a^j(x^k)$ образуют относительный вектор веса* 1.

Решая дифференциальные уравнения (7) при $i,j,k,\ldots=1,2,3$, можно показать, что девять компонент тензора кручения $T^i_{jk}$ существенно зависят от девяти функций $a^j$, $b^k$, $c^j$ базисных координат $x^k$, т.е. справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Тензор кручения $T^i_{jk}$ $(i,j,k,\ldots=1,2,3)$ аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над трехмерным многообразием $X_3$, в общем случае имеет вид*

$$T^i_{12}=\frac{1}{\Delta}(a^j x^i_j\cdot b^k x^3_k+c^j x^3_j),$$
$$T^i_{31}=\frac{1}{\Delta}(a^j x^i_j\cdot b^k x^2_k+c^j x^2_j),$$
$$T^i_{23}=\frac{1}{\Delta}(a^j x^i_j\cdot b^k x^1_k+c^j x^1_j),$$

*где* $\Delta=\det(x^i_j)$, $a^j=a^j(x^k)$, $b^k=b^k(x^l)$, $c^j=c^j(x^k)$.

«Слоевые» составляющие $x^i_j/\Delta$ кручения $T^i_{jk}$ одинаковы для любой связности; кручение конкретной связности определяется «базисными» составляющими $a^i(x^j)$, $b^i(x^j)$, $c^i(x^j)$.

Известно, что пространства нулевой кривизны характеризуются существованием $m$ независимых полей абсолютно параллельных векторов или ковекторов (см. [12, с. 134]). Рассмотрим в касательном пространстве $TX_m$ новый базис $\{u_i\}$, векторы (векторные поля) которого раскладываются в исходном базисе $\{\varepsilon_i\}$ по формуле $u_i=f^j_i\varepsilon_j$, причем функции $f^i_j=f^i_j(x^k,x^l_s)$ образуют невырожденную матрицу, т.е. $\det(f^i_j)\neq 0$. При дифференцировании векторов $u_i$ получим

$$du_i=(df^j_i+f^k_i\omega^j_k)\varepsilon_j+f^j_i\varepsilon_{jk}\omega^k.$$

Если функции $f^i_j$ удовлетворяют уравнениям

$$df^i_j+f^k_j\omega^i_k=f^i_{j,k}\omega^k, \tag{21}$$

то каждый из векторов $u_i$ относительно инвариантен (неподвижен при фиксации точки), а их смещения определяются уравнениями $du_i=u_{i,k}\omega^k$, где введено обозначение

$$u_{i,k}=f^j_{i,k}\varepsilon_j+f^j_i\varepsilon_{jk}. \tag{22}$$

Таким образом, объект $f=(f^i_j)$, удовлетворяющий уравнениям (21), представляет собой $m$ векторов $(f^i_1,\ldots,f^i_m)$, в совокупности образующих невырожденный объект. Из уравнений (21) следует, что

$$df^i_j(\varepsilon_k)=f^i_{j,l}\omega^l(\varepsilon_k)-f^l_j\omega^i_l(\varepsilon_k)=f^i_{j,k}+f^l_jx^i_{lk}.$$

Учитывая равенства

$$\partial_{\varepsilon_k}f^i_j=\varepsilon_k(f^i_j)=df^i_j(\varepsilon_k),$$

получим

$$\partial_{\varepsilon_k}f^i_j=f^i_{j,k}+f^l_jx^i_{lk}. \tag{23}$$

Значит, пфаффовы производные $f'=(f^i_{j,k})$ имеют вид

$$f^i_{j,k}=\partial_{\varepsilon_k}f^i_j-f^l_jx^i_{lk}. \tag{24}$$

Переходя в уравнениях (21) к натуральному кобазису, находим частные производные

$$\partial_k f^i_j=f^l_jx^i_{ls}x^s_k+x^l_kf^i_{j,l},\quad \partial^l_k f^i_j=\delta^i_kf^s_j\overset{*}{x}{}^l_s. \tag{25}$$

Пфаффовы производные $f^i_{j,k}$ объекта $f^i_j$ удовлетворяют сравнениям $\Delta f^j_{i,k}+f^l_i\omega^j_{lk}\equiv 0 \pmod{\omega}^j$. Для обратного тензора $\overset{*}{f}{}^i_j$ $(f^i_k\overset{*}{f}{}^k_j=\delta^i_j)$ справедливы сравнения $d\overset{*}{f}{}^i_j-\overset{*}{f}{}^i_k\omega^k_j\equiv 0$.

Заменяя в уравнениях (21) слоевые формы $\omega^i_k$ на формы связности $\tilde\omega^i_k=\omega^i_k-\Gamma^i_{kl}\omega^l$, получим $\nabla f^i_j=\omega^k\nabla_kf^i_j$ (см. [6, с. 65]), где $\nabla f^i_j=df^i_j+f^k_j\tilde\omega^i_k$ — ковариантный дифференциал,

$$\nabla_kf^i_j=f^i_{j,k}-f^l_j\Gamma^i_{lk}\,— \tag{26}$$

ковариантные производные невырожденного тензора $f^i_j$.

**Замечание 1.** 1. Выражение (26) представляет собой ковариантные производные для $m$ контравариантных (т.е. одноиндексных) тензоров, поэтому оно содержит одно слагаемое с компонентами связности $\Gamma$.

2. Если вместо форм связности $\tilde{\omega}^i_k = \omega^i_k - \Gamma^i_{kl}\omega^l$ рассматривать формы связности с плюсом $\tilde{\omega}^i_k = \omega^i_k + \Gamma^i_{kl}\omega^l$, то выражение (26) совпадет с классическим выражением ковариантных производных вектора, где второе слагаемое с плюсом (см., например, [18]). В традиционном задании связности методом Лаптева формы связности задаются в виде разности слоевых форм и линейной комбинации базисных форм (см., например, [10, с. 166]).

Внешний дифференциал от ковариантных дифференциалов $\nabla f^i_j$ приведем к виду

$$D(\nabla f^i_j) = \nabla f^k_j \wedge \omega^i_k + \frac{1}{2} f^k_j R^i_{kls}\omega^l \wedge \omega^s. \tag{27}$$

Ковариантные производные $\nabla_k f^i_j$ образуют тензор, его обращение в нуль инвариантно и задает абсолютный параллелизм векторов $u_i$. Равенство нулю ковариантных производных $\nabla_k f^i_j$ (26) эквивалентно соотношению $f^j_{i,k} = f^l_i \Gamma^j_{lk}$. Учитывая невырожденность коэффициентов $f^l_i$, из последнего соотношения можно найти выражение объекта связности $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(f, f')$ через тензор $f = (f^i_j)$ и его пфаффовы производные $f' = (f^i_{j,k})$: $\Gamma^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j f^i_{l,k}$. При этом векторы $u_i$ переносятся абсолютно параллельно в связности $\Gamma^i_{jk}$, значит, связность является плоской, т.е. $R^i_{kls} = 0$. Тогда (27) упрощается и принимает вид $D(\nabla f^i_j) = \nabla f^k_j \wedge \omega^i_k$. Будем обозначать эту плоскую связность $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$, т.е.

$$\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = f^i_{l,k}\overset{*}{f}{}^l_j, \tag{28}$$

а с учетом (24)

$$\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j \partial_{\varepsilon_k} f^i_l - x^i_{jk}.$$

Учитывая выражение (9) для горизонтальных векторов, из (22) получим

$$u_{i,k} = f^j_i \tilde{\varepsilon}_{jk} + \Big(f^j_{i,k} - f^l_i \overset{f}{\Gamma}{}^j_{lk}\Big)\varepsilon_j.$$

Относительно плоской связности $\overset{f}{\Gamma}{}^l_{jk}$ (28) пфаффовы производные $u_{i,k}$ векторов $u_i$ нового репера линейно выражаются через горизонтальные векторы $\tilde{\varepsilon}_{jk}$ связности $\overset{f}{\Gamma}{}^l_{jk}$, т.е. $u_{i,k} = f^j_i \tilde{\varepsilon}_{jk} \in HT^2X_m$. При этом $du_i = f^j_i \tilde{\varepsilon}_{jk}\omega^k$, т.е. векторы $u_i$ переносятся параллельно в связности $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$, если они смещаются в горизонтальном подпространстве $HT^2X_m$.

Таким образом, невырожденный тензор $f^i_j$, удовлетворяющий уравнениям (21), порождает объект $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$ (28) плоской связности.

Обратно, если связность является плоской, то векторы $u_i$ переносятся абсолютно параллельно, ковариантные производные (26) равны нулю, а объект связности выражается по формуле (28), т.е. объект связности порождается невырожденным тензором $f^i_j$.

**Замечание 2.** Если $f^i_j = x^i_j$, то, сравнивая (21) с $dx^i_j$, получим $f^i_{j,k} = -x^i_{lk}x^l_j$. Тогда из (28) следует, что $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$ является объектом канонической плоской связности.

**Замечание 3.** В [23] эта задача была решена чисто аналитически: набор тензоров $f^i_j$ со специальными полями

$$df^i_j + f^k_j \omega^i_k = f^l_j \Gamma^i_{lk}\omega^k \quad (\det(f^i_j) \neq 0)$$

позволяет построить объект плоской связности $\Gamma^i_{lk}$, т.е. аффинная связность, порожденная пфаффовыми производными этого специального невырожденного тензора, является плоской.

Подставляя (28) в (23), получим

$$\partial_{\varepsilon_l} f^i_j = f^k_j(\overset{f}{\Gamma}{}^i_{kl} + x^i_{kl}). \tag{29}$$

Используя объект деформации $\overset{f}{\gamma}{}^i_{kl} = \overset{f}{\Gamma}{}^i_{kl} + x^i_{kl}$ связности $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{kl}$, выражение (29) запишем в виде $\partial_{\varepsilon_l} f^i_j = f^k_j \overset{f}{\gamma}{}^i_{kl}$, откуда деформация $\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk}$ связности $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk}$ выражается по формуле

$$\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j \partial_{\varepsilon_k} f^i_l,$$

или подробно

$$\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^s_j \overset{*}{x}{}^l_k \partial_l f^i_s. \tag{30}$$

Подставляя (30) в выражения (8) для кручения и кривизны, получим

$$\overset{f}{T}{}^i_{jk} = \overset{f}{\gamma}{}^i_{[jk]} = \overset{*}{f}{}^s_{[j} \overset{*}{x}{}^l_{k]} \partial_l f^i_s = \overset{*}{f}{}^s_{[j} \partial_{\varepsilon_{k]}} f^i_s, \quad \overset{f}{R}{}^i_{jkl} = 0.$$

Симметрия и несимметрия объекта связности не связана с симметрией или несимметрией слоевых координат $x^i_{jk}$.

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 4.** *Невырожденный тензор $f^i_j$, удовлетворяющий уравнениям* (21) *и определяющий $m$ линейно независимых абсолютно параллельных векторных полей $u_i = f^j_i \varepsilon_j$, порождает тензор деформации $\overset{f}{\gamma}{}^i_{jk}$* (30) *несимметрической плоской связности $\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{f}{\gamma}{}^i_{jk} - x^i_{jk}$ в расслоении $L(X_m)$ с объектом*

$$\overset{f}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk} + \overset{*}{f}{}^s_j \overset{*}{x}{}^l_k \partial_l f^i_s,$$

*имеющим кручение $\overset{f}{T}{}^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^s_{[j} \overset{*}{x}{}^l_{k]} \partial_l f^i_s$.*

Аналогично можно рассматривать абсолютно параллельные ковекторные поля $\theta^i = f^i_j \omega^j$ для плоской аффинной связности.

Рассмотрим плоскую аффинную связность, заданную не в расслоении линейных реперов $L(X_m)$, а на самом многообразии $X_m$. При таком рассмотрении компоненты объекта связности зависят от локальных координат $x^i$, а величины $x^i_k$, $x^i_{jk}$ — это матрицы частных производных преобразования $x^i = x^i(y^j)$. Возьмем $m$ тензоров $(f^i_1, \dots, f^i_m)$, в совокупности образующих невырожденный объект $f = (f^i_j)$ $(\det(f^i_j) \neq 0)$ со следующим законом преобразования при переходе к новым координатам:

$$\bar{f}^i_j = f^k_j \overset{*}{x}{}^i_k, \quad f^i_j = \bar{f}^k_j x^i_k, \tag{31}$$

при этом $f^i_j = f^i_j(x^k)$. Дифференцируя выражение $(31)_2$ по $x^k_l$, получим

$$\partial^l_k f^i_j = \bar{f}^s_j \partial^l_k x^i_s = f^t_j \overset{*}{x}{}^s_t \delta^l_s \delta^i_k = \delta^i_k f^t_j \overset{*}{x}{}^l_t,$$

что совпадает с $(25)_2$. Из $(31)_2$ выразим $\overset{*}{\bar{f}}{}^i_j = x^k_j \overset{*}{f}{}^i_k$.

Рассмотрим объект (ср. [12, с. 135]) $F^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j \frac{\partial f^i_l}{\partial x^k}$. Преобразуя $\bar{F}^i_{jk} = \overset{*}{\bar{f}}{}^l_j \frac{\partial \bar{f}^i_l}{\partial y^k}$, получим закон, аналогичный закону для компонент связности (см. [23]; [22, с. 246]):

$$\bar{F}^i_{jk} = x^p_j x^t_k F^s_{pt} \overset{*}{x}{}^i_s - x^p_{jk} \overset{*}{x}{}^i_p,$$

причем $\overset{*}{x}{}^i_{st} = -\overset{*}{x}{}^i_p x^p_{rq} \overset{*}{x}{}^r_s \overset{*}{x}{}^q_t$ (см., например, [22, с. 154]).

Абсолютно параллельные ковекторные поля $\theta^i = f^i_j \omega^j$ порождают плоскую связность, но не симметрическую. Для задания плоской и симметрической связности рассмотрим формы

$$ds^i = s^i_{,j} \omega^j, \tag{32}$$

где $s^i = s^i(x^j)$ — функции базисных координат $x^i$, причем $\det(s^i_{,j}) \neq 0$; $s = (s^i) = (s^1, \dots, s^m)$ — набор функций. Выражение на пфаффовы (обобщенные) производные $s^i_{,j}$ имеют вид

$$s^i_{,j} = \overset{*}{x}{}^k_j \partial_k s^i. \tag{33}$$

Равенство (33) можно записать иначе $s^i_{,j} = \partial_{\varepsilon_j} s^i$, где $\partial_{\varepsilon_j} s^i = \varepsilon_j(s^i) = ds^i(\varepsilon_j)$. Продолжая (32), получим уравнения на производные $s^i_{,j}$

$$ds^i_{,j} - s^i_{,k}\omega^k_j = s^i_{,jk}\omega^k \quad (s^i_{,jk} = s^i_{,kj}). \tag{34}$$

Действуя формами $ds^i = s^i_{,j}\omega^j$ на векторы $u_i = f^j_i\varepsilon_j$, получим $ds^i(u_j) = s^i_{,k}\omega^k(f^l_j\varepsilon_l) = s^i_{,k}f^k_j$. Кобазис $\{ds^i\}$ сопряжен базису $\{u_i\}$, если $s^i_{,k}f^k_j = \delta^i_j$, т.е. $s^i_{,k} = \overset{*}{f}{}^k_i$. Тогда из (33) находим

$$\overset{*}{s}{}^i_{,j} = x^i_k \frac{\partial x^k}{\partial s^j}. \tag{35}$$

Пусть ковекторы $ds^i$ (32) переносятся абсолютно параллельно. Из уравнений (34) следует, что ковариантные производные объекта $s^i_{,j}$ в связности $\Gamma^i_{jk}$ имеют вид $\nabla_k s^i_{,j} = s^i_{,jk} + s^i_{,l}\Gamma^l_{jk}$ и обращаются в нуль, если $s^i_{,jk} = -s^i_{,l}\Gamma^l_{jk}$, т.е. $\Gamma^i_{jk} = -\overset{*}{s}{}^i_{,l}s^l_{,jk}$. Поскольку ковариантные производные $\nabla_k s^i_{,j}$ равны нулю, а пфаффовы производные $s^l_{,jk}$ симметричны, то кривизна и кручение этой связности равны нулю. Обозначим ее объект $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk}$, т.е.

$$\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk} = -\overset{*}{s}{}^i_{,l}s^l_{,jk}. \tag{36}$$

Из уравнений (34) следует, что $ds^i_{,j}(\varepsilon_k) = s^i_{,jk} - s^i_{,l}x^l_{jk}$, т.е. $\partial_{\varepsilon_k} s^i_{,j} = s^i_{,jk} - s^i_{,l}x^l_{jk}$. Значит, пфаффовы производные $s^i_{,jk}$ имеют вид

$$s^i_{,jk} = \partial_{\varepsilon_k} s^i_{,j} + s^i_{,l}x^l_{jk}. \tag{37}$$

Из соотношений (36), (37) получим, что $s^i_{,l}(\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk} + x^l_{jk}) = -\partial_{\varepsilon_k} s^i_{,j}$, откуда для деформации $\overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk}$ связности $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{lk}$ (36) имеем

$$\overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk} = -\overset{*}{s}{}^i_{,l}\partial_{\varepsilon_k} s^l_{,j},$$

а с учетом (35) получим симметричную деформацию

$$\overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk} = -x^i_t \frac{\partial x^t}{\partial s^l} \overset{*}{x}{}^p_j \overset{*}{x}{}^q_k \partial_{pq} s^l.$$

Таким образом, верно следующее утверждение.

**Теорема 5.** *Набор $m$ линейно независимых абсолютно параллельных форм $ds^i(x^j)$ (32) порождают тензор деформации $\overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk} = -x^i_t \frac{\partial x^t}{\partial s^l} \overset{*}{x}{}^p_j \overset{*}{x}{}^q_k \partial_{pq} s^l$ симметрической плоской аффинной связности $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{fs}{\gamma}{}^i_{jk} - x^i_{jk}$ в расслоении $L(X_m)$ с объектом*

$$\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk} - x^i_t \frac{\partial x^t}{\partial s^l} \overset{*}{x}{}^p_j \overset{*}{x}{}^q_k \partial_{pq} s^l.$$

Если объект аффинной связности строится в результате двукратного вычисления пфаффовых производных объекта $s^i$, то кривизна и кручение этой связности равны нулю.

Если наборы $\{ds^i\}$, $\{u_i\}$ сопряжены, т.е. $s^i_{,k} = \overset{*}{f}{}^i_k$, то $\gamma^i_{jk} = -f^i_l \partial_{\varepsilon_k} \overset{*}{f}{}^l_j$. Учитывая $\delta^i_j = f^i_k \overset{*}{f}{}^k_j$, получим $\gamma^i_{jk} = \overset{*}{f}{}^l_j \partial_{\varepsilon_k} f^i_l$, что совпадает с уравнениями (21). Но там $f^i_j$ не являются производными, а в данном случае $s^i_{,j}$ — это пфаффовы производные.

**Замечание 4.** Если $s^i = x^i$, то $s^i_{,j} = \overset{*}{x}{}^i_j$, а связность $\overset{fs}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$ является канонической плоской связностью $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$ (см. [23]).

Обратимся снова к связности, заданной на многообразии $X_m$, а не в расслоении реперов $L(X_m)$. Рассмотрим формы $ds^i = s^i_{,j}dx^j$, где $s^i = s^i(x^j)$ — функции базисных координат $x^j$, $s^i_{,j} = \partial_j s^i$, причем $\det(s^i_{,j}) \neq 0$. Поскольку $s = (s^i) = (s^1, \dots, s^m)$ — набор функций, то набор их градиентов $s^i_{,j}$ образует набор ковариантных тензоров, для которых ковариантные производные имеют вид $\nabla_k s^i_{,j} = \partial_k s^i_{,j} - s^i_{,l}\Gamma^l_{jk}$. Обращение их в нуль дает $s^i_{,l}\Gamma^l_{jk} = \partial_k s^i_{,j}$, откуда $\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial s^t}\frac{\partial s^t}{\partial x^j \partial x^k}$. Этот объект удовлетворяет уравнениям для компонент объекта связности; он симметричен и его кривизна равна нулю. Таким образом, справедлива

**Теорема 6.** *Объект*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial s^t}\frac{\partial s^t}{\partial x^j \partial x^k},$$

*порожденный функциями* $s^i = s^i(x^j)$, $\det(\partial_k s^i) \neq 0$, *является объектом симметрической плоской аффинной связности на многообразии, т.е.* $m$ *линейно независимых абсолютно параллельных форм* $ds^i = \partial_k s^i dx^j$ *порождают объект симметрической и плоской аффинной связности на многообразии* $X_m$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.
2. *Белова О. О.* Связности трех типов в расслоении над областью проективного пространства// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2003. — № 34. — С. 21–26.
3. *Белова О. О.* Тензор кручения подсвязности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2011. — № 42. — С. 7–11.
4. *Белова О. О.* Индуцирование аналога связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — № 45. — С. 23–29.
5. *Белова О. О.* Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 812–822.
6. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1979. — *9*. — С. 5–246.
7. *Каган Ф. И.* Аффинные связности на касательном расслоении// Изв. вузов. Мат. — 1975. — № 2. — С. 31—42.
8. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.
9. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
10. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1966. — *1*. — С. 139–189.
11. *Морозов О. И.* Метод подвижного корепера в геометрии дифференциальных уравнений/ Дисс. на соиск. уч. степ. д-ра физ.-мат. наук — М., 2010.
12. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
13. *Полякова К. В.* Специальные аффинные связности первого и второго порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — № 46. — С. 114–128.
14. *Полякова К. В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 1. — С. 84–94.
15. *Полякова К. В.* О тензоре кручения аффинной связности на двумерном и трехмерном многообразиях// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2021. — № 52. — С. 83–96.
16. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка// Мат. заметки. — 1981. — *29*, № 2. — С. 279–290.
17. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 73–80.
18. *Столяров А. В.* Дифференциальная геометрия полос// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1978. — *10*. — С. 25–54.
19. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград, 1998.
20. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 185–193.

21. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. — North-Holland, 1993.
22. *Kolář I., Michor P. W., Slovák J.* Natural Operations in Differential Geometry. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.
23. *Polyakova K. V.* Generators of flat and symmetric flat affine connections// Proc. Int. Conf. “Problems of Modern Topology and Its Applications”. — Tashkent, 2016. — P. 82–83.
24. *Shevchenko Yu., Skrydlova E.* Interpretation of classical affine connection by means Laptev affine connection// Proc. Int. Conf. “Geometry Days in Novosibirsk–2018”. — Novosibirsk: Sobolev Inst. Math., 2018. — P. 28.

Полякова Катерина Валентиновна
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград
E-mail: polyakova_@mail.ru