ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1972 МАТЕМАТИКА № 10 (125)

УДК 517.948

Л. А. Калякин

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

Многие некорректные в классическом смысле задачи математической физики сводятся к уравнениям первого рода

$$A_0 u = f \tag{1}$$

с положительным оператором A_0. Регуляризация такого типа задач состоит обычно [1] — [3] в добавлении к A_0 положительно определенного оператора A_1 с малым множителем, например, εE, где $\varepsilon > 0$, E — тождественный оператор. Рассматривается уравнение

$$\varepsilon A_1 u + A_0 u = f \tag{2}$$

и доказывается, что решение задачи (2) сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи (1).

В настоящей работе доказывается сходимость решений уравнения (2) к решению уравнения (1) для широкого класса операторов, включающего случаи, рассмотренные в [1] — [3]. Предполагается лишь, что A_0 — положительный, а A_1 — неотрицательный (вообще говоря, неограниченные) операторы.

Далее рассматривается метод Ритца для регуляризованного уравнения (2) и показывается, что приближенные решения $u_{n\varepsilon}$, полученные этим методом, сходятся к точному решению u_ε равномерно относительно ε для $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha$.

Пусть в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u, v) задано уравнение вида (1):

$$A_0 u = f, \ f \in H,$$

где A_0 — линейный симметрический положительный оператор с областью определения $D(A_0)$, и его расширение по Фридрихсу также положительно. Зададим в H симметрический неотрицательный оператор A_1 и предположим, что пересечение $D(A_1) \cap D(A_0)$ плотно в H. Рассмотрим на множестве $D(A_\varepsilon) = \{D(A_1) \cap D(A_0), \ \varepsilon > 0; \ D(A_0), \ \varepsilon = 0\}$ положительный оператор $A_\varepsilon = \varepsilon A_1 + A_0$, $\varepsilon \geqslant 0$. Обозначим через H_ε новое гильбертово пространство, полученное замыканием $D(A_\varepsilon)$ по метрике квадратичной формы $(A_\varepsilon u, u)$. Билинейная форма $(A_\varepsilon u, v)$, заданная на $D(A_\varepsilon)$, индуцирует в H_ε скалярное произведение $[u, v]_\varepsilon$. Норма в H_ε равна $\|u\|_\varepsilon = [u, u]_\varepsilon^{1/2}$.

Если оператор A_ε положительный, но не положительно определенный, то, вообще говоря, H_ε не вкладывается в H — среди идеальных элементов пространства H_ε могут оказаться и такие, которым

не соответствуют никакие элементы пространства H. Но заметим, что при ε, $\varepsilon_1 > 0$ множества H_ε и H_{ε_1} совпадают и $H_\varepsilon \subseteq H_0$.

Известно ([4], с. 23), что уравнение

$$A_\varepsilon u = f, \ f \in H, \tag{3}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда скалярное произведение (f, u) является ограниченным в метрике H_ε функционалом:

$$|(f, u)| \leqslant C \|u\|_\varepsilon. \tag{4}$$

Область значений расширенного оператора A_ε обозначим через R_ε. Решение u_ε задачи (3) может и не принадлежать H, но для всех $v \in H_\varepsilon$ выполняется

$$[u_\varepsilon, v]_\varepsilon = (f, v). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть множество элементов пространства H_ε плотно в пространстве H_0 и уравнение* (1) *разрешимо. Тогда решение u_ε задачи* (3) *сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению u_0 задачи* (1) *в метрике H_0: $\|u_\varepsilon - u_0\|_0 \to 0$.*

Доказательство аналогично приведенному в [8]. Прежде всего отметим, что из монотонности по ε нормы $\|u\|_\varepsilon$ ($\|u\|_0 \leqslant \|u\|_\varepsilon$) и условия (4) следует $R_0 \subseteq R_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Используя тождество (5) и монотонность $\|u\|_\varepsilon$, получаем для $\varepsilon \geqslant \varepsilon_1 \geqslant 0$

$$\|A_\varepsilon^{-1} f\|_\varepsilon^2 = [A_\varepsilon^{-1} f, A_\varepsilon^{-1} f]_\varepsilon = (f, A_\varepsilon^{-1} f) = [A_{\varepsilon_1}^{-1} f, A_\varepsilon^{-1} f]_{\varepsilon_1} \leqslant$$
$$\leqslant \|A_{\varepsilon_1}^{-1} f\|_{\varepsilon_1} \|A_\varepsilon^{-1} f\|_{\varepsilon_1} \leqslant \|A_{\varepsilon_1}^{-1} f\|_{\varepsilon_1} \|A_\varepsilon^{-1} f\|_\varepsilon.$$

Тем самым для решений уравнения (3) имеем неравенство

$$\|u_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \|u_{\varepsilon_1}\|_{\varepsilon_1}, \quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_1 \geqslant 0, \tag{6}$$

из которого следует равномерная ограниченность величины $\|u_\varepsilon\|_\varepsilon$:

$$\|u_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \|u_0\|_0. \tag{7}$$

Поскольку числа $(f, u_\varepsilon) = [u_\varepsilon, u_\varepsilon]_\varepsilon$ ограничены и не убывают при $\varepsilon \to 0$, то они имеют предел.

Из тождества $[u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}, u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}]_{\varepsilon_1} + \{[u_\varepsilon, u_\varepsilon]_\varepsilon - [u_\varepsilon, u_\varepsilon]_{\varepsilon_1}\} = (f, u_{\varepsilon_1}) - (f, u_\varepsilon)$ для $\varepsilon \geqslant \varepsilon_1 \geqslant 0$ следует неравенство $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}\|_0^2 \leqslant (f, u_{\varepsilon_1}) - (f, u_\varepsilon)$. Из него по критерию Коши вытекает, что u_ε имеют предел $\bar{u}$ в метрике H_0.

Докажем, что $\bar{u} = u_0$. Для любой $v \in H_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, справедливо тождество

$$\{[u_\varepsilon, v]_\varepsilon - [u_\varepsilon, v]_0\} + [u_\varepsilon, v]_0 = (f, v). \tag{8}$$

Поскольку форма $[u_\varepsilon, v]_\varepsilon - [u_\varepsilon, v]_0$ неотрицательна, то

$$|[u_\varepsilon, v]_\varepsilon - [u_\varepsilon, v]_0|^2 \leqslant \{[u_\varepsilon, u_\varepsilon]_\varepsilon - [u_\varepsilon, u_\varepsilon]_0\}\{[v, v]_\varepsilon - [v, v]_0\}.$$

Отсюда и из равномерной ограниченности решений u_ε в H_ε следует, что $|[u_\varepsilon, v]_\varepsilon - [u_\varepsilon, v]_0| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и, тем самым, тождество (8) переходит в соотношение $[\bar{u}, v]_0 = (f, v)$ для всех v из плотного в H_0 множества H_ε. Теорема доказана.

Замечание. Если A_1 — положительно определенный оператор, то, в силу доказанной теоремы, A_ε^{-1} является оператором, регуляризующим уравнение (1) в пространстве H_0; т. е. выполнены условия [5]: 1) A_ε^{-1} определен на всем H; 2) A_ε^{-1} непрерывен; 3) для всякого $v \in H_0$ $A_\varepsilon^{-1} A_0 v \to v$ при $\varepsilon \to 0$.

Для приближенного решения регуляризованного уравнения (2) можно применить метод Ритца. В заметке [6] доказана равномерная по ε сходимость этого метода, когда A_0 — положительно определенный оператор. Отметим, что для справедливости результата [6] достаточно положительности оператора A_0 и непрерывности $\| A_\varepsilon^{-1} f \|_\varepsilon$ по ε. Поскольку из теоремы 1 следует непрерывность по ε величины $\| A_\varepsilon^{-1} f \|_\varepsilon$, то справедлива

Теорема 2. *Пусть A_1 — положительно определенный оператор. Если уравнение* (1) *разрешимо и множество H_ε плотно в пространстве H_0, то приближенные решения $u_{n\varepsilon}$ уравнения* (2), *полученные методом Ритца по полной в H_ε системе $\{\varphi_k\}$, сходятся к точному решению u_ε равномерно относительно ε в метрике пространства H_ε для $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha$, т. е. $\| u_\varepsilon - u_{n\varepsilon} \|_\varepsilon \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$.*

Рассмотрим применение описанного метода, когда правая часть уравнения (1) известна приближенно:

$$\| f_\delta - f_0 \| < \delta; \tag{9}$$

f_δ может вообще не принадлежать $R_0 = A_0(H_0)$.

В этом случае вместо (1) решается задача

$$A_\varepsilon u \equiv \varepsilon A_1 u + A_0 u = f_\delta, \tag{10}$$

где A_1 — положительно определенный оператор, $(A_1 u, u) \geqslant (u, u)$.

Оценим разность между точными решениями уравнений (3) и (10). Так как A_1 — положительно определенный оператор, то для любого $v \in H$ выполняется соотношение $\| A_\varepsilon^{-1} v \|_\varepsilon^2 = (v, A_\varepsilon^{-1} v) \leqslant \| v \| \| A_\varepsilon^{-1} v \| \leqslant \leqslant \| v \| \varepsilon^{-1/2} \| A_\varepsilon^{-1} v \|_\varepsilon$. Отсюда $\| A_\varepsilon^{-1} v \|_\varepsilon \leqslant \varepsilon^{-1/2} \| v \|$. Тем самым получаем оценку, аналогичную [1] (с. 12):

$$\| u_\varepsilon - u_\varepsilon^\delta \|_\varepsilon = \| A_\varepsilon^{-1} f_0 - A_\varepsilon^{-1} f_\delta \|_\varepsilon \leqslant \| f_\delta - f_0 \| / \sqrt{\varepsilon} < \delta / \sqrt{\varepsilon}.$$

Наконец, оценим разность между точным решением u_0 уравнения (1) и приближенным решением $u_{n\varepsilon}^\delta$ (по Ритцу) уравнения (10). Пусть $\{\varphi_k\} \subset H_\varepsilon$ — заданная координатная система для метода Ритца, а $\{\varphi_{k\varepsilon}\}$ — соответствующая ортонормированная в H_ε система:

$$\varphi_{k\varepsilon} = \sum_{i=1}^{k} c_i^k(\varepsilon) \varphi_i.$$

Тогда приближения Ритца по системе $\{\varphi_k\}$ для решений уравнений (3) и (10) можно записать ([7], с. 93) в следующем виде:

$$u_{n\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} [u_\varepsilon, \varphi_{k\varepsilon}]_\varepsilon \varphi_{k\varepsilon}, \quad u_{n\varepsilon}^\delta = \sum_{k=1}^{n} [u_\varepsilon^\delta, \varphi_{k\varepsilon}]_\varepsilon \varphi_{k\varepsilon}.$$

Значит, $\|u_{n\varepsilon} - u^{\delta}_{n\varepsilon}\|^2_{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} [u_{\varepsilon} - u^{\delta}_{\varepsilon}, \varphi_{k\varepsilon}]^2_{\varepsilon} \leqslant \|u_{\varepsilon} - u^{\delta}_{\varepsilon}\|^2_{\varepsilon} < \delta^2/\varepsilon.$

Теперь для разности $u_0 - u^{\delta}_{n\varepsilon}$ имеем неравенство

$$\|u_0 - u^{\delta}_{n\varepsilon}\|_0 \leqslant \|u_0 - u_{\varepsilon}\|_0 + \|u_{\varepsilon} - u_{n\varepsilon}\|_{\varepsilon} + \|u_{n\varepsilon} - u^{\delta}_{n\varepsilon}\|_{\varepsilon} < \\ < \gamma(\varepsilon) + \chi(n) + \delta/\sqrt{\varepsilon},$$

где $\chi(n)$ в силу теоремы 2 не зависит от ε и δ.

Пример 1. Задача Коши для уравнения Лапласа в области Ω, ограниченной кривыми Γ_0 и Γ_1:

$$\Delta u = 0, \quad (11) \qquad u\Big|_{\Gamma_0} = g_1(x, y), \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = g_2(x, y), \quad (12)$$

эквивалентна следующей краевой задаче ([3], с. 251):

$$\Delta\Delta u = f(x, y), \ u\Big|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (13) \qquad \Delta u\,|_{\Gamma_1} = \frac{\partial}{\partial n}\Delta u|_{\Gamma_1} = 0. \quad (14)$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$\Delta\Delta u + \varepsilon u = f(x, y). \quad (15)$$

Решение задачи (15), (13), (14) сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению исходной задачи (11), (12) в метрике

$$\Big\{\iint\limits_{\Omega} (\Delta u)^2\, dxdy\Big\}^{1/2}.$$

Пример 2. Оператор, соответствующий краевой задаче для дифференциального уравнения, эллиптического внутри области, но вырождающегося на границе

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \frac{\partial u}{\partial x}\right) - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (16)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = u(1, y) = 0, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1, \quad (17)$$

является положительным, но не положительно определенным ([4], с. 231). Это уравнение можно регуляризовать добавлением члена εu в левую часть. Метрика пространства H_0 задается интегралом

$$\int_0^1\int_0^1 \left[x^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy. \quad (18)$$

Условия теоремы, очевидно, выполняются, и, следовательно, решение регуляризованного уравнения сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи (16)—(17) в метрике (18).

г. Свердловск

Поступило
13 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. СО АН СССР, 1962.
2. Иванов В. К. О регуляризации линейных операторных уравнений первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 10, с. 50—55.
3. Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., „Мир“, 1970.

4. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., „Наука", 1966.
5. Иванов В. К. О равномерной регуляризации неустойчивых задач. Сиб. матем. журн., т. 7, № 3, 1966, с. 546—558.
6. Калякин Л. А. Метод Ритца для уравнений с малым параметром при старших производных. Матем. заметки, т. 6, вып. 1, 1969, с. 91—96.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
8. Бирман М. Ш. Метод квадратичных форм в задачах о малом параметре при старших производных. Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех. и астр., № 13, вып. 3, 1957, с. 9—12.

Н. Г. КОСАРЕВ. О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА — ГАЛЬПЕРНА

(аннотация статьи, принятой к печати)

Указываются точные классы единственности задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{N} P_{jk}(\partial/\partial x,\ \partial/\partial t)\, u_k(x,\ t) = 0, \tag{1}$$

где $P_{jk}(s,\ \lambda) = \sum_{i=0}^{m_j} p_{jk}^{(i)}(\lambda)\, s^i,\ j,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ N.$

При этом предполагается, что система обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная из (1) формальной заменой $\partial/\partial t$ на λ, разрешима относительно старших производных по x всех неизвестных функций. Случай $N = 1$ исчерпывающие разобран В. М. Борок (ДАН СССР, т. 177, № 4, 1967) и Н. Ю. Иохвидовичем (ДАН СССР, т. 193, № 1, 1970). (Работа поступила в журнал „Математика" 10.XI.1971.)

В. А. КУРЧАТОВ. ОБ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОГО МЕТОДА ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Исследуется сходимость одного нового метода решения функциональных уравнений. Определяются условия, позволяющие установить в окрестности начального приближения существование точного решения и сходимость к нему рассматриваемого процесса. Устанавливается область, где точное решение, к которому сходится процесс при выбранном начальном приближении, единственно. Приводится оценка погрешности приближенных решений. Рассматриваются также некоторые применения доказанных теорем о сходимости метода. (Работа поступила в журнал „Математика" 28.III.1972.)

Ф. Л. ЛИТВИН. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОГИБАЮЩИХ ЛИНИЙ КОНТАКТА ВЗАИМООГИБАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Предполагается заданной в параметрической форме поверхность Σ, образующая при своем движении, как твердое целое, семейство Σ_φ; G — поверхность, огибающая семейство Σ_φ. Линии контакта Σ и G образуют на Σ семейство C, а на G — семейство D. Определяются необходимые условия, которым должны удовлетворять огибающие семейств C и D. (Работа поступила в журнал „Математика" 29.IV.1972.)