*В. В. Рыжков*

# РИМАНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ВЫСШЕГО РОДА. ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ



## ВВЕДЕНИЕ

Известно фундаментальное значение теорем погружения в римановой геометрии. Локальная теорема погружения $n$-мерного риманова пространства в евклидово пространство $\frac{n(n+1)}{2}$ измерений была впервые доказана в работах Жане [12] и Картана [11], хотя гипотеза о возможности такого погружения была высказана еще Шлефли [16]. Впоследствии были предложены различные методы доказательства этой теоремы и ее обобщений. Особый интерес вызвали работы Нэша [15], [14], в которых рассматривались негладкие (класса $C'$) погружения и задача погружения в целом.

Римановы геометрии высшего рода были введены в работах Бомпьяни [3], [4] в связи с задачей изгибания высших порядков (т. е. такого изгибания, при котором остаются инвариантными не только длины дуг, но и кривизны всех линий до определенного порядка). На поверхности $V_n$ евклидова $E_N$ метрическая форма $ds^2$ определяет длины всех кривых, а кривизны всех кривых до порядка $k$—1 могут быть определенным образом выражены через некоторые дифференциальные формы степеней 4, 6, ..., $2k$ (инвариантные формы Бомпьяни). Изгибание порядка $k$ оставляет эти формы инвариантными. Аналогично тому, как обычное риманово пространство можно определить, как дифференцируемое многообразие с заданной на нем положительно определенной метрической формой $ds^2$, риманово пространство рода $k$ определяется заданием $k$ форм $\omega_1=ds^2$, $\omega_2$ ..., $\omega_k$, определяющих не только длины, но и кривизны до порядка $k$—1 всех линий. Основные сведения по геометрии римановых пространств рода $k$ изложены в работах Бомпьяни [5] и [6].

Многие результаты, относящиеся к теории поверхностей и римановой геометрии, получают соответствующее обобщение в римановых геометриях высшего рода; в частности имеется аналог теоремы Бонне об однозначной определенности поверхности двумя квадратичными формами Гаусса. Соответствующая теорема, известная еще Бомпьяни, была вновь доказана Майером и Бурстиным [10], [13].

Вопрос о получении теоремы погружения римановой геометрии рода $k$ в евклидово пространство ставился Бомпьяни и в особенности Бортолотти [8], у которого содержится и попытка доказательства для весьма частного случая.

Доказательство теоремы погружения было найдено автором и очень сжатый набросок его опубликован в 1950 г. [1], [2]; впоследствии были получены еще некоторые варианты теоремы погружения. Полное изложение этих теорем составляет главное содержание предлагаемой статьи. Помимо того, попутно доказываются некоторые теоремы о жесткости поверхности с закрепленной полосой (в некотором смысле неасимптотической), обобщающие аналогичную теорему классической теории поверхностей и результаты Бомпьяни [7].

В главе I нашей работы вводятся основные понятия теории и по ходу дела доказываются некоторые известные результаты (эквивалентность определений изгибания порядка $k$ по Картану и Бомпьяни, теорема Майера-Бурстина). Глава вторая посвящена преобразованию уравнений задачи, позволяющему предсказать произвол решения и дать условия жесткости поверхности с закрепленной полосой. Наконец, третья глава содержит доказательство теорем погружения, сформулированных в § 2 гл. I.

Все получаемые здесь результаты имеют локальный характер и предполагают аналитичность рассматриваемых поверхностей, дифференциальных форм и т. д.

*Глава I*

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

## § 1. ПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

1. Введем некоторые обозначения, относящиеся к аналитической геометрии $N$-мерного евклидова пространства $E_N$. Пространство отнесем к декартовой ортогональной системе координат и положение точки будем определять ее радиус вектором $\mathbf{x}(x^1, x^2, \ldots, x^N)$.

$m$ векторов, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m$, вообще говоря, предполагаемых линейно независимыми, определяют $m$-мерный поливектор. Координатами этого поливектора служат миноры порядка $m$ матрицы, составленной из координат векторов $\mathbf{f}_i$:

$$\begin{pmatrix} f_1^1 \, f_1^2 \ldots f_1^N \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_m^1 \, f_m^2 \ldots f_m^N \end{pmatrix}.$$

Поливектор обозначаем через $\varepsilon = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$; его координаты

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_m} = \begin{vmatrix} f_1^{i_1} \ldots f_1^{i_m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_m^{i_1} \ldots f_m^{i_m} \end{vmatrix}.$$

Поливектор обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{f}_i$ линейно зависимы.

Скалярное произведение двух поливекторов одной размерности определяется следующими формулами; если $\varepsilon = (\mathbf{f}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{f}_m)$, $\varphi = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m)$, то

$$\varepsilon \cdot \varphi = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} \varepsilon^{i_1 \ldots i_m} \varphi^{i_1 \ldots i_m} = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_1\mathbf{g}_1 \, \mathbf{f}_1\mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{f}_1\mathbf{g}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{f}_m\mathbf{g}_1 \, \mathbf{f}_m\mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{f}_m\mathbf{g}_m \end{vmatrix}.$$

Модуль поливектора определяется равенством

$$|\varepsilon| = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{f}_1^2 & \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_1\mathbf{f}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{f}_m\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_m\mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_m^2 \end{vmatrix}}.$$

Матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^2 & \dots & \mathbf{f}_1\mathbf{f}_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{f}_m\mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{f}_m^2 \end{pmatrix},$$

как известно, называется матрицей Грама данной системы векторов $\mathbf{f}_i$; ее положительная определенность является условием вещественности и линейной независимости векторов. Вещественность векторов без их линейной независимости влечет за собой положительную полуопределенность матрицы Грама.

Положение $m$-мерной плоскости определяется заданием какой либо ее точки $\mathbf{a}$ и некоторого, принадлежащего ей $m$-мерного поливектора $\varepsilon = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$. Обозначая текущий радиус-вектор точки этой плоскости через $\mathbf{X}$, мы напишем ее уравнение в виде

$$(\mathbf{X} - \mathbf{a}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m) = 0 \text{ или } (\mathbf{X} - \mathbf{a}, \varepsilon) = 0.$$

Делением на $|\varepsilon|$ можно нормировать уравнение; обозначая единичный поливектор $\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}$ через $\varepsilon^0$, пишем нормальное уравнение плоскости $E_m : (\mathbf{X} - \mathbf{a}, \varepsilon^0) = 0$.

Расстояние от заданной точки $\mathbf{x}$ до плоскости выражается формулой $d = |(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \varepsilon^0)|$, т. е. равно модулю поливектора, получаемого при подстановке в нормальное уравнение плоскости радиус-вектора данной точки вместо текущего радиус-вектора.

**2.** $n$-мерную поверхность пространства $E_N$ задаем параметрическими уравнениями $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^n)$, где $\mathbf{x}(u^i)$ — аналитическая вектор-функция своих аргументов, а векторы $\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независимы в рассматриваемой области. Касательная плоскость поверхности определяется уравнением $(\mathbf{X} - \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = 0$ или $(\mathbf{X} - \mathbf{x}, \varepsilon_1) = 0$, где $\varepsilon_1 = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Мы будем называть ее также 1-соприкасающейся плоскостью поверхности $E_{\rho_1}$; $\rho_1 = n$ — размерность касательной плоскости.

Дифференциальная окрестность второго порядка точки поверхности $\mathbf{x}(u^i)$ определяется первыми и вторыми производными $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_i; \ \mathbf{x}_{ij} \ (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Множество этих векторов обозначаем $L_2$, их линейная оболочка является соприкасающейся плоскостью поверхности (2-соприкасающейся плоскостью $E_{\rho_2}$). Размерность $\rho_2$ удовлетворяет неравенствам

$$n \leqslant \rho_2 \leqslant n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

В случае $\rho_2 = n$ поверхность совпадает со своей касательной плоскостью, условие $\rho_2 = n + \frac{n(n+1)}{2}$ выполнено, если все векторы $L_2$ линейно независимы; будем называть этот случай нормальным. Уравнение $E_{\rho_2}$ в любом случае пишется в виде $(\mathbf{X} - \mathbf{x}, \varepsilon_2) = 0$, где $\varepsilon_2$ — поливектор соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость $E_{\rho_2}$ может быть задана ортогональным дополнением к касательной плоскости $E_{\rho_1}$; обозначая его через $E^{\nu}_{\rho_2}$, напишем $E_{\rho_2} = E_{\rho_1} \oplus E^{\nu}_{\rho_2}$. Всякий вектор, принадлежащий $E_{\rho_2}$ (вектор рода два), представляется единственным образом в виде $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\nu} + \mathbf{a}^{\tau}$, где $\mathbf{a}^{\tau} \in E_{\rho_1}$ и компонента $\mathbf{a}^{\nu}$ ортогональна к $E_{\rho_1}$. В обычной символике

$$\mathbf{x}^{\tau}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij}\mathbf{x}_{k},$$

$$\mathbf{x}^{\nu}_{ij} = \mathbf{x}_{ij} - \Gamma^{k}_{ij}\mathbf{x}_{k},$$

где $\Gamma^{k}_{ij}$ — символы Кристоффеля для метрики $d\mathbf{x}^2 = g_{ij}du^i du^j$ (здесь и далее используется сокращенное обозначение суммирования). Если не оговорено противное, латинские индексы $(i, j, \ldots)$ пробегают значения $1, 2, \ldots, n$.

Вообще, дифференциальная окрестность порядка $s$ определяется заданием векторов

$$\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_t} = \frac{\partial^t \mathbf{x}}{\partial u^{i_1} \ldots \partial u^{i_t}} \quad (1 \leqslant t \leqslant s),$$

т. е. производных $\mathbf{x}$ по всем аргументам до порядка $s$ включительно; множество этих векторов обозначается $L_s$, а их матрица Грама через $\mathbf{G}_s$. Натянутое на них пространство называется $s$-соприкасающейся плоскостью поверхности и обозначается $E_{\rho_s}$; максимальное значение ее размерности (нормальный случай) равно

$$\rho_s = C^1_n + C^2_{n+1} + \ldots + C^s_{n+s-1} = C^s_{n+s} - 1.$$

$E_{\rho_s}$ также разлагается в прямую сумму: $E_{\rho_s} = E_{\rho_{s-1}} \oplus E^{\nu}_{\rho_s}$, где $E^{\nu}_{\rho_s}$ — ортогональное дополнение $E_{\rho_{s-1}}$ в $E_{\rho_s}$. Соответствующее разложение на «тангенциальную» и «нормальную» составляющие имеет место для всякого вектора рода $s$ (т. е.

лежащего в $s$-соприкасающейся плоскости): $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\tau} + \mathbf{a}^{\nu}$, где $\mathbf{a}^{\tau} \in E_{\rho_{s-1}}$, $\mathbf{a}^{\nu} \perp E_{\rho_{s-1}}$.

Таким образом, в точке поверхности определяется последовательность соприкасающихся $E_{\rho_s}$ (для общности точка поверхности обозначается как $E_{\rho_0}$): $E_{\rho_0} \subset E_{\rho_1} \subset E_{\rho_2} \subset \ldots$ .

Каждая следующая плоскость определяется ортогональным дополнением к предыдущей. Начиная с некоторого номера, все эти плоскости совпадают и содержат в себе поверхность. Нас будут, как правило, интересовать, однако, лишь несколько первых плоскостей, с размерностью существенно меньшей, чем $N$. Ясно, что понятие $s$-соприкасающейся плоскости имеет проективный характер, но введение ортогональных дополнений $E^{\nu}_{\rho_s}$ связано уже с метрическим характером задачи.

3. Первая квадратичная форма Гаусса

$$\omega_1 = d\mathbf{x}^2 = g_{ij} du^i du^j, \tag{1.1}$$

определяющая внутреннюю геометрию поверхности, представляет собой главную часть квадрата расстояния между двумя соседними точками поверхности или, как мы скажем для единообразия, главную часть квадрата расстояния от точки поверхности, до ее 0-соприкасающейся плоскости.

Вычислим, вообще, квадрат расстояния (точнее его главную часть) от точки поверхности $\mathbf{x}(u^i + du^i)$ до ее $s$-соприкасающейся плоскости в точке $\mathbf{x}(u^i)$. Уравнение $s$-соприкасающейся плоскости имеет вид

$$(\mathbf{X} - \mathbf{x}(u^i),\ \varepsilon^0_s) = 0$$

(здесь $\varepsilon^0_s$ — единичный поливектор $E_{\rho_s}$). По общему правилу

$$d_s^2 = (\mathbf{x}(u^i + du^i) - \mathbf{x}(u^i),\ \varepsilon^0_s)^2. \tag{1.2}$$

Разлагая разность $\mathbf{x}(u^i + du^i) - \mathbf{x}(u^i)$ в строку Тэйлора и удерживая члены до $(s+1)$-го порядка включительно,

$$\mathbf{x}(u^i + du^i) - \mathbf{x}(u^i) = d\mathbf{x} + \frac{1}{2!} d^2\mathbf{x} + \cdots + \frac{1}{s!} d^s\mathbf{x} + $$
$$+ \frac{1}{(s+1)!} d^{s+1}\mathbf{x} + \ldots, \tag{1.3}$$

мы заметим, что все слагаемые правой части, за исключением последнего из выписанных членов, принадлежат $s$-соприкасающейся плоскости; в силу этого, при подстановке выражения (1.3) в (1.2) можно оставить лишь последнее слагаемое:

$$d_s^2 = \frac{1}{[(s+1)!]^2} (d^{s+1}\mathbf{x} + \ldots,\ \varepsilon^0_s)^2.$$

Главная часть этого выражения (постоянный множитель отбрасываем)

$$\omega_{s+1} = (d^{s+1}\mathrm{x},\ \varepsilon_s^0)^2 \qquad (1.4)$$

представляет из себя дифференциальную форму степени $2(s+1)$ и порядка один. Инвариантность этой формы ясна из ее определения. Когда мы говорим, что эта форма — порядка один, то имеем в виду, что если наложить на $u^i$ какие-либо связи, то все же дифференциалы второго и высших порядков от $u^i$ в выражение формы $\omega_{s+1}$ не войдут, как это легко проверить непосредственно.

Формы $\omega_s$ введены Э. Бомпьяни, им же указан их геометрический смысл и роль в дифференциальной геометрии поверхности. Эти же формы позднее использовались Майером и Бурстиным. Формы $\omega_s$, $1 \leqslant s \leqslant k$, полностью определяются дифференциальной окрестностью порядка $k$; то, что они определяют в свою очередь эту окрестность с точностью до положения в пространстве, также было установлено Э. Бомпьяни. Возможность однозначного (с точностью до движения) определения поверхности заданием этих форм до известного порядка установлена в работе Майера и Бурстина. Основное содержание данной работы состоит в доказательстве (при некоторых ограничительных условиях) независимости этих форм, т. е. возможности по заданным наперед формам $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ построить поверхность, на которой они реализуются.

**4.** В книге [17] Витали использовал другие формы, также определяющие геометрию окрестности порядка $k$ данной поверхности, а именно формы

$$\Omega_s = d^s\mathrm{x}^2,\quad s = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1.5)$$

Легко видеть, что эти формы не обладают свойством инвариантности, за исключением первой из них, $\Omega_1 = \omega_1$. Однако, использование этих форм в некоторых отношениях проще, переход же от одних форм к другим, как мы увидим, не представляет никаких затруднений. Поэтому, в нашей работе мы в основном оперируем формами Витали $\Omega_s = d^s\mathrm{x}^2$ (Витали считал поверхность погруженной в бесконечномерное гильбертово пространство, но Бортолотти [9] показал, что это предположение не играет существенной роли).

Для установления связи между формами $\Omega_s$ и $\omega_s$, заметим, что разлагая вектор $d^s\mathrm{x}$ на составляющие $(d^s\mathrm{x})^\tau$ и $(d^s\mathrm{x})^\nu$, лежащую в $E_{\rho_{s-1}}$ и ортогональную к этой плоскости, мы получим для $\omega_s$ следующие равносильные выражения:

$$\omega_s = (d^s\mathrm{x},\ \varepsilon_s^0)^2 = ((d^s\mathrm{x})^\nu,\ \varepsilon_s^0)^2$$

или, в силу того, что $(d^s\mathrm{x})^\nu$ и $\varepsilon_s^0$ ортогональны,

$$\omega_s = [(d^s\mathrm{x})^\nu]^2 \cdot (\varepsilon_s^0)^2 = [(d^s\mathrm{x})^\nu]^2,$$

так как $\varepsilon_s^0$ — единичный поливектор.

С другой стороны,

$$\Omega_s = d^s\mathrm{x}^2 = [(d^s\mathrm{x})^\tau + (d^s\mathrm{x})^\nu]^2 = [(d^s\mathrm{x})^\tau]^2 + [(d^s\mathrm{x})^\nu]^2.$$

Таким образом,

$$\Omega_s = \omega_s + [(d^s\mathrm{x})^\tau]^2.$$

Положительное слагаемое $[(d^s\mathrm{x})^\tau]^2$ определится уже окрестностью $(s-1)$-го порядка. Например, при $s=2$ можно, как уже отмечалось, писать

$$(d^2\mathrm{x})^\tau = \Gamma^k_{ij}\mathrm{x}_k du^i du^j,$$

где квадрат правой части полностью выражается через коэффициенты метрической формы $g_{ij}du^i du^j$ и их производные. В общем виде это будет следовать из дальнейшего. Таким образом, переход от форм $\omega_s$ к формам $\Omega_s$ и обратно проводится по следующей схеме. Формы первого порядка совпадают: $\omega_1 = \Omega_1$. Следующие две формы $\omega_2$ и $\Omega_2$ отличаются лишь на слагаемое $[(d^2\mathrm{x})^\tau]^2$, выражающееся через первую форму $\omega_1$ (или, что то же $\Omega_1$). Далее, две следующие формы $\omega_3$ и $\Omega_3$ отличаются на слагаемое $[(d^3\mathrm{x})^\tau]^2$, которое может быть выражено через уже известные формы $\omega_1$, $\omega_2$ (или $\Omega_1$, $\Omega_2$). В итоге ясно, что переход от форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ к формам $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ осуществляется посредством дифференцирований и линейных алгебраических действий.

5. Известно, что две совокупности векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m$ и $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ евклидова пространства могут быть приведены в совмещение движением (быть может также с отражением) тогда и только тогда, когда попарно равны скалярные произведения соответствующих векторов: $\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j = \mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$. Таким образом, таблица скалярных произведений некоторой конечной совокупности векторов определяет эти векторы с точностью до движения (включая, возможно, отражение). Так как дифференциальная окрестность поверхности, при заданном ее порядке $k$, определяется векторами

$$\mathrm{x}_{i_1 \ldots i_s} \quad (1 \leqslant s \leqslant k),$$

то ясно, что ее можно задать таблицей скалярных произведений этих векторов

$$g_{i_1 \ldots i_s; j_1 \ldots j_t} = \mathrm{x}_{i_1 \ldots i_s}\mathrm{x}_{j_1 \ldots j_t} \quad (s, t \leqslant k). \tag{1.6}$$

Все эти произведения мы будем называть символами Кристоффеля; удобно классифицировать их по порядку образующих их производных, относя к типу $(s, t)$ те, которые образованы, как произведение производной $\mathrm{x}$ порядка $s$ на производную порядка $t$. Можно также говорить, что дифференциальная окрестность порядка $k$ определяется матрицей Грама $\mathfrak{G}_k$.

Таким образом, чтобы показать, что некоторое поле геометрических объектов определяет дифференциальную геометрию поверхности до порядка $k$ включительно, следует показать, что оно позволяет восстановить матрицу $\mathfrak{G}_k$ (точнее поле матрицы $\mathfrak{G}_k$). Введем некоторые дифференциальные формы, рассмотрение которых заменяет рассмотрение символов Кристоффеля. Мы назовем эти формы формами Кристоффеля.

Пусть $du^i$ и $\delta u^i$ — два ряда дифференциалов независимых переменных и $d$ и $\delta$ — соответствующие символы дифференцирования:

$$d = \frac{\partial}{\partial u^i} du^i, \quad \delta = \frac{\partial}{\partial u^i} \delta u^i, \tag{1.7}$$

которые мы будем считать перестановочными: $d\delta = \delta d$; это не налагает ограничений на числовые значения $du^i$, $\delta u^i$ в фиксированной точке $u^i$. Формами Кристоффеля мы называем формы

$$\Omega_{s,t}^{p,q} = d^{s-p}\delta^p \mathrm{x} d^{t-q}\delta^q \mathrm{x}. \tag{1.8}$$

Очевидно, наши основные формы $\Omega_s$ являются их частным случаем: $\Omega_s = \Omega_{s,s}^{0,0}$. Связь форм и символов Кристоффеля дается следующими очевидными формулами

$$\Omega_{s,t}^{p,q} = g_{i_1 \ldots i_{s-p}\, j_1 \ldots j_p; k_1 \ldots k_{t-q}\, l_1 \ldots l_q} \times$$
$$\times\, du^{i_1} \ldots du^{i_{s-p}} \delta u^{j_1} \ldots \delta u^{j_p} du^{k_1} \ldots du^{k_{t-q}} \delta u^{l_1} \ldots \delta u^{l_q},$$

а задание одной формы $\Omega_{s,t}^{0,t} = d^s \mathrm{x} \delta^t \mathrm{x}$, ввиду алгебраической независимости $du^i$, $\delta u^i$ сразу определяет все символы типа $(s, t)$. При $s = t$ формы и символы Кристоффеля, следуя Бомпьяни, называем главными.

Оказывается, что, имея основные формы $\Omega_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, можно получить все формы Кристоффеля $\Omega_{s,t}^{p,q}$ при $s + t \leqslant 2k + 1$. Используем процесс поляризации дифференциальной формы. Пусть дана некоторая дифференциальная форма степени $m$, которую мы обозначим $\Phi(d^m)$. Заменим в ней символ дифференцирования $d$ через $d + \delta$ и, раскрыв все скобки, соберем члены одинаковой степени относительно $du^i$ и $\delta u^i$. Получим разложение вида

$$\Phi\,[(d + \delta)^m] = \sum_{\mu=0}^{m} C_m^{\mu} \Phi\,(d^{m-\mu}, \delta^{\mu}), \tag{1.9}$$

где форма $\Phi(d^{m-\mu}, \delta^{\mu})$ имеет степень $m - \mu$ относительно $du^i$ и степень $\mu$ относительно $\delta u^i$. Постоянные множители введены для удобства. Форма $\Phi(d^{m-\mu}, \delta^{\mu})$ называется $\mu$-ой полярной формой для $\Phi(d^m)$. Например, для формы $\Omega_1 = dx^2$ полярные формы получаются так:

$$[(d+\delta)\,x]^2 = dx^2 + 2dx\delta x + \delta x^2,$$

$$\text{откуда } \Omega_1(d^2, 1) = dx^2,\ \Omega_1(d, \delta) = dx\delta x,\ \Omega_1(1, \delta^2) = \delta x^2.$$

Нетрудно через найденные формы выразить и формы Кристоффеля типа (2,1): находим, например,

$$\Omega_{2,1}^{0,0} = d^2x dx = \frac{1}{2} d\,(dx^2),$$

$$\Omega_{2,1}^{0,1} = d^2x\delta x = d\,(dx\delta x) - \frac{1}{2}\delta\,(dx^2)$$

и т. д.

Напишем еще полярные формы для $\Omega_2$; известный уже процесс дает нам

$$\Omega_2(d^4, 1) = (d^2x)^2,\ \Omega_2(d^3, \delta) = d^2x d\delta x,$$

$$\Omega_2(d^2, \delta^2) = \frac{1}{3} d^2x\delta^2x + \frac{2}{3}(d\delta x)^2 = \frac{1}{3}\Omega_{2,2}^{0,2} + \frac{2}{3}\Omega_{2,2}^{1,1},$$

$$\Omega_2(d, \delta^3) = d\delta x\delta^2 x,\quad \Omega_2(1, \delta^4) = (\delta^2x)^2.$$

Из величин типа (2,2) остаются неизвестными $\Omega_{2,2}^{0,2}$ и $\Omega_{2,2}^{1,1}$, но они связаны соотношением $\frac{1}{3}\Omega_{2,2}^{0,2} + \frac{2}{3}\Omega_{2,2}^{1,1} = \Omega_2(d^2, \delta^2)$. С другой стороны, величина

$$D^2(dx^2) = d^2(\delta x^2) - 2d\delta\,(dx\delta x) + \delta^2(dx^2),$$

выражаемая через формы типа (1,1), равна, как показывает прямое вычисление,

$$D^2(dx^2) = 2\,[(d\delta x)^2 - d^2x\delta^2x] = 2\left(\Omega_{2,2}^{1,1} - \Omega_{2,2}^{0,2}\right),$$

откуда имеем для недостающих форм:

$$\Omega_{2,2}^{0,0} = \Omega_2(d^2, \delta^2) - \frac{1}{3} D^2(dx^2),$$

$$\Omega_{2,2}^{1,1} = \Omega_2(d^2, \delta^2) + \frac{1}{6} D^2(dx^2).$$

Таким образом, найдены все главные формы для $s=t=2$. Вычисление остальных форм, когда известны главные, не составляет никакого труда; именно, остается найти формы типов (3,1), (3,2), (4,1). Формы (3,1) немедленно получатся, если дифференцировать (в направлениях $d$ и $\delta$) формы (2,1) и заменять слагаемые типа (2,2) уже известными их выражениями. Например,

$$d\Omega_{2,1}^{0,0} = \Omega_{3,1}^{0,0} + \Omega_{2,2}^{0,0},\quad \delta\Omega_{2,1}^{0,0} = \Omega_{3,1}^{1,0} + \Omega_{2,2}^{0,1},$$

$$d\Omega_{2,1}^{0,1} = \Omega_{3,1}^{0,1} + \Omega_{2,2}^{1,0},\quad \delta\Omega_{2,1}^{0,1} = \Omega_{3,1}^{1,1} + \Omega_{2,2}^{0,2},$$

и т. д.

Формы (3,2) могут быть найдены путем дифференцирования форм (2,2):

$$\Omega^{0,0}_{3,2}=\frac{1}{2}\,d\Omega^{0,0}_{2,2};\quad \Omega^{1,0}_{3,2}=\frac{1}{2}\delta\Omega^{0,0}_{2,2};$$

$$d\Omega^{0,1}_{2,2}=\Omega^{0,1}_{3,2}+\Omega^{1,0}_{3,2},\ \text{откуда}\ \Omega^{0,1}_{3,2}=d\Omega^{0,1}_{2,2}-\frac{1}{2}\,\delta\Omega^{0,0}_{2,2}$$

и т. д.

Наконец, чтобы вычислить формы типа (4,1), достаточно дифференцировать формы (3,1), заменяя затем формы (3,2) уже найденными их выражениями. Вообще, существенной частью задачи является вычисление главных форм. Покажем, как оно проводится в общем случае. Допустим, что нам уже известны выражения форм $\Omega^{p,q}_{s,t}$ при $s, t\leqslant k$ (или вообще форм $\Omega^{p,q}_{s,t}$, $s+t\leqslant 2k+1$) через формы $\Omega_s$, $s=1,2,\ldots,k$. Пусть, далее, задана еще форма $\Omega_{k+1}$. Требуется найти все формы $\Omega^{p,q}_{k+1,k+1}$. Вычисление полярных форм для $\Omega_{k+1}$ (для краткости будем далее обозначать полярные формы $\Omega_s(d^{2s-\mu},\delta^{\mu})$ через $\Omega^{\mu}_s$) дает, ввиду

$$\Omega_{k+1}(d+\delta)=\{(d+\delta)^{k+1}\mathrm{x}\}^2=\left\{\sum_{\alpha=0}^{k+1}C^{\alpha}_{k+1}d^{\alpha}\delta^{k+1-\alpha}\mathrm{x}\right\}^2=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{k+1}\sum_{\beta=0}^{k+1}C^{\alpha}_{k+1}C^{\beta}_{k+1}d^{\alpha}\delta^{k+1-\alpha}\mathrm{x}d^{\beta}\delta^{k+1-\beta}\mathrm{x}=$$

$$=\sum_{m=0}^{2k+2}\ \sum_{\alpha=\max(0,\,m-k-1)}^{\min(m,\,k+1)}C^{\alpha}_{k+1}C^{m-\alpha}_{k+1}\Omega^{\alpha,\,m-\alpha}_{k+1,k+1}=\sum_{m=0}^{2k+2}C^{m}_{2k+2}\Omega^{m}_{k+1},$$

следующие выражения:

$$\Omega^{m}_{k+1}=\Omega_{k+1}(d^{2k+2-m},\delta^{m})=$$

$$=\frac{1}{C^{m}_{2k+2}}\sum_{\alpha=\max(0,\,m-k-1)}^{\min(k+1,\,m)}C^{\alpha}_{k+1}C^{m-\alpha}_{k+1}\Omega^{\alpha,\,m-\alpha}_{k+1,k+1},\qquad(1.10)$$

что дает (левые части равенств известны!), некоторые линейные соотношения с положительными коэффициентами для форм $\Omega^{\alpha,\,m-\alpha}_{k+1,\,k+1}$ при каждом фиксированном $m$. Для $m=0,1$ и $m=2k+1$, $2k+2$ формы получаются непосредственно, в остальных случаях необходимы добавочные соотношения. Чтобы получить их, образуем с помощью уже известных форм $\Omega^{p,q}_{k,k}$ выражения:

$$D^2\Omega^{p,q}_{k,k}=d^2\Omega^{p,q}_{k,k}-d\delta\Omega^{p,q-1}_{k,k}-d\delta\Omega^{p-1,q}_{k,k}+\delta^2\Omega^{p-1,q-1}_{k,k},\quad(1.11)$$

которые, как показывает прямое вычисление, имеют вид

$$D^2\Omega_{k,\,k}^{p,\,q}=2\Omega_{k+1,\,k+1}^{p,\,q}-\Omega_{k+1,\,k+1}^{p-1,\,q+1}-\Omega_{k+1,\,k+1}^{p+1,\,q-1}. \tag{1.12}$$

Отсюда нетрудно найти выражения разностей вида

$$\Omega_{k+1,\,k+1}^{s,\,m-s}-\Omega_{k+1,\,k+1}^{s-1,\,m-s+1},$$

которые даются формулой (допускающей несложную проверку):

$$\sum_{\alpha=s}^{m-s} D^2\Omega_{k,\,k}^{\alpha,\,m-\alpha}=2\left\{\Omega_{k+1,\,k+1}^{s,\,m-s}-\Omega_{k+1,\,k+1}^{s-1,\,m-s+1}\right\}. \tag{1.13}$$

Теперь ясно, что зная разности (1.13) и линейную комбинацию (1.10) форм $\Omega_{k+1,\,k+1}^{\alpha,\,m-\alpha}$ при данном $m$, мы найдем все формы $\Omega_{k+1,\,k+1}^{\alpha,\,m-\alpha}$; нет необходимости выписывать их окончательные выражения.

Формулы, дающие выражения разностей величин $\Omega_{k+1,\,k+1}^{\alpha,\,m-\alpha}$ в символах $\Omega_{k,\,k}^{p,\,q}$, рассматриваются, как аналоги высших порядков для теоремы Гаусса, выражающей полную кривизну через метрику поверхности (здесь они приведены в своей «главной» части, без добавочных членов, обеспечивающих инвариантность, так как мы используем неинвариантные основные формы).

6. Теперь мы уже в состоянии окончательно установить равносильность задания форм $\omega_s$ и $\Omega_s$ и попутно доказать теорему Майера и Бурстина об однозначном определении поверхности формами $\omega_s$.

Пусть заданы формы $\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_k$. Покажем, как найти формы $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$, и обратно. Пусть базис соприкасающегося пространства $E_{\rho_{s-1}}$ образован векторами $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{\rho_{s-1}}$ (в качестве них могут быть приняты некоторые из числа частных производных $\mathbf{x}$ порядка $\leqslant s-1$). Форма

$$\omega_s=(d^s\mathbf{x},\ \varepsilon_{s-1}^0)^2=\frac{(d^s\mathbf{x},\ \mathbf{f}_1,\ \ldots,\ \mathbf{f}_{\rho_{s-1}})^2}{(\mathbf{f}_1,\ \ldots,\ \mathbf{f}_{\rho_{s-1}})^2} \tag{1.14}$$

также может быть выражена в виде определителя:

$$\omega_s=\frac{1}{|\varepsilon_{s-1}|^2}\begin{vmatrix} d^s\mathbf{x}^2 & d^s\mathbf{x}\mathbf{f}_1\ldots d^s\mathbf{x}\mathbf{f}_{\rho_{s-1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^s\mathbf{x}\mathbf{f}_{\rho_{s-1}} & \mathbf{f}_1\mathbf{f}_{\rho_{s-1}}\ldots\ \mathbf{f}_{\rho_{s-1}}^2 \end{vmatrix}, \tag{1.15}$$

все элементы которого выражаются через формы $\Omega_t$, $t\leqslant s$, как символы Кристоффеля $(t,\,r)$, $t+r\leqslant 2s$. Левый верхний угловой элемент просто есть форма $\Omega_s$. Отсюда видно, что и, наоборот, все формы $\Omega_s$ можно последовательно найти, зная формы $\omega_s$ (коэффициент при $\Omega_s$ в правой части равенства равен единице, как квадрат единичного поливектора, а все остальные элементы принадлежат окрестности низшего порядка, т. е. суть величины типов $(t, r)$, $t+r \leqslant 2(s-1)+1$.

Перейдем теперь к доказательству следующей теоремы: если для некоторой поверхности в $E_N$, $k$-соприкасающаяся плоскость $E_{\rho_k}$ совпадает со всем пространством $E_N$, то формы $\omega_s$ (или формы $\Omega_s$), $s=1,2,\ldots,k$, определяют поверхность с точностью до движения — отражения. [10] [13].

Для поверхностей в $E_3$ это теорема Бонне с заменой второй квадратичной формы Гаусса ее квадратом (отсюда возможное отражение поверхности).

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_N$ суть такие из числа частных производных $\mathbf{x}$ порядков $1,2,\ldots,k$, что они образуют (в некоторой точке, а, значит, и в ее окрестности) базис пространства $E_N$. Их матрица Грама, а значит, и вся конфигурация определены заданием форм $\omega_s$ с точностью до движения — отражения. Покажем, что после фиксации положения этих векторов для какой-либо начальной точки $u_0^i$ положение поверхности определено однозначно.

Действительно, все производные порядка $k+1$ радиус-вектора поверхности суть линейные комбинации $\mathbf{f}_\alpha$:

$$\mathbf{x}_{i_1\ldots i_{k+1}} = a^\alpha_{i_1\ldots i_{k+1}}\mathbf{f}_\alpha; \tag{1.16}$$

коэффициенты всех этих линейных комбинаций вычисляются, так как умножая эти уравнения, для каждых данных значений $i_1,\ldots,i_{k+1}$ на всевозможные векторы $\mathbf{f}_\beta$ скалярно, мы будем получать системы линейных уравнений

$$\mathbf{x}_{i_1\ldots i_{k+1}}\mathbf{f}_\beta = a^\alpha_{i_1\ldots i_{k+1}}\mathbf{f}_\alpha\mathbf{f}_\beta \tag{1.17}$$

с неизвестными $a^\alpha_{i_1\ldots i_{k+1}}$. Все коэффициенты и свободные члены этих уравнений суть известные величины: как символы Кристоффеля типов $(s, t)$, $s+t \leqslant 2k+1$ они определяются через известные формы $\omega_s$; определитель системы (1.17) отличен от нуля, как определитель Грама для линейно независимых векторов $\mathbf{f}_\alpha$. Таким образом, такие системы однозначно разрешимы относительно $a^\alpha_{i_1\ldots i_{k+1}}$. Если теперь задана начальная точка $u_0^i$, то в ней векторы $\mathbf{f}_\alpha$ определены с точностью до движения. Фиксируя их положение, мы сможем однозначно определить положение всех производных $\mathbf{x}$ до порядка $k$ включительно, так как все скалярные произведения типов $(s, t)$, $s+t \leqslant 2k+1$, выражаются через заданные $\omega_s$. Но, при данных начальных значениях $x_{i_1 \ldots i_s}$ $(s \leqslant k)$ в точке $u_0^l$, система (1.16) может иметь не более одного решения.

**7.** Кривая линия в $E_N$ представляет собой многообразие размерности единица и для нее могут быть построены формы $\omega_s$, как и для позерхности любой размерности. Их задание (до порядка $k$ включительно) равносильно заданию $k-1$ кривизн данной кривой. Например, для пространственной кривой в $E_3$, $\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1^2}}$ — кривизна, $\sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_1\omega_2}}$ — кручение).

Э. Бомпьяни впервые определил изгибание порядка $k$ поверхности $V_m$ в $E_N$, как преобразование, сохраняющее длины и кривизны до порядка $k-1$ включительно всех линий на поверхности. Это определение изгибания условием сохранения кривизн равносильно, в силу формул, определяющих кривизны, условию сохранения всех форм $\omega_s$, $s=1, 2, \ldots, k$. Наложимыми порядка $k$ называются две поверхности, если между ними устанавливается взаимно однозначное точечное соответствие, сохраняющее формы $\omega_s$ (или $\Omega_s$), $s \leqslant k$. Всякий переход от поверхности $V_m$ к поверхности $\widetilde{V}_m$, на нее наложимой, можно называть изгибанием $V_m$ (или иногда под изгибанием понимают лишь непрерывное преобразование с сохранением форм $\omega_s$).

Э. Бомпьяни показал также, что такое определение наложимости равносильно определению Э. Картана, примененному к данному случаю. Сформулируем общее определение изгибания ,днаное Картаном, применительно к случаю поверхностей евклидова пространства. По этому определению две поверхности $V_m$ и $\widetilde{V}_m$ следует называть наложимыми порядка $k$, если между их точками установлено взаимнооднозначное соответствие, такое, что каждой паре сходственных точек можно поставить в соответствие движение, переводящее одну из этих точек в другую так, что и дифференциальные окрестности порядка $k$ наложатся (соответственные точки окрестностей совпадут с точностью до малых порядка выше $k$).

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — соответствующие точки поверхностей. Тогда наложимость по Картану означает, что найдется (собственно или несобственно) ортогональная матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ такие, что движение $\xi \to \mathbf{A}\xi + \mathbf{b}$ совмещает соответствующие точки и их окрестности:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x} + d\mathbf{x} + \ldots + \frac{1}{k!} d^k\mathbf{x} + \ldots\right) + \mathbf{b} =$$

$$= \mathbf{y} + d\mathbf{y} + \ldots + \frac{1}{k!} d^k\mathbf{y} + \ldots.$$

Сравнивая малые разных порядков в обеих частях равенства, находим

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{y},$$
$$\mathbf{A}d^s\mathbf{x} = d^s\mathbf{y} \quad (1 \leqslant s \leqslant k).$$

Первое уравнение определяет $\mathbf{b}$; остальные могут быть записаны в равносильной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s} = \mathbf{y}_{i_1 \ldots i_s} \quad (1 \leqslant s \leqslant k),$$

и условие их совместности ($\mathbf{A}$ — неизвестная ортогональная матрица) состоит в выполнении равенств

$$\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s}\mathbf{x}_{j_1 \ldots j_t} = \mathbf{y}_{i_1 \ldots i_s}\mathbf{y}_{j_1 \ldots j_t} \quad (1 \leqslant s, t \leqslant k).$$

Нам уже известно, что все эти равенства будут выполнены, если только

$$\Omega_s = \widetilde{\Omega}_s \quad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

или, что безразлично, $\omega_k^i = \widetilde{\omega}_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$. Тем самым показана равносильность определений наложимости Э. Бомпьяни и Э. Картана.

Изгибание высших порядков связано с понятием римановой геометрии рода $k$ так же, как обычное метрическое изгибание с классической римановой геометрией.

## § 2. РИМАНОВЫ ГЕОМЕТРИИ РОДА К. ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ

1. Риманова геометрия определяется заданием на дифференцируемом многообразии положительно определенной метрической формы $\omega_1 = g_{ij}du^i du^j$. Она может быть реализована, в силу теоремы погружения, на поверхности евклидова пространства.

Аналогично, риманова геометрия рода $k$ определяется заданием на дифференцируемом многообразии системы форм

$$\omega_s = g_{i_1 \ldots i_{2s}} du^{i_1} \ldots du^{i_{2s}} \quad (s = 1, 2, \ldots, k) \tag{2.1}$$

степеней, соответственно равных $2s$, или форм

$$\Omega_s \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.2}$$

с сохранением алгоритма, позволяющего по одним формам вычислить другие. Первая из форм интерпретируется как метрическая форма, т. е. сама по себе задает риманову геометрию в обычном смысле, остальные позволяют рассматривать кривизны кривых на многообразии до порядка $k - 1$ включительно.

Например, риманова геометрия рода два определится двумя формами: $\omega_1$ степени два и $\omega_2$ степени четыре, из которых первая понимается, как метрическая форма, задающая квадрат расстояния между двумя близкими точками, а вторая определяет кривизну линий: $K=\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1^2}}$. Здесь встаёт вопрос о необходимости введения ограничений на задаваемые произвольно формы $\omega_1, \omega_2$. Дело в том, что в случае обычной римановой геометрии (т. е. геометрии рода один), единственным ограничением такого рода является требование положительной определенности формы $\omega_1$; с точки зрения задачи погружения это есть требование положительной определенности матрицы Грама $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j=g_{ij}$, обеспечивающее возможность построения для каждой точки параметрического пространства $u^i$ системы векторов $\mathbf{x}_i$, вещественных и линейно независимых, удовлетворяющих уравнениям $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j=g_{ij}$ (в точке!). При интерпретации форм $\omega_1, \omega_2$ мы уже будем иметь дело с векторами $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{ij}$; естественно сохраняется условие положительной определенности формы $\omega_1$. Что касается векторов $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{ij}$, то не для всякого погруженного многообразия они образуют линейно независимую систему. Но во всяком случае, уже для построения векторов $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{ij}$, дающих формы $\omega_1$, $\omega_2$ в точке, необходима положительная полуопределенность матрицы Грама этих векторов. Эта матрица определяется формами $\omega_1$, $\omega_2$. Более сильное условие положительной определенности $\mathbf{G}_2$ дает линейно независимые векторы для каждой точки параметрического пространства: $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{ij}$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, с каждой точкой связывается соприкасающееся евклидово пространство $E_{\rho_2}$ $\left(\rho_2=n+\frac{n(n+1)}{2}\right)$ измерений, определенное векторами $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{ij}$.

Вообще, для любого $k$, данную систему форм $\omega_s$ (или $\Omega_s$), $1 \leqslant s \leqslant k$ мы называем положительно определенной (полуопределенной), если положительно определена (полуопределена) соответствующая матрица Грама $\mathbf{G}_k$. Строго говоря, нами не доказана единственность результата восстановления матрицы $\mathbf{G}_k$ по заданным основным формам; непосредственное доказательство такой единственности не сложно, но, по крайней мере для случая положительно определенной системы форм, она вытекает из теоремы погружения (п. 3). Пока можно понимать положительную определенность форм $\omega_s$ как устанавливаемую относительно какого-либо фиксированного алгоритма вычисления матрицы $\mathbf{G}_k$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только положительно определенные системы форм $\omega_s$ (или $\Omega_s$), $s=1, 2, \ldots, k$, задающих риманову геометрию рода $k$, что соответствует «нормальному» случаю для погруженного многообразия. Как показывает следующий пример, полуопределенности основных форм недостаточно для возможности реализации данной геометрии рода $k$ на какой-либо поверхности.

Пусть риманова геометрия рода два на двумерном многообразии задана формами

$$\Omega_1 = du^2 + 2F du dv + dv^2,$$

$$\Omega_2 = A du^2 + 2F_{uv} du dv + C dv^2 \left(F_{uv} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right),$$

где $A$, $C$, $F$ — некоторые функции от $u$, $v$, удовлетворяющие неравенствам, обеспечивающим положительную полуопределенность $\mathbf{G}_2$.

Эти неравенства легко получаются, например, таким путем. В силу определения $\Omega_1$, $\Omega_2$ для погруженного многообразия должно быть $d\mathbf{x}^2 = \Omega_1$, $(d^2\mathbf{x})^2 = \Omega^2$, откуда

$$\mathbf{x}_u^2 = 1,\ \mathbf{x}_u\mathbf{x}_v = F,\ \mathbf{x}_v^2 = 1,$$

$$\mathbf{x}_{uu}^2 = A,\ \mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_{uv} = 0,\ \mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_{vv} = 0,\ \mathbf{x}_{vv}^2 = C,$$

$$\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_{vv} + 2\mathbf{x}_{uv}^2 = F_{uv}.$$

Путем несложных вычислений находим произведения типа (2,1):

$$\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uv}\,\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_v = 0,$$

$$\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_v = \mathbf{F}_u,\ \mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u = \mathbf{F}_v,$$

и, наконец, для $\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_{vv}$ и $\mathbf{x}_{uv}^2$ имеем выражения

$$\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{3}\left[(\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)_{uv} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u^2)_{vv} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v^2)_{uu}\right] + \\ + \frac{2}{3}\left[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_{vv} + 2\mathbf{x}_{uv}^2\right] = \mathbf{F}_{uv},$$

$$\mathbf{x}_{uv}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{F}_{uv} - \frac{1}{2}\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Матрица Грама имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & F & 0 & 0 & F_v \\ F & 1 & F_u & 0 & 0 \\ 0 & F_u & A & 0 & F_{uv} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_v & 0 & F_{uv} & 0 & C \end{pmatrix}$$

и будет положительно полуопределенной при выполнении следующих неравенств:

$$1 - F^2 > 0,\ A(1 - F^2) - F_u^2 > 0,$$
$$(AC - F_{uv}^2)(1 - F^2) - CF_u^2 - AF_v^2 - 2FF_uF_vF_{uv} + F_u^2F_v^2 > 0.$$

Между тем, из $\mathbf{x}_{uv}^2 = 0$ следует (предположение вещественности!) $\mathbf{x}_{uv} = 0$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{U}(u) + \mathbf{V}(v)$, т. е. $\mathbf{x}$ — поверхность переноса и, следовательно, $A = \mathbf{U}''^2(u) = A(u)$, $C = \mathbf{V}''^2(v) = C(v)$. Если $A$ и $C$ не удовлетворяют последним соотношениям, то погружение заведомо невозможно. Более того, $F$ также подчинено условию $F = \mathbf{U}'(u)\mathbf{V}'(v)$ (существенному, по крайней мере, в рассматриваемом нами случае конечномерного пространства).

В дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что заданная риманова геометрия рода $k$ положительно определена, т. е. положительно определена матрица $\mathfrak{G}_k$.

**2.** Пусть задана риманова геометрия рода $k$; это значит, что дана в некоторой области параметрического пространства $(u^i)$, например, в окрестности точки $M_0(u_0^1, \ldots, u_0^n)$, положительно определенная в вышеуказанном смысле система форм $\widetilde{\Omega}_s$, $s = 1, 2, \ldots, n$ (и тем самым также система форм $\widetilde{\omega}_s$). Задача погружения состоит в том, чтобы указать в евклидовом пространстве $E_N$ некоторой размерности $N$ многообразие $\mathbf{x}(u^i)$, геометрия рода $k$ которого определялась бы заданными формами; иначе говоря, должны иметь место уравнения $F$:

$$(d^s\mathbf{x})^2 = \widetilde{\Omega}_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

или равносильные им уравнения

$$\left(d^s\mathbf{x},\ \overset{0}{\varepsilon}_{s-1}\right)^2 = \widetilde{\omega}_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Мы будем рассматривать основную систему уравнений $F$ в виде (2.3). Подразумевается, что заданные формы аналитичны и искомое многообразие в $E_N$ также аналитично.

Если от записи основных уравнений в дифференциалах мы перейдем к записи в производных, то можно будет подсчитать число уравнений, налагаемых на искомую вектор-функцию $\mathbf{x}(u^i)$, и тем самым определить правдоподобную размерность пространства $E_N$.

Так как $\widetilde{\Omega}_s = \widetilde{\Omega}_s(du^i)$ представляет собой форму степени $2s$ относительно $du^i$, то уравнение $(d^s\mathbf{x})^2 = \widetilde{\Omega}_s$ распадается на $C_{n+2s-1}^{2s}$ отдельных равенств. Общее же число уравнений, налагаемых на $\mathbf{x}$, равно

$$N'(n, k) = \sum_{s=1}^{k} C_{n+2s-1}^{2s}. \tag{2.5}$$

Это число и будет в дальнейшем играть роль (минимальной, вообще говоря) размерности пространства, в которое производится погружение.

В случае предположения положительной определенности $\mathfrak{G}_{2k}$, т. е. матрицы Грама системы векторов $\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s}$ $(s \leqslant 2k)$, получается новый вариант теоремы погружения; размерность пространства в этом случае равна числу (линейно независимых по предположению) производных $\mathbf{x}$ до порядка $2k$ включительно:

$$N(n, k) = C_{n+2k}^{2k} - 1. \tag{2.6}$$

Если рассматривать центрированное евклидово пространство и многообразия в нем, то, кроме форм $\widetilde{\Omega}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, для определения геометрии рода $k$ погруженного многообразия, придется также задавать функцию (форму степени нуль) $\widetilde{\Omega}_0 = \mathbf{x}^2$; для системы форм

$$\widetilde{\Omega}_0, \widetilde{\Omega}_1, \ldots, \widetilde{\Omega}_k \tag{2.7}$$

также ставится задача погружения. Число условий при этом на единицу больше и поэтому ожидаемая размерность вмещающего пространства также на единицу больше: $N'(n, k)+1$ для первого варианта и $N(n, k)+1$ для второго. Таким образом, мы будем доказывать четыре варианта теоремы погружения. Так как доказательства отличаются лишь в деталях, то мы остановимся сейчас на случае задания системы форм

$$\widetilde{\Omega}_s, \quad s = 1, 2, \ldots, k$$

и размерности пространства, в которое производится погружение $N'(n, k)$. Различия в рассуждениях, относящихся к другим случаям, будут отмечаться по мере необходимости. В следующем п. 3 приводится точная формулировка результатов.

3. При формулировке теорем погружения приходится выделять некоторую систему векторов, остающуюся линейно независимой при погружении многообразия. Например, известна роль, которую в задаче погружения (и изгибания) играют асимптотические линии. Закрепление неасимптотической линии делает поверхность трехмерного пространства жесткой; при погружении первой квадратичной формы Гаусса $E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2$ начальная кривая $u = u_0$ должна задаваться так, чтобы на поверхности она не оказалась асимптотической, т. е. чтобы вдоль нее были линейно независимы векторы $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_{vv}$. Аналогичные условия приходится накладывать и при формулировке теорем погружения для римановых геометрий высшего рода. Они связаны с выделением не-

которого параметра $u^1$ в качестве основного независимого переменного и с необходимостью подчинения начального определения системы дифференциальных уравнений известным условиям.

Будем выделять параметр $u^1$; символ полного дифференциала представим в виде $d = d_1 + \delta_1$, где

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial u^1} du^1, \quad \delta_1 = d - d_1 = \frac{\partial}{\partial u^2} du^2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial u^n} du^n.$$

Обозначим через $L'_{2k}$ систему векторов

$$\frac{\partial^s \mathbf{x}}{\partial u^{1\lambda_1} \partial u^{2\lambda_2} \ldots \partial u^{n\lambda_n}} \quad (1 \leqslant s \leqslant 2k, \ 0 \leqslant \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n \leqslant 2(k - \lambda_1)).$$

Тогда мы сможем формулировать следующие результаты

Теорема 1. Пусть риманова геометрия рода $k$ задана системой форм $\widetilde{\Omega}_s$, аналитических в окрестности точки $M_0(u_0^i)$, и пусть соответствующая матрица Грама $G_k$ положительно определена. Тогда в пространстве

$$N'(n, k) = \sum_{s=1}^{k} C_{n+2s-1}^{2s}$$

измерений существуют аналитические многообразия, формы $\Omega_s$ которых совпадают с формами $\widetilde{\Omega}_s$. Те из этих многообразий, для которых векторы

$$L'_{2k}: \ \frac{\partial^s \mathbf{x}}{\partial u^{1\lambda_1} \ldots \partial u^{n\lambda_n}} \quad (1 \leqslant s \leqslant 2k, 0 \leqslant \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \leqslant 2(k - \lambda_1)), \tag{2.8}$$

линейно независимы, определяются с произволом

$$T'(n, k) = \sum_{s=1}^{k} (k - s + 1) C_{n+2s-2}^{2s-1} \tag{2.9}$$

функций $(n-1)$-го аргумента.

В процессе доказательства этот произвол реализуется в виде некоторой «полосы», однозначно определяющей искомое многообразие, независимость же векторов $L'_{2k}$ означает «неасимптотичность» этой полосы.

Теорема 2. При тех же условиях в пространстве

$$N(n, k) = C_{n+2k}^{2k} - 1$$

измерений существуют многообразия, для которых формы $\Omega_s$ совпадают с формами $\widetilde{\Omega}_s$. Те из этих многообразий, для которых векторы $L_{2k}$ независимы, определяются с произволом

$$T(n, k) = N(n, k) - N'(n, k)$$

функций $n$ аргументов.

Теорема 3.

Теорема 4.

Обе теоремы получаются из теорем 1 и 2 соответственно, если в число заданных форм включить $\widetilde{\Omega}_0$, в число независимых линейно векторов — $\mathbf{x}$ и увеличить размерность пространства на единицу. В частности, при $\widetilde{\Omega}_0 = 1$ получаются теоремы о погружении римановой геометрии высшего рода в единичную сферу $S_{N'(n,k)}$ (или $S_{N(n,k)}$), пространства $E_{N'(n,k)+1}$ (или $E_{N(n,k)+1}$).

Ниже мы переходим к доказательству этих теорем. Ввиду значительной технической сложности оно разбивается на ряд этапов. Вначале мы напоминаем простое доказательство теоремы погружения обычной римановой геометрии, следуя методу Жане (известно, что Жане не довел доказательство до конца).

**4.** Основное уравнение задачи в классическом случае $k = 1$ имеет вид

$$\Omega_1 \equiv d\mathbf{x}^2 = \widetilde{\Omega}_1. \tag{2.10}$$

Полагая $d = d_1 + \delta_1$, где $d_1$ и $\delta_1$ определены, как в п. 3, сведем уравнение (2.10) к трем отдельным равенствам

$$\begin{aligned} &P^{0,0}_{1,1}\colon\ d_1\mathbf{x}^2 = \ldots,\\ &P^{0,1}_{1,1}\colon\ d_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} = \ldots,\\ &P^{1,1}_{1,1}\colon\ \delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь и далее мы будем обозначать символом $P^{p,q}_{s,t}$ уравнение, левая часть которого равна $\Omega^{p,q}_{s,t}$ или имеет эту форму своим главным членом (в смысле наивысшего порядка $d_1$-дифференцирования и с точностью до постоянного множителя). Заменим уравнение $P^{1,1}_{1,1}$ уравнением

$$-\frac{1}{2}D^2P^{1,1}_{1,1}\colon\ -\frac{1}{2}d_1^2(\delta_1\mathbf{x}^2) + d_1\delta_1(d_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\delta_1^2(d_1\mathbf{x}^2) = \ldots,$$

которое просто имеет вид

$$\overset{(1)}{P}{}^{0,2}_{2,2}\colon\ d_1^2\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} - (d_1\delta_1\mathbf{x})^2 = \ldots \tag{2.12}$$

При этом, для сохранения эквивалентности систем, присоединим уравнения $P^{1,1}_{1,1}$, $d_1P^{1,1}_{1,1}$, рассматриваемые на подмногообразии $M_{n-1}$ параметрического пространства ($M_{n-1}$ определяется равенством $u^1 = u^1_0$):

$$M_{n-1}\begin{cases} P_{1,1}^{1,1}\colon \ \delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots, \\ d_1P_{1,1}^{1,1}\colon \ d_1\delta_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} = \ldots. \end{cases} \tag{2.13}$$

Далее, заменим уравнение $P_{1,1}^{0,1}$ равенством $d_1P_{1,1}^{0,1} - \frac{1}{2}\delta_1P_{1,1}^{0,0}$ и $P_{1,1}^{0,0}$ через $d_1P_{1,1}^{0,0}$. Получим систему

$$\begin{aligned} P_{2,1}^{0,0}&\colon \ d_1^2\mathbf{x}d_1\mathbf{x} = \ldots, \\ P_{2,1}^{0,1}&\colon \ d_1^2\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} = \ldots, \\ P_{2,2}^{0,2}&\colon \ d_1^2\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} - d_1\delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots, \end{aligned} \tag{2.14}$$

к которой присоединяется еще система уравнений, рассматриваемых на $M_{n-1}$:

$$M_{n-1}\begin{cases} P_{1,1}^{1,1}\colon \ \delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots, \quad d_1P_{1,1}^{1,1}\colon \ d_1\delta_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} = \ldots, \\ P_{1,1}^{0,0}\colon \ d_1\mathbf{x}^2 = \ldots, \\ P_{1,1}^{0,1}\colon \ d_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} = \ldots. \end{cases} \tag{2.15}$$

Уравнение $d_1P_{1,1}^{1,1}$ легко преобразуется с помощью $P_{1,1}^{0,1}$ к виду

$$\delta_1P_{1,1}^{0,1} - d_1P_{1,1}^{1,1}\colon \ d_1\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} = \ldots$$

и окончательно уравнения (2.15) записываются в форме

$$M_{n-1}\begin{cases} d_1\mathbf{x}^2 = \ldots, \\ d_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} = \ldots, \\ d_1\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} = \ldots, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots. \tag{2.17}$$

Теперь все уравнения задачи, кроме основных (2.14), распадаются на две группы.

1. Уравнение $\delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots$, имеющее тот же характер, что и исходное уравнение (2.10); его разрешимость может, например, следовать из предположения индукции (по размерности $n$), так как для кривых, как одномерных многообразий, теорема погружения достаточно проста.

2. Уравнения (2.16), конечные относительно $d_1\mathbf{x}$. После их решения относительно $d_1\mathbf{x}$ оказываются известными векторы

$$\mathbf{x}\big|_{u^1=u_0^1}, \quad d_1\mathbf{x}\big|_{u^1=u_0^1}, \tag{2.18}$$

дающие начальное определение для основной системы (2.14). Последняя будет при этом иметь уже единственное решение, если только начальное определение выбрано так, что система разрешима относительно $d_1^2\mathbf{x}$, т. е. если на $M_{n-1}$ векторы системы $L_2'$: $d_1\mathbf{x}$, $\delta_1\mathbf{x}$, $\delta_1^2\mathbf{x}$, или, подробно, векторы

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_i,\ \mathbf{x}_{ij}\quad (i, j = 2, \ldots, n) \tag{2.19}$$

линейно независимы. Отсюда условие: уже решая систему (2.17), нужно думать о том, чтобы обеспечить линейную независимость множества векторов $L_2'$. A priori можно опасаться, что может встретиться такой случай, когда линейная зависимость векторов $L_2'$ будет иметь место для всех решений системы $\delta_1\mathbf{x}^2=\ldots$. Именно в этом месте остается пробел в рассуждениях Жане. Чтобы его устранить, возможно отказаться от рассуждений по индукции и продолжать более полно исследовать уравнение $\delta_1\mathbf{x}^2=\ldots$, подвергая его таким же преобразованиям, как и исходное уравнение (2.14). Мы выполним это уже сразу для общего случая при произвольном порядке $k$.

Заметим, что все доказательство распадется на такие этапы, которые легко усмотреть уже в разобранном сейчас простейшем случае: 1. Преобразование уравнений системы к виду, сходному с (2.14), т. е. такому, чтобы все уравнения содержали производную одного и того же порядка от $\mathbf{x}$ по $u^1$ и тем самым сводились к системе Коши—Ковалевской, если только некоторые векторы окажутся линейно независимы. 2. Упрощение и систематизация условий, относящихся к $M_{n-1}$, связывающих начальное определение ведущей части системы. Затруднения с проведением индукции по размерности, заметные уже в случае $k=1$, заставляют нас провести преобразование всех уравнений, относящихся к $M_{n-1}$, с выделением условий, связывающих их начальное определение на $M_{n-2}$ ($u^1=u_0^1$, $u^2=u_0^2$) и т. д. до конца, т. е. вплоть до начальной точки $M_0(u^i=u_0^i)$. Возможно, что при некотором удачном обобщении предположения индукции, такого, несколько громоздкого пути, можно было бы избежать. 3. Доказательство разрешимости системы; здесь на каждом этапе система уравнений, рассматриваемых на $M_i$, решается так, чтобы обеспечить линейную независимость тех векторов, от которых зависит возможность разрешения последующих систем, относящихся к $M_j$ ($j>i$). Весь процесс преобразования системы проводится в следующей гл. II; часть рассуждений, проводимых по индукции, опускается.

## *Глава II*

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ

## § 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим подробно случай $k=2$. При $k=1$ основной момент в преобразовании уравнений — переход от урав-

нения $P^{1,1}_{1,1}$ к уравнению $P^{0,2}_{2,2}$, после чего уже каждое из уравнений содержит несмешанную производную $\mathbf{x}$ по $u^1$ (первого или второго порядка). Теперь мы присоединим еще уравнение $d^2\mathbf{x}^2 = \widetilde{\Omega}_2$. Полагая $d = d_1 + \delta_1$, мы сведем его к пяти отдельным равенствам

$$
\begin{gathered}
P^{0,0}_{2,2}:\ d_1^2\mathbf{x}^2 = \ldots,\\
P^{0,1}_{2,2}:\ d_1^2\mathbf{x} d_1\delta_1\mathbf{x} = \ldots,\\
d_1^2\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} + 2d_1\delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots,\\
P^{1,2}_{2,2}:\ d_1\delta_1\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} = \ldots,\\
P^{2,2}_{2,2}:\delta_1^2\mathbf{x}^2 = \ldots,
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

из которых третье, совместно с уравнением $P^{0,2}_{2,2}$ (2.14), заменится парой уравнений (первое из которых вновь обозначено $P^{0,2}_{2,2}$):

$$
\begin{gathered}
P^{0,2}_{2,2}:\ d_1^2\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} = \ldots,\\
P^{1,1}_{2,2}:\ d_1\delta_1\mathbf{x}^2 = \ldots.
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Всего наша система содержит восемь уравнений: два с производной $\mathbf{x}$ по $u^1$ первого порядка:

$$
\begin{gathered}
P^{0,0}_{1,1}:\ d_1\mathbf{x}^2 = \ldots,\\
P^{0,1}_{1,1}:\ d_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} = \ldots
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

и шесть уравнений, в левых частях которых стоят всевозможные формы Кристоффеля типа $\Omega^{p,q}_{2,2}$ $(0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2)$. При этом на начальное определение системы наложены условия:

$$
M_{n-1},\quad P^{1,1}_{1,1},\quad d_1P^{1,1}_{1,1}. \tag{3.4}
$$

При любом $k$ аналогичный этап в преобразовании уравнений задачи описывается следующим предложением:

Лемма 3.1. Система уравнений $d^s\mathbf{x}^2 = \widetilde{\Omega}_s$ $(s = 1,2,\ldots,k)$ эквивалентна системе вида

$$
M_n\begin{cases}P^{0,p}_{s,s}:\quad \Omega^{0,p}_{s,s} = \ldots & (1 \leqslant s \leqslant k,\quad 0 \leqslant p \leqslant s),\\ P^{p,q}_{k,k}:\quad \Omega^{p,q}_{k,k} = \ldots & (1 \leqslant p \leqslant q \leqslant s),\end{cases} \tag{3.5}
$$

$$
M_{n-1}\begin{cases}P^{p,q}_{s,s}:\ \Omega^{p,q}_{s,s} = \ldots\\ d_1P^{p,q}_{s,s}:\ d_1\Omega^{p,q}_{s,s} = \ldots\end{cases} (1 \leqslant s \leqslant k-1,\quad 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant s). \tag{3.6}
$$

Здесь в основное звено системы входят уравнения с несмешанными производными $\mathbf{x}$ по $u^1$ до порядка $k$ и уравнения, в которых левые части суть формы Кристоффеля типа $\Omega^{p,q}_{k,k}$.

Доказательство леммы дается в п. 2.

Три из числа уравнений, а именно, $P^{1,1}_{2,2}$, $P^{1,2}_{2,2}$, $P^{2,2}_{2,2}$ содержат смешанные производные $\mathbf{x}$ и наша задача состоит в замене их уравнениями, содержащими чистые производные $\mathbf{x}$ по $u^1$.

Последовательно заменяем уравнение $P^{1,1}_{2,2}$ уравнением

$$-D^2P^{1,1}_{2,2}: -d_1^2\left(P^{1,1}_{2,2}\right)+2d_1\delta_1\left(P^{0,1}_{2,2}\right)-\delta_1^2\left(P^{0,0}_{2,2}\right), \tag{3.7}$$

уравнение $P^{1,2}_{2,2}$ — уравнением

$$-D^2P^{1,2}_{2,2}: -d_1^2\left(P^{1,2}_{2,2}\right)+d_1\delta_1\left(P^{0,2}_{2,2}\right)+d_1\delta_1\left(P^{1,1}_{2,2}\right)-\delta_1^2\left(P^{0,1}_{2,2}\right) \tag{3.8}$$

и уравнение $P^{2,2}_{2,2}$ — уравнением

$$-D^2P^{2,2}_{2,2}: -d_1^2\left(P^{2,2}_{2,2}\right)+2d_1\delta_1\left(P^{1,2}_{2,2}\right)-\delta_1^2\left(P^{1,1}_{2,2}\right). \tag{3.9}$$

Присоединяем, для сохранения равносильности исходным уравнениям, условия

$$M_{i-1}\begin{cases}P^{1,1}_{2,2}, & P^{1,2}_{2,2}, \quad P^{2,2}_{2,2}\\ d_1P^{1,1}_{2,2}, & d_1P^{1,2}_{2,2}, \quad d_1P^{2,2}_{2,2}.\end{cases} \tag{3.10}$$

Вычислим, для примера, левую часть уравнения $-D^2P^{1,1}_{2,2}$, которое мы временно обозначим $\overset{(1)}{P}{}^{1,1}_{3,3}$:

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{P}{}^{1,1}_{3,3}&: -d_1^2(d_1\delta_1\mathbf{x}^2)+2d_1\delta_1(d_1\delta_1\mathbf{x}d_1^2\mathbf{x})-\delta_1^2(d_1^2\mathbf{x}^2)\equiv\\ &\equiv -2d_1^3\delta_1\mathbf{x}d_1\delta_1\mathbf{x}-2d_1^2\delta_1\mathbf{x}^2+2d_1^2\delta_1^2\mathbf{x}d_1^2\mathbf{x}+\\ &+2d_1^3\delta_1\mathbf{x}d_1\delta_1\mathbf{x}+2d_1^2\delta_1\mathbf{x}^2+2d_1\delta_1^2\mathbf{x}d_1^3\mathbf{x}-2d_1^2\delta_1^2\mathbf{x}d_1^2\mathbf{x}-2d_1^2\delta_1\mathbf{x}^2\equiv\\ &\equiv 2d_1^3\mathbf{x}d_1\delta_1^2\mathbf{x}-2d_1^2\delta_1\mathbf{x}^2=\ldots.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично, легко найти

$$\overset{(1)}{P}{}^{1,2}_{3,3}\ (\text{или } -D^2P^{1,2}_{2,2}): d_1^3\mathbf{x}\delta_1^3\mathbf{x}-d_1^2\delta_1\mathbf{x}d_1\delta_1^2\mathbf{x}=\ldots, \tag{3.12}$$

$$\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3}\ (\text{или } -D^2P^{2,2}_{2,2}): 2d_1^2\delta_1\mathbf{x}\delta_1^3\mathbf{x}-2d_1\delta_1^2\mathbf{x}^2=\ldots. \tag{3.13}$$

Из полученных трех уравнений два уже содержат чистую производную $d_1^3\mathbf{x}$; мы запишем их, обозначив сообразно их старшим членам:

$$\begin{aligned}&\hat{P}^{0,2}_{3,3}: d_1^3\mathbf{x}d_1\delta_1^2\mathbf{x}-d_1^2\delta_1\mathbf{x}^2=\ldots,\\ &\hat{P}^{0,3}_{3,3}: d_1^3\mathbf{x}\delta_1^3\mathbf{x}-d_1\delta_1^2\mathbf{x}^2=\ldots,\end{aligned} \tag{3.14}$$

третье же уравнение мы подвергаем еще раз аналогичному преобразованию; заменяем его уравнением

$$-D^2\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3}:\ -d_1^2\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3}+2d_1\delta_1\overset{(1)}{P}{}^{1,2}_{3,3}-\delta_1^2\overset{(1)}{P}{}^{1,1}_{3,3}, \tag{3.15}$$

которое, как нетрудно видеть, имеет вид (после деления на 2):

$$\hat{P}^{0,4}_{4,4}:\ d_1^4\mathbf{x}\delta_1^4\mathbf{x}-3d_1^3\delta_1\mathbf{x}d_1\delta_1^3\mathbf{x}+2d_1^2\delta_1^2\mathbf{x}^2=\ldots \tag{3.16}$$

При этом следует присоединить уравнения

$$\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3},\ d_1\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3}.$$

Сведем вместе все полученные уравнения:

$$\begin{gathered}
d_1\mathbf{x}^2=\ldots,\\
d_1\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x}=\ldots,\\
d_1^2\mathbf{x}^2=\ldots,\\
d_1^2\mathbf{x}d_1\delta_1\mathbf{x}=\ldots,\\
d_1^2\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x}=\ldots,\\
d_1^3\mathbf{x}d_1\delta_1^2\mathbf{x}-d_1^2\delta_1\mathbf{x}^2=\ldots,\\
d_1^3\mathbf{x}\delta_1^3\mathbf{x}-d_1^2\delta_1\mathbf{x}d_1\delta_1^2\mathbf{x}=\ldots,\\
d_1^4\mathbf{x}\delta_1^4\mathbf{x}-3d_1^3\delta_1\mathbf{x}d_1\delta_1^3\mathbf{x}+2d_1^2\delta_1^2\mathbf{x}^2=\ldots
\end{gathered} \tag{3.17}$$

с условиями на начальное определение:

$$M_{n-1}\begin{cases} P^{1,1}_{1,1},\ d_1P^{1,1}_{1,1},\ P^{1,1}_{2,2},\ d_1P^{1,1}_{2,2},\ P^{1,2}_{2,2},\ d_1P^{1,2}_{2,2},\\ P^{2,2}_{2,2},\ d_1P^{2,2}_{2,2},\ \overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3},\ d_1\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3}. \end{cases} \tag{3.18}$$

При любом $k$ достигнутый этап в преобразовании уравнений системы описывается следующей леммой:

Лемма 3.2. Система уравнений задачи эквивалентна системе вида

$$P^{0,q}_{s,s}:\ d_1^s\mathbf{x}d_1^{s-q}\delta_1^q\mathbf{x}=\ldots\ (1\leqslant s\leqslant k,\ 0\leqslant q\leqslant s),$$

$$\hat{P}^{0,q+p}_{k+p,k+p}:\ d_1^{k+p}\mathbf{x}d_1^{k-q}\delta_1^{p+q}\mathbf{x}+\ldots=\ldots\ (1\leqslant p\leqslant q\leqslant k),$$

$$M_{n-1}\begin{cases} P^{p,q}_{s,s},\ d_1P^{p,q}_{s,s}\ (1\leqslant s\leqslant k,\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant s),\\ \overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,k+m},\ d_1\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,k+m}\ (1\leqslant m<p\leqslant q\leqslant k). \end{cases}$$

Здесь $\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}$ определяются индуктивно: при $m=0$ это просто $P^{p,q}_{k,k}$, дальнейшие $\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}$ образуются с помощью операции $-D^2$:

$$\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m} = -d_1^2 \overset{(m-1)}{P}{}^{p,q}_{k+m-1,\,k+m-1} + d_1\delta_1 \overset{(m-1)}{P}{}^{p-1,q}_{k+m-1,\,k+m-1} + \\ + d_1\delta_1 \overset{(m-1)}{P}{}^{p,q-1}_{k+m-1,\,k+m-1} - \delta_1^2 \overset{(m-1)}{P}{}^{p-1,\,q-1}_{k+m-1,\,k+m-1}$$

причем нетрудно установить, что старший член в $\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}$ равен $\Omega^{p-m,\,q+m}_{k+m,\,k+m}$; вообще, для $\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}$ можно по индукции вывести формулу

$$\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}: \sum_{t=0}^{2m} (-1)^t C^t_{2m} \Omega^{p-m+t,\,q+m-t}_{k+m,\,k+m} = \ldots .$$

Наконец, при $m=p$ обозначаем $\overset{(p)}{P}{}^{p,q}_{k+p,\,k+p}$ (с точностью до числового коэффициента) через $\hat{P}^{0,p+q}_{k+p,\,k+p}$. Обозначение $\hat{P}^{0,p+q}_{k+p,\,k+p}$ соответствует виду старшего члена в уравнении; полный вид уравнения дается формулой для $\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}$, где надо полагать в этом случае $m=p$:

$$\hat{P}^{0,\,p+q}_{k+p,\,k+p}: \sum_{t=0}^{2p} (-1)^t C^t_{2p} \Omega^{t,\,p+q-t}_{k+p,\,k+p} = \ldots$$

эти вычисления проведены в п. 2).

Лемма 3.2 обобщает результат второго этапа преобразования уравнений: в каждом уравнении мы имеет чистую производную $\mathbf{x}$ по $u^1$ (наивысшего, для данного уравнения порядка). Третий этап состоит в уравнивании порядка отдельных уравнений; для этого каждое уравнение не максимального порядка подвергается дифференцированию по $u^1$ должное число раз. В случае $k=2$ получается система

$$\begin{aligned} d_1^3P^{0,0}_{1,1}&: d_1^4\mathbf{x}d_1\mathbf{x} + \ldots = \ldots, \\ d_1^3P^{0,1}_{1,1}&: d_1^4\mathbf{x}\delta_1\mathbf{x} + \ldots = \ldots, \\ d_1^2P^{0,0}_{2,2}&: d_1^4\mathbf{x}d_1^2\mathbf{x} + \ldots = \ldots, \\ d_1^2P^{0,1}_{2,2}&: d_1^4\mathbf{x}d_1\delta_1\mathbf{x} + \ldots = \ldots, \\ d_1^2P^{0,2}_{2,2}&: d_1^4\mathbf{x}\delta_1^2\mathbf{x} + \ldots = \ldots, \\ d_1\hat{P}^{0,2}_{3,3}&: d_1^4\mathbf{x}d_1\delta_1^2\mathbf{x} + \ldots = \ldots, \end{aligned} \qquad (3.19)$$

$$d_1\hat{P}^{0,3}_{3,3}:\ d_1^4 x \delta_1^3 x + \ldots = \ldots,$$

$$\hat{P}^{0,4}_{4,4}:\ d_1^4 x \delta_1^4 x + \ldots = \ldots.$$

Короче можно написать

$$d_1^4 x L_4' + \ldots = \ldots, \tag{3.20}$$

имея в виду, что второй сомножитель главного слагаемого пробегает множество векторов $L_4'$.

Здесь мы выписали лишь первые слагаемые, с производной по $u^1$ максимального, четвертого порядка. Присоединяются еще условия:

$$M_{n-1}\begin{cases} P^{0,0}_{1,1},\ d_1P^{0,0}_{1,1},\ d_1^2P^{0,0}_{1,1},\ P^{0,1}_{1,1},\ d_1P^{0,1}_{1,1},\ d_1^2P^{0,1}_{1,1}, \\ P^{0,0}_{2,2},\ d_1P^{0,0}_{2,2},\ P^{0,1}_{2,2},\ d_1P^{0,1}_{2,2},\ P^{0,2}_{2,2},\ d_1P^{0,2}_{2,2}, \\ \hat{P}^{0,2}_{3,3},\ \hat{P}^{0,3}_{3,3}. \end{cases}$$

В общей форме, для любого $k$, справедлива

Лемма 3.3. Система уравнений задачи погружения эквивалентна системе уравнений вида

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}:\ d_1^{2k} x d_1^p \delta_1^q x + \ldots = \ldots && (0 \leqslant q \leqslant 2k - 2p; \\ & && \ 0 \leqslant p \leqslant k; \\ &\text{или}\ \ d_1^{2k} x . L_{2k}' + \ldots = \ldots && \ p + q > 0), \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$M_{n-1}\begin{cases} P^{p,q}_{s,s},\ d_1P^{p,q}_{s,s} & (1 \leqslant s \leqslant k;\ 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant s), \\ \overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m},\ d_1\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m} & (1 \leqslant m < p \leqslant q \leqslant k), \\ d_1^l P^{0,q}_{s,s} & (1 \leqslant s \leqslant k;\ 0 \leqslant q \leqslant s; \\ & \ 0 \leqslant l < 2k - s), \\ d_1^l \hat{P}^{0,\,q+p}_{k+p,\,k+p} & (1 \leqslant p \leqslant q \leqslant k; \\ & \ 0 \leqslant l < k - p). \end{cases} \tag{3.22}$$

Основное звено системы (т. е. часть системы, относящаяся к $M_n$) сведено к виду, допускающему применение теоремы существования при условии линейной независимости векторов

$$d_1^p \delta_1^q x \quad (0 \leqslant q \leqslant 2k - 2p,\ 0 \leqslant p \leqslant k,\ p + q > 0),$$

т. е. векторов множества $L_{2k}'$. Требуется изучить условия, наложенные на начальное определение системы (уравнения, рассматриваемые на подмногообразии $M_{n-1}$) и показать, что они совместимы с требованием независимости указанных векторов. Для случая теорем 2,4 уравнения сохраняют тот же вид, но допускаются значения $s = 0$ и $p + q = 0$ (что означает включение в $L_{2k}'$ дополнительного вектора $x$); в этом случае мы вместо $L_{2k}'$ пишем $\overset{\circ}{L}{}_{2k}'$.

2. Приведем теперь пропущенные в п. 1 доказательства отдельных этапов преобразования основной части уравнений задачи погружения.

Лемма 3.1. Допустим, что для некоторого натурального $k$ система уравнений (2.3) сведена к форме

$$M_n\begin{cases}P^{0,p}_{s,s}:\ \Omega^{0,p}_{s,s}=\ldots\ (1\leqslant s\leqslant k,\ 0\leqslant p\leqslant s),\\ P^{p,q}_{k,k}:\ \Omega^{p,q}_{k,k}=\ldots\ (1\leqslant p\leqslant q\leqslant k),\end{cases}$$
$$M_{n-1}\begin{cases}P^{p,q}_{s,s}:\ \Omega^{p,q}_{s,s}=\ldots\ (1\leqslant s\leqslant k-1,\\ d_1P^{p,q}_{s,s}:\ d_1\Omega^{p,q}_{s,s}=\ldots\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant s),\end{cases} \tag{3.23}$$

указанной в формулировке леммы. При переходе от $k$ к $k+1$ к системе (2.3) присоединяется еще уравнение

$$\Omega_{k+1}=\ldots,$$

которое заменяется системой уравнений:

$$P^r_{k+1}:\ \Omega^r_{k+1}=\ldots\quad (0\leqslant r\leqslant 2k+2).$$

Поступая подобно тому, как мы уже делали, переходя от случая $k=1$ к случаю $k=2$, введем вместо каждого из уравнений $P^{p,q}_{k,k}$ новое уравнение $D^2P^{p,q}_{k,k}$:

$$D^2P^{p,q}_{k,k}:\ d_1^2\Omega^{p,q}_{k,k}-d_1\delta_1\Omega^{p,q-1}_{k,k}-d_1\delta_1\Omega^{p-1,q}_{k,k}+$$
$$+\delta_1^2\Omega^{p-1,q-1}_{k,k}\equiv 2\Omega^{p,q}_{k+1,k+1}-\Omega^{p-1,q+1}_{k+1,k+1}-\Omega^{p+1,q-1}_{k+1,k+1}=\ldots \tag{3.24}$$

Можно предполагать, что указанная замена производится последовательно, при следующем упорядочивании пар индексов $(p,q)$:

$$\begin{array}{l}(k,k);\\ (k,k-1),\ (k-1,k-1);\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (k,1),(k-1,1),\ldots,(1,1).\end{array}$$

При таком порядке выполнения действий всякий раз, наряду с заменяемым уравнением, используются лишь незамененные уравнения, и потому, исходное уравнение равносильно вновь полученному, при условии присоединения к нему равенств:

$$M_{n-1}:\ P^{p,q}_{k,k},\ d_1P^{p,q}_{k,k}\ (1\leqslant p\leqslant q\leqslant k). \tag{3.25}$$

Уравнения (3.24) вместе с уравнениями

$$P^r_{k+1}:\ \sum_{\nu=\max(0,\,r-k-1)}^{\min(r,\,k+1)} C^{\nu}_{k+1}C^{r-\nu}_{k+1}\Omega^{\nu,r-\nu}_{k+1,k+1}=\ldots,$$

алгебраически эквивалентны следующей совокупности уравнений:

$$P^{p,q}_{k+1,k+1}:\ \Omega^{p,q}_{k+1,k+1}=\ldots\quad(0\leqslant p\leqslant q\leqslant k+1).\tag{3.26}$$

Присоединяя равенства (3.25) и (3.26) к уравнениям для случая $k$, записанным выше, получим систему вида

$$M_n\begin{cases}P^{0,p}_{s,s}\ (1\leqslant s\leqslant k,\ 0\leqslant p\leqslant s),\\ P^{p,q}_{k+1,k+1}\quad(0\leqslant p\leqslant q\leqslant k+1),\end{cases}$$

$$M_{n-1}\begin{cases}P^{p,q}_{s,s}\\ d_1P^{p,q}_{s,s}\end{cases}(1\leqslant p\leqslant q\leqslant s,\ 1\leqslant s\leqslant k-1),\quad P^{p,q}_{k,k},\ d_1P^{p,q}_{k,k}\quad(1\leqslant p\leqslant q\leqslant k).$$

Короче, эти уравнения запишутся в форме

$$M_n\begin{cases}P^{0,p}_{s,s}\qquad(1\leqslant s\leqslant k+1,\ 0\leqslant p\leqslant s),\\ P^{p,q}_{k+1,k+1}\,(1\leqslant p\leqslant q\leqslant k+1),\end{cases}$$

$$M_{n-1},\ P^{p,q}_{s,s},\ d_1P^{p,q}_{s,s}\ (1\leqslant p\leqslant q\leqslant s,\ 1\leqslant s\leqslant k),$$

соответствующей условию леммы, ч. и т. д.

Лемма 3.2. Процесс перехода от уравнений

$$M_n\begin{cases}P^{0,p}_{s,s}\ (1\leqslant s\leqslant k,\ 0\leqslant p\leqslant s),\\ P^{p,q}_{k,k}\ (1\leqslant p\leqslant q\leqslant k)\end{cases}$$

главной части системы, имеющих вид, указанный предыдущей леммой, к виду этих уравнений, указанному леммой 3.2, в основном ясен из п. 1. Здесь мы проведем подробно вычисление левых частей уравнений, обозначенных через $\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,k+m}$.

Всякое уравнение $P^{p,q}_{k,k}$ нашей системы заменяется через уравнение

$$-D^2P^{p,q}_{k,k}\equiv-\left\{d_1^2P^{p,q}_{k,k}-d_1\delta_1P^{p,q-1}_{k,k}-d_1\delta_1P^{p-1,q}_{k,k}+\delta_1^2P^{p-1,q-1}_{k,k}\right\},$$

имеющее вид

$$\overset{(1)}{P}{}^{p,q}_{k+1,k+1}:\ \Omega^{p-1,q+1}_{k+1,k+1}-2\Omega^{p,q}_{k+1,k+1}+\Omega^{p+1,q-1}_{k+1,k+1}=\ldots$$
$$(1\leqslant p\leqslant q\leqslant k),$$

с присоединением условий

$$M_{n-1},\ P^{p,q}_{k,k},\ d_1P^{p,q}_{k,k}\ (1\leqslant p\leqslant q\leqslant k).$$

Допустим, что $m$-кратное повторение указанного преобразования приводит к уравнениям

$$\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}:\quad \sum_{t=0}^{2m}(-1)^t C_{2m}^t \Omega^{p-m+t,\,q+m-t}_{k+m,\,k+m} = \ldots$$

(здесь $m \leqslant p$). Для $m=1$ мы уже имели эти равенства, теперь допустим, что они получены для некоторого $m < p$ и выведем их для $m+1$. Находим последовательно:

$$\overset{(m+1)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m+1,\,k+m+1} \equiv -d_1^2\overset{(m)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m,\,k+m} + d_1\delta_1\overset{(m)}{P}{}^{p,\,q-1}_{k+m,\,k+m} +$$

$$+ d_1\delta_1\overset{(m)}{P}{}^{p-1,\,q}_{k+m,\,k+m} - \delta_1^2\overset{(m)}{P}{}^{p-1,\,q-1}_{k+m,\,k+m}:$$

$$-\sum_{t=0}^{2m}(-1)^t C_{2m}^t\left\{d_1^2\Omega^{p-m+t,\,q+m-t}_{k+m,\,k+m} -\right.$$

$$- d_1\delta_1\Omega^{p-m+t,\;q+m-t-1}_{k+m,\;k+m} - d_1\delta_1\Omega^{p-m+t-1,\,q+m-t}_{k+m,\,k+m} +$$

$$\left.+\delta_1^2\Omega^{p-m+t-1,\;q+m-t-1}_{k+m,\;k+m}\right\} =$$

$$=\sum_{t=0}^{2m}(-1)^t C_{2m}^t\left\{\Omega^{p-m+t-1,\;q+m-t+1}_{k+m+1,\;k+m+1} -\right.$$

$$\left.-2\Omega^{p-m+t,\,q+m-t}_{k+m+1,\,k+m+1} + \Omega^{p-m+t+1,\;q+m-t-1}_{k+m+1,\;k+m+1}\right\} = \ldots,$$

или, с заменой индексов суммирования,

$$\overset{(m+1)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m+1,\,k+m+1}:$$

$$\sum_{t=0}^{2m}(-1)^t C_{2m}^t\Omega^{p-(m+1)+t,\;q+(m+1)-t}_{k+m+1,\;k+m+1} -$$

$$-2\sum_{t'=1}^{2m+1}(-1)^{t'-1}C_{2m}^{t'-1}\Omega^{p-(m+1)+t',\;q+(m+1)-t'}_{k+m+1,\;k+m+1} +$$

$$+\sum_{t''=2}^{2m+2}(-1)^{t''}C_{2m}^{t''-2}\Omega^{p-(m+1)+t'',\;q+(m+1)-t''}_{k+m+1,\;k+m+1} = \ldots,$$

или

$$\overset{(m+1)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m+1,\,k+m+1}:$$

$$\Omega^{p-(m+1),\,q+(m+1)}_{k+m+1,\,k+m+1} -$$

$$-(2m+2)\,\Omega^{p-(m+1)+1,\,q+(m+1)-1}_{k+m+1,\,k+m+1} -$$

$$-(2m+2)\,\Omega^{p+(m+1)-1,\,q-(m+1)+1}_{k+m+1,\,k+m+1}+\Omega^{p+(m+1),\,q-(m+1)}_{k+m+1,\,k+m+1}+$$

$$+\sum_{t=2}^{2m}(-1)^t\left\{C^t_{2m}+2C^{t-1}_{2m}+C^{t-2}_{2m}\right\}\Omega^{p-(m+1)+t,\,q+(m+1)-t}_{k+m+1,\,k+m+1}=\ldots,$$

и окончательно

$$\overset{(m+1)}{P}_{k+m+1,\,k+m+1}:$$

$$\sum_{t=0}^{2m+2}(-1)^tC^t_{2m+2}\Omega^{p-(m+1)+t,\,q+(m+1)-t}_{k+m+1,\,k+m+1}=\ldots,$$

ч. и т. д.

При этом на каждом шаге присоединяются условия

$$M_{n-1},\ \overset{(m)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m,\,k+m},\qquad d_1\overset{(m)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m,\,k+m}.$$

Процесс заканчивается при $m=p$. Уравнение $\overset{(p)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m,\,k+m}$ мы обозначаем иначе через $\hat{P}^{0,\,p+q}_{k+p,\,k+p}$, ввиду того, что главный член в этом уравнении равен $\Omega^{0,\,p+q}_{k+p,\,k+p}$.

Теперь вся система имеет вид:

$$P^{0,\,q}_{s,\,s}:\ d_1^s\mathbf{x}d_1^{s-q}\delta_1^q\mathbf{x}=\ldots(1\leqslant s\leqslant k,\ 0\leqslant q\leqslant s),$$

$$\hat{P}^{0,\,p+q}_{k+p,\,k+p}:\ d_1^{k+p}\mathbf{x}d_1^{k-q}\delta_1^{p+q}\mathbf{x}+\ldots=\ldots(1\leqslant p\leqslant q\leqslant k),\tag{3.27}$$

$$M_{n-1}\begin{cases}P^{p,\,q}_{s,\,s},\ d_1P^{p,\,q}_{s,\,s}\quad(1\leqslant s\leqslant k,\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant s),\\ \overset{(m)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m,\,k+m},\quad d_1\overset{(m)}{P}{}^{p,\,q}_{k+m,\,k+m}\ (1\leqslant m<p\leqslant q\leqslant k),\end{cases}\tag{3.28}$$

указанный формулировкой леммы 3.2. В основной части системы все уравнения имеют главное слагаемое, имеющее вид скалярного произведения, один из сомножителей которого — чистая производная $\mathbf{x}$ по $u^1$, как показано в п. 1 для $k=2$ (3.17).

Лемма 3.3 не требует специального доказательства, так как указанный ею вид уравнений системы непосредственно получается из (3.27) при дифференцировании уравнений основного звена по $u^1$, с доведением порядка чистой производной по $u^1$ до $2k$ и очевидным присоединением условий, относящихся к $M_{n-1}$.

Все проведенные преобразования относились к случаю задания форм $\Omega_s$, $s=1,2,\ldots,k$, т. е. теорем 1 и 2. Для теорем 3,4 (погружение в центроевклидово пространство) присоединяется еще уравнение $\mathbf{x}^2=\Omega_0$, т. е. $s$ пробегает значения $0,1,2,\ldots,n$. В этом случае проведенные преобразования не претерпевают существенных изменений, но в записи уравний системы $s$ будет также принимать и нулевое значение (это относится к уравнениям $P^{0,q}_{s,s}$, $P^{p,q}_{s,s}$, $d_1P^{p,q}_{s,s}$).

## § 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОТНОСЯЩИХСЯ К $M_{n-1}$

1. Уравнения главного звена системы (3,21), обозначенные через $\widetilde{F}$, разрешимы однозначно (по теореме Коши — Ковалевской) при любых начальных условиях, задающих

$$\mathbf{x},\ d_1\mathbf{x}, \ldots, d_1^{2k-1}\mathbf{x} \tag{4.1}$$

на подмногообразии $M_{n-1}$ при условии, что определяемые заданием $d_1^s\mathbf{x}$, $0 \leqslant s \leqslant 2k-1$ векторы, совокупности $L'_{2k}$ линейно независимы на этом подмногообразии. Однако $d_1^s\mathbf{x}$ должны удовлетворять многочисленным добавочным уравнениям, сведенным выше в систему (3.22). Неизвестными в этой системе служат векторы $d_1^s\mathbf{x}$, для которых удобно ввести специальные обозначения:

$$d_1^s\mathbf{x}_{|M_{n-1}} = \xi_s, \tag{4.2}$$

Так, в ранее рассмотренном случае $k=1$, уравнения, которым удовлетворяли $\mathbf{x}_{|M_{n-1}}$, $d_1\mathbf{x}_{|M_{n-1}}$, могли быть сведены к форме (2.16), (2.17) и теперь запишутся так:

$$\delta_1\xi_0^2 = \ldots, \tag{4.3}$$

$$\xi_1^2 = \ldots,\ \xi_1\delta\xi_0 = \ldots,\ \xi_1\delta^2\xi_0 = \ldots \tag{4.4}$$

Раньше, чем перейти к общему случаю, полезно показать вид соответствующих уравнений для $k=2$. Система (3.22) состоит в этом случае из уравнений, классифицируемых по старшему индексу входящего в них $\xi_s$ (т. е. по порядку производной $d_1^s\mathbf{x}$). Из общей совокупности уравнений (3.22), которую мы здесь запишем полностью

$$\text{I.}\ P^{p,q}_{s,s}:\ P^{1,1}_{1,1},\ P^{1,1}_{2,2},\ P^{1,2}_{2,2},\ P^{2,2}_{2,2},$$

$$\text{II.}\ d_1P^{p,q}_{s,s}:\ d_1P^{1,1}_{1,1},\ d_1P^{1,1}_{2,2},\ d_1P^{1,2}_{2,2},\ d_1P^{2,2}_{2,2},$$

$$\text{III.}\ \overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,k+m}:\ \overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3},$$

$$\text{IV.}\ d_1\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,k+m}:\ d_1\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3},$$

$$\text{V.}\ d_1^lP^{0,q}_{s,s}:\ P^{0,0}_{1,1},\ d_1P^{0,0}_{1,1},\ d_1^2P^{0,0}_{1,1},$$

$$P^{0,1}_{1,1},\ d_1P^{0,1}_{1,1},\ d_1^2P^{0,1}_{1,1},$$

$$P^{0,0}_{2,2},\ d_1P^{0,0}_{2,2},\ P^{0,1}_{2,2},\ d_1P^{0,1}_{2,2},$$

$$P^{0,2}_{2,2},\ d_1P^{0,2}_{2,2},$$

VI. $d_1^l\hat{P}^{0,\,p+q}_{k+p,\,k+p}$: $\hat{P}^{0,2}_{3,3}$, $\hat{P}^{0,3}_{3,3}$ (здесь $l=0$),

к системе для $\xi_0$ относятся уравнения

$$F^0\begin{cases} P^{1,1}_{1,1}\colon\ \delta\xi_0^2=\ldots, & (4.5)\\ P^{2,2}_{2,2}\colon\ \delta^2\xi_0^2=\ldots, & (4.6)\end{cases}$$

к системе для $\xi_1$ уравнения:

$$F^1\begin{cases} P^{0,0}_{1,1}\colon\ \xi_1^2=\ldots, & (4.7)\\ P^{0,1}_{1,1}\colon\ \xi_1\delta_1\xi_0=\ldots, & (4.8)\\ d_1P^{1,1}_{1,1}\colon\ \delta_1\xi_1\delta_1\xi_0=\ldots, & (4.9)\\ P^{1,1}_{2,2}\colon\ \delta_1\xi_1^2=\ldots, & (4.10)\\ P^{1,2}_{2,2}\colon\ \delta_1\xi_1\delta_1^2\xi_0=\ldots, & (4.11)\\ d_1P^{0,2}_{2,2}\colon\ \delta_1^2\xi_1\delta_1^2\xi_0=\ldots. & (4.12)\end{cases}$$

При этом уравнения, содержащие $d_1\xi_1$, $d_1^2\xi_1$, легко превращаются в конечные уравнения для $\xi_1$. В самом деле, применив к уравнениям (4.8), (4.11) $\delta_1$-дифференцирование и вычитая из полученных равенств соответственно уравнения (4.9), (4.12), мы заменим эти последние равносильными:

$$\xi_1\delta_1^2\xi_0=\ldots,\quad \delta_1\xi_1\delta_1^3\xi_0=\ldots.$$

$\delta_1$-дифференцирование первого из них позволяет свести $P^{1,2}_{2,2}$ к виду

$$\xi_1\delta_1^3\xi_0=\ldots$$

и, наконец, дифференцируя это последнее, заменим с его помощью уравнение $\delta_1\xi_1\delta_1^3\xi_0=\ldots$ уравнением, конечным относительно $\xi_1$:

$$\xi_1\delta_1^4\xi_0=\ldots$$

Окончательно, система $F^1$ состоит из уравнений вида

$$F_1^1\colon\ \xi_1^2=\ldots,\quad \delta_1\xi_1^2=\ldots, \qquad (4.13)$$

$$F_0^1\colon\ \xi_1\delta_1\xi_0=\ldots,\quad \xi_1\delta_1^2\xi_0=\ldots,$$

$$\xi_1\delta_1^3\xi_0=\ldots,\quad \xi_1\delta_1^4\xi_0=\ldots. \qquad (4.14)$$

Для $\xi_2$ мы имеем уравнения

$$P^{0,0}_{2,2}\colon\ \xi_2^2=\ldots,$$

$$d_1P^{0,0}_{1,1}\colon\ \xi_2\xi_1=\ldots,$$

$$d_1P^{1,1}_{2,2}: \ \delta_1\xi_2\delta_1\xi_1 = \ldots,$$
$$P^{0,1}_{2,2}: \ \xi_2\delta_1\xi_1 = \ldots,$$
$$d_1P^{0,1}_{1,1}: \ \xi_2\delta_1\xi_0 + \delta_1\xi_1\cdot\xi_1 = \ldots, \tag{4.15}$$
$$P^{0,2}_{2,2}: \ \xi_2\delta_1^2\xi_0 = \ldots,$$
$$d_1P^{1,2}_{2,2}: \ \delta_1\xi_2\delta_1^2\xi_0 + \delta_1^2\xi_1\delta_1\xi_1 = \ldots,$$
$$\overset{(1)}{P}{}^{2,2}_{3,3}: \ \delta_1\xi_2\delta_1^3\xi_0 - \delta_1^2\xi_1^2 = \ldots.$$

Дифференцируя (в смысле $\delta_1$-дифференцирования) уравнение четвертой строки мы сейчас же сможем с его помощью заменить уравнение третьей строки равенством вида $\xi_2\delta_1^2\xi_1 = \ldots$ и, таким образом, уравнения второй — четвертой строк заменятся равенствами:

$$F_1^2\begin{cases}\xi_2\xi_1 = \ldots, \ \xi_2\delta_1\xi_1 = \ldots,\\ \xi_2\delta_1^2\xi_1 = \ldots\end{cases} \tag{4.16}$$

конечными относительно $\xi_2$. Уравнение $\xi_2^2 = \ldots$ образует систему $F_2^2$.

Такими же приемами сводятся к уравнениям, конечным относительно $\xi_2$, и уравнения следующих четырех строк. Выпишем равенства, полученные их преобразованием также полностью:

$$F_0^2\begin{cases}\xi_2\delta_1\xi_0 + \delta_1\xi_1\cdot\xi_1 = \ldots,\\ \xi_2\delta_1^2\xi_0 = \ldots,\\ \xi_2\delta_1^3\xi_0 - \delta_1^2\xi_1\delta_1\xi_1 = \ldots,\\ \xi_2\delta_1^4\xi_0 - \delta_1^3\xi_1\delta_1\xi_1 = \ldots.\end{cases} \tag{4.17}$$

Далее следуют уравнения для $\xi_3$. Запишем только главные члены уравнений:

$$F_2^3 \quad d_1P^{0,0}_{2,2}: \ \xi_3\xi_2 + \ldots = \ldots, \tag{4.18}$$

$$F_1^3\begin{cases}d_1^2P^{0,0}_{1,1}: \ \xi_3\xi_1 + \ldots = \ldots,\\ d_1P^{0,1}_{2,2}: \ \xi_3\delta_1\xi_1 + \ldots = \ldots,\\ \hat{P}^{0,2}_{3,3}: \ \xi_3\delta_1^2\xi_1 + \ldots = \ldots,\end{cases} \tag{4.19}$$

$$F_0^3\begin{cases}d_1^2P^{0,1}_{1,1}: \ \xi_3\delta_1\xi_0 + \ldots = \ldots,\\ d_1P^{0,2}_{2,2}: \ \xi_3\delta_1^2\xi_0 + \ldots = \ldots,\\ \hat{P}^{0,3}_{3,3}: \ \xi_3\delta_1^3\xi_0 + \ldots = \ldots,\\ d_1\hat{P}^{2,2}_{3,3}: \ \delta_1\xi_3\delta_1^3\xi_0 + \ldots = \ldots,\end{cases} \tag{4.20}$$

где последнее уравнение немедленно заменяется с помощью $\delta_1$-дифференциала предыдущего, уравнением

$$\xi_3\delta_1^4\xi_0 + \ldots = \ldots . \tag{4.21}$$

Мы видим, что все уравнения для $\xi_3$ — конечные.

По ходу дела мы ввели следующие обозначения: под $F_\mu^\lambda$ понимается та часть системы $F^\lambda$ (т. е. системы уравнений для $\xi_\lambda = d_1^\lambda \mathbf{x}_{|M_{n-1}}$, не содержащих $\xi_\mu$ при $\mu > \lambda$), которая имеет в главных членах своих уравнений скалярные произведения $\xi_\lambda$ или $\delta_1^p\xi_\lambda$ на $\xi_\mu$ или $\delta_1^q\xi_\mu$ (при $\mu \leqslant \lambda$). Обзор всех систем $F_\mu^\lambda$, полученных для нашего случая $k=2$, показывает, что:

1. Система $F_0^0$ аналогична исходной, но в ней $n_1 = n-1$ (так как она относится к начальному подмногообразию $M_{n-1}$).

2. $F^1$ распадается на $F_1^1$ и $F_0^1$. Система $F_1^1$ также аналогична системе уравнений задачи погружения (она содержит еще уравнение $\xi_1^2 = \ldots$; такое уравнение имеется и в основной системе для теорем 3, 4), но для нее $k_1 = k-1$ и $n_1 = n-1$. Система $F_0^1$ содержит конечные уравнения.

3. Уравнения систем $F^2$ и $F^3$ все конечные (из формальных соображений удобней единственное уравнение $F_2^2$, имеющее вид $\xi_2^2 = \ldots$, рассматривать как «дифференциальное» уравнение типа уравнений задачи погружения для теорем 3,4, но с $k=0$).

**2.** При произвольном $k$ анализ уравнений, относящихся к $M_{n-1}$, проводится аналогично. Приведем сначала формулировку результатов. Сохраним обозначения $\xi_\lambda = d_1^\lambda \mathbf{x}_{|M_{n-1}}$, $0 \leqslant \lambda < 2k$ и обозначения $F_\mu^\lambda$ для соответствующих частей рассматриваемых систем уравнений. Во всех записях будем теперь допускать и значение $s=0$, что отвечает случаю теорем 3 и 4; при переходе к теоремам 1 и 2 достаточно отбросить все уравнения, содержащие $\xi_0$ без знака дифференцирования. Оказывается, что при $\mu < \lambda$ и $\mu = \lambda$ системы имеют существенно различный характер. Именно, при $\mu = \lambda$ система $F_\lambda^\lambda$ имеет форму системы уравнений задачи погружения с $k_1 = k - \lambda$:

$$F_\lambda^\lambda : \xi_\lambda^2 = \ldots, \delta_1\xi_\lambda^2 = \ldots, \ldots \delta_1^{k-\lambda}\xi_\lambda^2 = \ldots \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant k), \tag{4.22}$$

системы же $F_\mu^\lambda$ при $\mu < \lambda \leqslant k$ — конечные относительно $\xi_\lambda$:

$$F_\mu^\lambda : \xi_\lambda\xi_\mu + \ldots = \ldots, \xi_\lambda\delta_1\xi_\mu + \ldots = \ldots, \ldots, \xi_\lambda\delta_1^{2k-2\mu}\xi_\mu + \ldots = \\ = \ldots \quad (0 \leqslant \mu < \lambda). \tag{4.23}$$

В случае $\lambda = k$ из «дифференциальных» уравнений для $\xi_\lambda$ остается только $\xi_k^2 = \ldots$. При $\lambda > k$ все уравнения — конечные:

$$F_\mu^\lambda: \xi_\lambda \xi_\mu + \ldots = \ldots, \ldots, \xi_\lambda \delta_1^{2k-2\mu} \xi_\mu + \ldots = \ldots$$
$$(0 \leqslant \mu \leqslant k). \tag{4.24}$$

Все уравнения для $\xi_\lambda$ можно еще более компактно записать в виде:

1. Дифференциальные уравнения:

$$F_\lambda^\lambda: \delta_1^p \xi_\lambda^2 = \ldots \ (0 \leqslant \lambda \leqslant k, \ 0 \leqslant p \leqslant k - \lambda). \tag{4.25}$$

2. Конечные уравнения:

$$F_\mu^\lambda: \xi_\lambda \delta_1^p \xi_\mu + \ldots = \ldots \quad (0 \leqslant p \leqslant 2(k - \mu),$$
$$1 \leqslant \lambda \leqslant 2k - 1, \ 0 \leqslant \mu \leqslant \min(\lambda - 1, k)). \tag{4.26}$$

3. Для обоснования приведенных утверждений удобно вначале сформулировать следующую простую лемму:

Лемма 4.1: Система уравнений вида

$$\mathfrak{f} d^{l+1} \mathfrak{g} = \ldots, d \mathfrak{f} d^{l+2} \mathfrak{g} = \ldots, \ldots, d^{m-1} \mathfrak{f} d^{l+m} \mathfrak{g} =$$
$$= \ldots, d^m \mathfrak{f} d^{l+m+1} \mathfrak{g} = \ldots; *$$
$$d \mathfrak{f} d^{l+1} \mathfrak{g} = \ldots, d^2 \mathfrak{f} d^{l+2} \mathfrak{g} = \ldots, \ldots, d^m \mathfrak{f} d^{l+m} \mathfrak{g} = \ldots,$$

где $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ суть аналитические вектор-функции своих аргументов, равносильна системе уравнений

$$\mathfrak{f} d^{l+1} \mathfrak{g} = \ldots, \mathfrak{f} d^{l+2} \mathfrak{g} = \ldots, \ldots, \mathfrak{f} d^{l+2m} \mathfrak{g} = \ldots, \mathfrak{f} d^{l+2m+1} \mathfrak{g} = \ldots *$$

конечных относительно $\mathfrak{f}$. Уравнения, отмеченные знаком *, одновременно включаются или отсутствуют в обеих системах. Для доказательства достаточно попеременно преобразовать уравнения верхней (нижней) строки с помощью результатов дифференцирования уравнений нижней (верхней) строки.

4. Выпишем еще раз уравнения (3.22)[1], ограничиваясь главными членами и применяя обозначение $\mathfrak{x}_{|M_{n-1}} = \xi_0, \ldots, \ldots, d_1^{2k-1} \mathfrak{x}_{|M_{n-1}} = \xi_{2k-1}$:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & P_{s,s}^{p,q}: \delta_1^p \xi_{s-p} \delta_1^q \xi_{s-q} = \ldots & (0 \leqslant s \leqslant k; \\
\text{II.} & d_1 P_{s,s}^{p,q}: \delta_1^p \xi_{s-p+1} \delta_1^q \xi_{s-q} + \ldots = \ldots & 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant s). \\
\text{III.} & \overset{(m)}{P}{}_{k+m,\,k+m}^{p,q}: \delta_1^{p-m} \xi_{k-p+2m} \delta_1^{q+m} \xi_{k-q} + \ldots = \ldots, & \\
\text{IV.} & d_1 \overset{(m)}{P}{}_{k+m,\,k+m}^{p,q}: \delta_1^{p-m} \xi_{k-p+2m+1} \delta_1^{q+m} \xi_{k-q} + \ldots = \ldots &
\end{array} \tag{4.27}$$

[1] Допуская также значение $s=0$.

В уравнениях III, IV $1 \leqslant m < p \leqslant q \leqslant k$.

$$\text{V.}\quad d_1^l P_{s,s}^{0,q}:\ \xi_{s+l}\delta_1^q \xi_{s-q} + \ldots = \ldots$$
$$(0 \leqslant l < 2k - s;\quad 0 \leqslant q \leqslant s \leqslant k).$$
$$\text{VI.}\quad d_1^l \hat{P}_{k+p,k+p}^{0,p+q}:\ \xi_{k+p+l}\delta_1^{p+q}\xi_{k-q} + \ldots = \ldots$$
$$(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant k;\ 0 \leqslant l < k - p).$$

Первой задачей является разбиение этой системы $F$ на системы $F^\lambda$ уравнений, содержащих $\xi_\lambda$, но не содержащих $\xi_\mu$, $\mu > \lambda$. Уравнения $F^\lambda$ мы в свою очередь подразделяем на системы $F_\mu^\lambda$, относя к $F_\mu^\lambda$ те из уравнений $F^\lambda$, главное слагаемое в левых частях которых имеет вид

$$\delta_1^p \xi_\lambda \delta_1^q \xi_\mu,$$

с данными фиксированными $\lambda$, $\mu$, $\mu \leqslant \lambda$. Ясно, что $0 \leqslant \mu \leqslant \min(\lambda, k)$. В связи с этим удобно рассмотреть в отдельности следующие случаи: *A.* $\mu = \lambda$; *B.* $\mu < \lambda$; $1 \leqslant \lambda \leqslant k$; *C.* $k < \lambda \leqslant 2k - 1$.

**A.** Если $\mu = \lambda$, то приходится выбрать из системы $F$ лишь те уравнения I, для которых $p = q$, и те уравнения V, где $q = l = 0$. Таким путем находим системы $F_\lambda^\lambda$ при $\lambda = 0, 1, \ldots, k$:

$$F_0^0 = F^0:\ \xi_0^2 = \ldots,\ \delta_1\xi_0^2 = \ldots,\ \ldots,\ \delta_1^k\xi_0^2 = \ldots.$$
$$F_\lambda^\lambda:\ \xi_\lambda^2 = \ldots,\ \delta_1\xi_\lambda^2 = \ldots,\ \ldots,\ \delta_1^{k-\lambda}\xi_\lambda^2 = \ldots\ (1 \leqslant \lambda < k).$$
$$F_k^k:\ \xi_k^2 = \ldots.$$

Все эти системы имеют тот же вид, что и основная система задачи погружения.

**B.** При $\lambda = 0$ также имеем $\mu = 0$ и система $F_0^0$ уже выписана выше. Пусть теперь $1 \leqslant \lambda \leqslant k$, $0 \leqslant \mu < \lambda$. При фиксированных $\lambda$, $\mu$, удовлетворяющих указанным неравенствам, в $F_\mu^\lambda$ войдут следующие уравнения:

I. Из уравнений $P_{s,s}^{p,q}$ в $F_\mu^\lambda$ войдут те, для которых $s - p = \lambda$, $s - q = \mu$, т. е. $P_{s,s}^{s-\lambda, s-\mu}$, имеющие вид:

$$\delta_1^{s-\lambda}\xi_\lambda\delta_1^{s-\mu}\xi_\mu = \ldots, \tag{4.28}$$

где $s = \lambda + 1, \ldots, k$ (при $\lambda = k$ таких уравнений не будет).

II. Из числа уравнений $d_1 P_{s,s}^{p,q}$ к $F_\mu^\lambda$ будут принадлежать те, для которых $s - p + 1 = \lambda$, $s - q = \mu$, т. е. $P_{s,s}^{s-\lambda+1, s-\mu}$, имеющие вид:

$$\delta_1^{s-\lambda+1}\xi_\lambda\delta_1^{s-\mu}\xi_\mu + \ldots = \ldots \tag{4.29}$$

с $s = \lambda, \lambda + 1, \ldots, k$.

III. Из уравнений $\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}$ отбираем те, для которых $k-p+2m=\lambda$, $k-q=\mu$, т. е. $\overset{(m)}{P}{}^{k-\lambda+2m,\,k-\mu}_{k+m,\,k+m}$, имеющие вид

$$\delta_1^{k-\lambda+m}\xi_\lambda\delta_1^{k+m-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots. \tag{4.30}$$

Для уточнения значений, принимаемых $m$, заметим, что $1\leqslant m<$ $<p\leqslant q\leqslant k$, откуда $1\leqslant m<k-\lambda+2m\leqslant k-\mu\leqslant k$, что с учетом $\lambda\leqslant k$ дает для $m$ условия $1\leqslant m$ и $2m\leqslant\lambda-\mu$. Таким образом, $m=1,2,\ldots,\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]$.

IV. Из уравнений $d_1\overset{(m)}{P}{}^{p,q}_{k+m,\,k+m}$, аналогично, выберем те, для которых $k-p+2m+1=\lambda$, $k-q=\mu$, т. е. $d_1\overset{(m)}{P}{}^{k-\lambda+2m+1,\,k-\mu}_{k+m,\,k+m}$, имеющие вид:

$$\delta_1^{k-\lambda+m+1}\xi_\lambda\delta_1^{k-\mu+m}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \tag{4.31}$$

где $m$ принимает значения, определяемые из неравенств

$$1\leqslant m<k-\lambda+2m+1\leqslant k-\mu\leqslant k,$$

приводящих к

$$1\leqslant m\leqslant\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right].$$

V. Из указанных уравнений $d_1^lP^{0,q}_{s,s}$ в $F^\lambda_\mu$ входят те, для которых $s+l=\lambda$, $s-q=\mu$. Они имеют вид

$$\xi_\lambda\delta^{s-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \tag{4.32}$$

причем $s=\mu,\ \mu+1,\ldots;\lambda$.

VI. Уравнений $d_1^l\hat{P}^{0,\,p+q}_{k+p,\,k+p}$ с $\lambda\leqslant k$ не имеется.

Все найденные уравнения удобно расположить в следующем порядке: 1) Все уравнения V, кроме последнего, для которого $s=\lambda$:

$$\xi_\lambda\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \xi_\lambda\delta_1\xi_\mu+\ldots=\ldots$$
$$\ldots,\ldots,\ \xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu-1}\xi_\mu+\ldots=\ldots \tag{4.33}$$

2) Последнее уравнение V, все уравнения I и III:

$$\xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \delta_1\xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu+1}\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ldots$$
$$\ldots,\ \delta_1^{k-\lambda+\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]}\xi_\lambda\delta_1^{k-\mu+\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]}\xi_\mu+\ldots=\ldots. \tag{4.34}$$

3) Уравнения II и IV:

$$\delta_1\xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ldots$$
$$\ldots,\ \delta_1^{k-\lambda+\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]+1}\xi_\lambda\delta_1^{k-\mu+\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]}\xi_\mu+\ldots=\ldots. \tag{4.35}$$

Подсчитаем высшие порядки производных от $\xi_\lambda$, $\xi_\mu$ в строках (4.34) и (4.35) в зависимости от четности или нечетности $\lambda-\mu$. Если $\lambda=\mu+2\sigma$, то $k-\lambda+\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]=k-\lambda+\sigma$, $k-\mu+\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]=k-\mu+\sigma$ и сумма порядков производных в последнем уравнении (4.34) равна $2k-\lambda-\mu+2\sigma=2(k-\mu)$. В строке (4.35) эта сумма, как легко видеть, на единицу меньше, т. е. равна $2(k-\mu)-1$.

В случае $\lambda=\mu+2\sigma+1$ мы находим, напротив, для (4.35)

$$k-\lambda+\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]+1+k-\mu+\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]=$$
$$=2k-\lambda-\mu+2\sigma+1=2(k-\mu),$$

а в строке (4.34) соответствующий показатель будет на единицу меньше. В обоих случаях к уравнениям (4.34) и (4.35) применима лемма 4.1 и мы сводим систему $F_\mu^\lambda$ к виду

$$F_\mu^\lambda:\ \xi_\lambda\xi_\mu=\ldots,\ \xi_\lambda\delta_1\xi_\mu+\ldots=\ldots$$
$$\ldots,\ \ldots,\ \xi_\lambda\delta_1^{2k-2\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots \qquad (4.36)$$

(условимся сохранять за этой системой уравнений обозначение $F_\mu^\lambda$).

C. Остается рассмотреть случай $k<\lambda$, $\mu\leqslant k$. Ввиду аналогии с предыдущим остановимся на нем менее подробно.

I, II. Уравнения $P_{s,s}^{p,q}$ и $d_1P_{s,s}^{p,q}$ отсутствуют.

III. Из уравнений III имеем

$$\overset{(m)}{P}{}_{k+m,\,k+m}^{k-\lambda+2m,\,k-\mu}:\ \delta_1^{k-\lambda+m}\xi_\lambda\delta_1^{k-\mu+m}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \qquad (4.37)$$

где $m$ принимает значения, определяемые из неравенств

$$1\leqslant m<k-l+2m\leqslant k-\mu\leqslant k,$$

приводящих к

$$\lambda-k+1\leqslant m\leqslant\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right].$$

IV. Отсюда в $F_\mu^\lambda$ войдут уравнения

$$d_1\overset{(m)}{P}{}_{k+m,\,k+m}^{k-\lambda+2m+1,k-\mu}:\ \delta_1^{k-\lambda+m+1}\xi_\lambda\delta_1^{k-\mu+m}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \qquad (4.38)$$

$$\lambda-k\leqslant m\leqslant\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right].$$

V. Полагаем $s+l=\lambda$, $s-q=\mu$ и находим

$$d_1^{\lambda-s}P_{s,s}^{0,s-\mu}\colon\ \xi_\lambda\delta^{s-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots \tag{4.39}$$

$$(s=\mu,\ \mu+1,\ \ldots,\ k).$$

VI. Выбираем уравнения, для которых $k+p+l=\lambda$, $k-q=\mu$, т. е. уравнения вида

$$\xi_\lambda\delta_1^{k-\mu+p}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \tag{4.40}$$

где $l\geqslant 0$, $\lambda-k-p\geqslant 0$, $p\leqslant k-m$, откуда $1\leqslant p\leqslant \leqslant \min(k-\mu,\ \lambda-k)$.

Далее приходится различать три случая: 1) $k-\mu\leqslant\lambda-k$, 2) $k-\mu=\lambda-k+1$, 3) $k-\mu>\lambda-k+1$.

1) $k-\mu\leqslant\lambda-k$. В этом случае уравнений III и IV в системе нет, так как при $\lambda-k\geqslant k-\mu$ справедливы неравенства $\lambda-k+1>\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]$, $\lambda-k>\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]$ и условия, налагаемые на $m$ в соответствующих уравнениях III и IV, несовместны. Уравнения же V и VI конечны относительно $\xi_\lambda$ и имеют вид:

$$\xi_\lambda\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \ldots,\ \xi_\lambda\delta_1^{2k-2\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots. \tag{4.41}$$

2) $k-\mu=\lambda-k+1$. В этом случае $\lambda-k+1>\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]$ и уравнений III в системе не имеется, но есть одно уравнение IV, так как $\lambda-k=\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]$:

$$\delta_1\xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \tag{4.42}$$

конечные же уравнения V, VI дают, ввиду $\lambda-\mu=2k-2\mu-1$,

$$\xi_\lambda\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \ldots,\ \xi_\lambda\delta_1^{2k-2\mu-1}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \tag{4.43}$$

и вся система равносильна системе

$$\xi_\lambda\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \ldots,\ \xi_\lambda\delta_1^{2k-2\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots. \tag{4.44}$$

3) $k-\mu>\lambda-k+1$. В систему входят уравнения III и IV, и она имеет вид

$$\xi_\lambda\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \ldots,\ \xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu-1}\xi_\mu+\ldots=\ldots \tag{4.45}$$

$$\xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \ldots,\ \delta_1^{k-\lambda+\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]}\xi_\lambda\delta_1^{k-\mu+\left[\frac{\lambda-\mu}{2}\right]}\xi_\mu+\ldots=\ldots, \tag{4.46}$$

$$\delta_1\xi_\lambda\delta_1^{\lambda-\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \ldots,\ \delta_1^{k-\lambda+\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]+1}\xi_\lambda\times$$

$$\times\delta_1^{k-\mu+\left[\frac{\lambda-\mu-1}{2}\right]}\xi_\mu+\ldots=\ldots \tag{4.47}$$

и по лемме 4.1 приводится к

$$F_\mu^\lambda\colon\ \xi_\lambda\xi_\mu+\ldots=\ldots,\ \ldots,\ \xi_\lambda\delta_1^{2k-2\mu}\xi_\mu+\ldots=\ldots \tag{4.48}$$

(как и прежде здесь можно отдельно разбирать случаи $\lambda-\mu=2\sigma$ и $\lambda-\mu=2\sigma+1$).

Во всех случаях получаемая совокупность уравнений и дает для $F_\mu^\lambda$ систему (4.26), приведенную в п. 2.

## § 5. ПОДСЧЕТ ПРОИЗВОЛА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОГРУЖЕНИЯ

Рассмотрим случай теоремы 3, т. е. случай погружения в пространство размерности

$$\mathring{N}'(n,k)=N'(n,\ k)+1,$$

равной числу векторов множества $\mathring{L}'_{2k}$. Мы уже имеем возможность подсчитать произвол решения при некоторых допущениях, оправдание которых содержится в главе 3.

Уравнения ведущего звена $\widetilde{F}$ после их разрешения относительно $d_1^{2k}\mathbf{x}$ превратятся в систему Коши—Ковалевской и будут иметь единственное решение при задании начальных условий, т. е. $\xi_\lambda$ $(\lambda=0,1,\ldots,2k-1)$. Здесь мы допускаем линейную независимость векторов множества $\mathring{L}'_{2k}$. Уравнения для $\xi_\lambda$ $(\lambda=k,k+1,\ldots,2k-1)$ также определяют эти векторы и весь произвол решения связан с системами для $\xi_\lambda$ $(\lambda<k)$. Предполагая теорему погружения доказанной и рассуждая по индукции, можно считать, что уравнения $F_\lambda^\lambda$ для $\xi_\lambda$ разрешимы уже в пространстве $\mathring{N}'(n-1,k-\lambda)$ измерений. Но вектор $\xi_\lambda$ также удовлетворяет конечным соотношениям $F_\mu^\lambda$ $(0\leqslant\mu<\lambda)$. При этом число уравнений $F_\mu^\lambda$ равно

$$\mathring{N}(n-1,\ k-\mu).$$

Поэтому число «произвольных» координат вектора $\xi_\mu$ можно подсчитать, вычитая из общей размерности $\mathring{N}'(n,k)$ размерность $\mathring{N}'(n-1,k-\lambda)$ и число конечных соотношений:

$$\mathring{N}'(n, k) - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} \mathring{N}(n-1, k-\mu) - \mathring{N}'(n-1, k-\lambda).$$

Преобразование этого выражения не представляет трудности и дает

$$\sum_{s=0}^{k} C_{n+2s-1}^{2s} - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} C_{n+2k-1-2\mu}^{2k-2\mu} - \sum_{s=0}^{k-\lambda} C_{n+2s-2}^{2s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-\lambda} \left\{C_{n+2s-1}^{2s} - C_{n+2s-2}^{2s}\right\} = \sum_{s=1}^{k-\lambda} C_{n+2s-2}^{2s-1}.$$

Это есть не что иное, как число произвольных функций $(n-1)$-го аргумента, вводимых при определении $\xi_\lambda$, $\lambda < k$. Общее число произвольных функций $(n-1)$-го аргумента будет равно

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-\lambda} C_{n+2s-2}^{2s-1},$$

или

$$\sum_{s=1}^{k} (k-s+1)\, C_{n+2s-2}^{2s-1},$$

т. е. числу, указанному в формулировке теоремы 1 (и теоремы 3, для которой подсчет дает то же самое число).

Для теорем 2 и 4 произвол будет исчисляться в функциях $n$ аргументов и будет равен разности между размерностью $N(n, k)$ пространства погружения и размерностью $N'(n, k)$:

$$T(n, k) = N(n, k) - N'(n, k).$$

Все проведенные до сих пор рассуждения составляют уже черновое доказательство теорем погружения, соответствующее, для классического случая, неполному доказательству Жане.

## § 6. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ

1. Каждая из систем уравнений $F_{\lambda_1}^{\lambda_1}$ имеет тот же вид, что и исходная система уравнений $F$ (с заменой $\mathbf{x}$ на $\xi_{\lambda_1}$, $n$ на $n-1$ и $k$ на $k-\lambda_1$). Поэтому к ней применимы все преобразования, проведенные для системы $F$ (с выделением в качестве главной переменной $u^2$). При этом $F_{\lambda_1}^{\lambda_1}$ сведется к следующей совокупности уравнений:

1. Ведущее звено системы $\widetilde{F}^{\lambda_1}_{\lambda_1}$:

$$M_{n-1},\ d_2^{2(k-\lambda_1)}\xi_{\lambda_1} d_2^{\mu_2}\delta_2^p \xi_{\lambda_1} + \ldots = \ldots \tag{6.1}$$

$$(0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\mu_2),\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant k,\ 0 \leqslant \mu_2 \leqslant k-\lambda_1).$$

2. Дифференциальные уравнения $F^{\lambda_1\lambda_2}_{\lambda_1\lambda_2}$:

$$M_{n-2},\ (\delta_2^p \xi_{\lambda_1\lambda_2})^2 = \ldots \tag{6.2}$$

$$(0 \leqslant p \leqslant k-\lambda_1-\lambda_2,\ 0 \leqslant \lambda_1 < k,\ 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant k-\lambda_1).$$

3. Конечные уравнения $F^{\lambda_1\lambda_2}_{\lambda_1\mu_2}$:

$$M_{n-2},\ \xi_{\lambda_1\lambda_2}\delta_2^p \xi_{\lambda_1\mu_2} + \ldots = \ldots \tag{6.3}$$

$$(0 \leqslant \mu_2 < \lambda_2,\ 0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\mu_2),\ 1 \leqslant \lambda_2 < 2(k-\lambda_1)),$$

где обозначаем

$$\xi_{\lambda_1\lambda_2} = \left.\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2}\mathrm{x}}{\partial u^{1\lambda_1}\partial u^{2\lambda_2}}\right|_{M_{n-2}},$$

$$d_2 = \frac{\partial}{\partial u^2} du^2,\ \delta_2 = \delta_1 - d_2 = \frac{\partial}{\partial u^3} du^3 + \ldots + \frac{\partial}{\partial u^n} du^n.$$

Замечание: при $\lambda_1 = k$ указанное преобразование имеет тождественный характер; единственное уравнение $F^k_k$: $\xi^2_k = \ldots$ сохраняет свой вид, но рассматривается уже как уравнение $\widetilde{F}^k_k$.

Далее такое же преобразование применяется уже к уравнениям $F^{\lambda_1\lambda_2}_{\lambda_1\lambda_2}$ по аргументу $u^3$ и т. д.

Чтобы записать результат таких преобразований, обозначаем, аналогично предыдущему,

$$\xi_{\lambda_1\ldots\lambda_s} = \left.\frac{\partial^{\lambda_1+\ldots+\lambda_s}\mathrm{x}}{\partial u^{1\lambda_1}\ldots\partial u^{s\lambda_s}}\right|_{M_{n-s}},$$

$$d_s = \frac{\partial}{\partial u^s} du^s,\ \delta_s = \delta_{s-1} - d_s$$

и приводим результат в следующей форме (опуская индукцию по числу проведенных шагов преобразования, ввиду ее очевидного характера).

1. Для любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n-1)$ таких, что

$$0 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s \leqslant k,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{s-1} < k,$$

ведущее звено $\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ будет иметь вид:

$$M_{n-s},\ d_{s+1}^{2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_s)}\xi_{\lambda_1\ldots\lambda_s} d_{s+1}^{\mu_{s+1}}\delta_{s+1}^p \xi_{\lambda_1\ldots\lambda_s} + \ldots = \ldots \tag{6.4}$$

$$(0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_s-\mu_{s+1})),$$

где при $s=n-1$ следует полагать $\delta_{s+1}=\delta_n=0$, так что сохранятся лишь уравнения с $p=0$.

2. Для любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ таких, что

$$1 \leqslant \lambda_s < 2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}),$$

конечные уравнения $F^{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\mu_s}$ будут иметь вид

$$\begin{gathered} M_{n-s},\ \xi_{\lambda_1\ldots\lambda_s}\delta_s^p\xi_{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\mu_s}+\ldots=\ldots \\ 0 \leqslant \mu_s < \lambda_s,\ 0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\ldots\lambda_{s-1}-\mu_s) \end{gathered} \tag{6.5}$$

Поскольку, при каждом шаге преобразования, системы $F^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ рассматриваются на многообразиях понижающейся размерности $n-s$, то, при $0 \leqslant \lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1} < k$, на последнем шаге преобразования, переводящем уравнения $F^{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}$ в уравнения ведущего звена $\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}$ и конечные уравнения $F^{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\lambda_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\mu_n}$, вместо дифференциальных, получатся уравнения

$$\begin{gathered} M_0,\ \xi^2_{\lambda_1\ldots\lambda_n}=\ldots \\ 0 \leqslant \lambda_1+\ldots+\lambda_n \leqslant k,\ 0 \leqslant \lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1} < k, \end{gathered} \tag{6.6}$$

относящиеся к начальной точке и уже не допускающие дальнейших преобразований. Те из этих уравнений, для которых $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=k$ удобно рассматривать, как уравнения $\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, остальные же, для которых $\lambda_1+\ldots+\lambda_n < k$, мы обозначаем $F^{\lambda_1\ldots\lambda_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$. Уравнения $\widetilde{F}$ также включаются в число уравнений $\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ при $s=0$. Таким образом, вся система сводится к следующей совокупности уравнений

$$\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_s},\ (0 \leqslant s \leqslant n,\ 0 \leqslant \lambda_1+\ldots+\lambda_s \leqslant k,$$

$$0 \leqslant \lambda_1+\ldots+\lambda_{s-1} < k)$$

(при $s=n$, полагаем $d_{n+1}=0$ и потому из (6.4) получим эти уравнения при $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=k$, $\mu_{n+1}=0$, $p=0$.

$$F^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\mu_s},\ 1 \leqslant s \leqslant n,\ 1 \leqslant \lambda_s < 2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}),$$

$$0 \leqslant \mu_s \leqslant \min(\lambda_s-1,\ k-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}),$$

$$F^{\lambda_1\ldots\lambda_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n},\ 0 \leqslant \lambda_1+\ldots+\lambda_n < k.$$

Укажем еще для каждого уравнения старшую производную и размерность многообразия, на котором оно рассматривается:

$$\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_s},\ \chi_{\lambda_1\ldots\lambda_s 2(k-\lambda_1\ldots-\lambda_s)},\ M_{n-s},$$

$$F^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\mu_s},\ \chi_{\lambda_1\ldots\lambda_s},\ M_{n-s},$$

$$F^{\lambda_1\ldots\lambda_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n},\ \chi_{\lambda_1\ldots\lambda_n},\ M_0.$$

2. Раньше, чем перейти к дальнейшим преобразованиям системы, необходимо сделать следующие замечания. Уравнения $F^\lambda$ для $\xi_\lambda$ при заданном $\lambda$ рассматриваются как независимые по отношению к системам $F^{\lambda+1}$, $F^{\lambda+2}, \ldots$ в том смысле, что эти последние никогда не используются для преобразования $F^\lambda$; напротив, уравнения $F^\mu$, $\mu = 0, 1, \ldots, \lambda - 1$ используются при преобразовании системы $F^\lambda$; такое использование возможно, в частности, потому что все эти уравнения отнесены к многообразию $M_{n-1}$. При этом, однако, каждая система $F^\mu$ подвергается еще достаточно сложным преобразованиям и сама заменяется эквивалентной системой уравнений, относимых к многообразиям разных размерностей $n - s$. Однако, все эти уравнения, получаемые как следствия системы $F^\mu$, справедливы и на многообразиях высших размерностей в силу системы $F^\mu$ в целом. Такие уравнения можно, попрежнему, использовать для преобразования уравнений $F^\lambda$. Поясним сказанное примером. Пусть имеется система двух уравнений

$$M_n,\ \varphi = 0,\ \ \psi = 0.$$

Заменим второе из них равносильной системой

$$M_n,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^{1^2}} = 0;\ M_{n-1},\ \psi = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial u^1} = 0.$$

Хотя теперь во всей системе и нет уравнения $\psi|_{M_n} = 0$, но если с его помощью преобразовать уравнение $\varphi = 0$, то равносильность системы не нарушится.

Это замечание распространяется на всю совокупность систем $F^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\mu_s}$, $\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$, старшинство среди которых устанавливается по верхней группе индексов, а в случае одинаковых верхних групп индексов — по нижним.

Для преобразования уравнений старших групп допустимо использовать уравнения младших групп, даже если приходится некоторое уравнение( точнее, идентичное ему по форме) относить для этого к многообразию более высокой размерности, чем то, на котором оно рассматривается в соответствующей системе.

3. Выберем из всей совокупности уравнений те, в которые входит в качестве старшей производной $\mathbf{x}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$, $\lambda_s > 0$, независимо от того, на многообразии какой размерности рассматривается данное уравнение.

При $\lambda_s < 2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1})$, эта совокупность уравнений совпадет с

$$F^{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\mu_s},\quad 0\leqslant\mu_s\leqslant\min(\lambda_s-1,\ k-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1})$$

и, при $\lambda_s = 2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1})$, с

$$\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}}.$$

Кроме того, при $\lambda_1+\ldots+\lambda_s = k$, к ней еще присоединяется уравнение $\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$, а при $\lambda_1+\ldots+\lambda_s < k$ — уравнение $F^{\lambda_1\ldots\lambda_s 0\ldots 0}_{\lambda_1\ldots\lambda_s 0\ldots 0}$ (т. е. $\mathbf{x}^2_{\lambda_1\ldots\lambda_s} = \ldots$, $M_{n-s}$ или $M_0$).

Перейдем теперь к последнему этапу преобразования уравнений задачи. Пусть $\varphi = 0$ любое уравнение, отнесенное к $M_{n-s}$ и имеющее своей старшей производной производную $\mathbf{x}$ порядка $2k-m$. Мы заменяем его равносильной системой вида:

$$\varphi_{\lambda_{s+1}\ldots\lambda_r|M_{n-r+1}} = 0$$

$$(0\leqslant\lambda_{s+1},\ldots,\lambda_r;\ \lambda_{s+1}+\ldots+\lambda_r = m;\ s+1\leqslant r\leqslant n),$$

$$\varphi_{\lambda_{s+1}\ldots\lambda_r|M_0} = 0\ (\lambda_{s+1}+\ldots+\lambda_r < m;\ s+1\leqslant r\leqslant n),$$

так, что каждое уравнение, рассматриваемое на многообразии положительной размерности, будет содержать в качестве старшей производной $\mathbf{x}$ производную порядка $2k$; исключение составят уравнения, рассматриваемые в начальной точке $M_0$.

После проведения этой операции над всеми уравнениями системы (кроме уже отнесенных к начальной точке или имеющих порядок $2k$, считая по порядку старшей производной) получится система уравнений, имеющая вид

$$\mathbf{x}_{\lambda_1\ldots\lambda_r}\mathbf{p}+\ldots=\ldots$$
$$(0\leqslant r\leqslant n,\ \lambda_1+\ldots+\lambda_r\leqslant 2k,\ \lambda_r > 0), \tag{6.7}$$

где, для каждых заданных $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$, $\mathbf{p}$ будет пробегать совокупность векторов $\Lambda_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ (подмножество множества $\mathring{L}'_{2k}$)

зависящую от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Будем условно записывать уравнения со старшей производной $x_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ в виде

$$M_{n-r+1},\ x_{\lambda_1\ldots\lambda_r}\Lambda_{\lambda_1\ldots\lambda_r}+\ldots=\ldots(\lambda_1+\ldots+\lambda_r=2k) \quad (6.8)$$

а также, аналогично,

$$M_0, x_{\lambda_1\ldots\lambda_r}\Lambda_{\lambda_1\ldots\lambda_r}+\ldots=\ldots(\lambda_1+\ldots+\lambda_r<2k). \quad (6.9)$$

Нам необходимо установить, из каких векторов состоит каждое из множеств $\Lambda_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$. Очевидно, что $x_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ может получаться при дифференцировании на $M_{n-s}$ производной $x_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ при $0\leqslant s\leqslant r$ (не исключается нуль-кратное дифференцирование) или при дифференцировании на $M_{n-s+1}$ производной $x_{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\mu_s}$, $\mu_s<\lambda_s$. Поэтому уравнения со старшей производной $x_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$, или, как мы будем говорить, уравнения звена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, могли быть получены в процессе повышения порядка уравнений системы, рассмотренном в данном п. 3 из уравнений, содержавших указанные производные $x_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ и $x_{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\mu_s}$ в качестве старших производных. Для точного описания этих уравнений введем следующее обозначение: через $t=t(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ $(0\leqslant t\leqslant n)$ обозначим натуральное число, такое, что $\lambda_1+\ldots$ $\ldots+\lambda_t<k$, но $\lambda_1+\ldots+\lambda_t+\lambda_{t+1}\geqslant k$. При $\lambda_1+\ldots+\lambda_r<k$ полагаем $t=r$ и при $\lambda_1\geqslant k$, $t=0$.

Тогда системы, при повышении порядка которых можно прийти к уравнениям звена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, суть следующие:

$$F^{\lambda_1}_{\mu_1},\ F^{\lambda_1\lambda_2}_{\lambda_1\mu_2},\ \ldots,\ F^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\lambda_1\ldots\mu_t}$$

(при нулевых $\lambda_i$ среди них могут быть пустые) и, при $t<r$,

$$F^{\lambda_1\ldots\lambda_{t+1}}_{\lambda_1\ldots\mu_{t+1}},$$

если $\lambda_{t+1}<2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_t)$ или

$$\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\lambda_1\ldots\lambda_t},$$

если $\lambda_{t+1}\geqslant 2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_t)$.

Кроме того, при $\lambda_1+\ldots+\lambda_r=k$ $(t=r-1)$ появляется среди уравнений звена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ еще уравнение $\widetilde{F}^{\lambda_1\ldots\lambda_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ (т. е. $x^2_{\lambda_1\ldots\lambda_r}=\ldots$) и при $\lambda_1+\ldots+\lambda_r<k$ уравнение $F^{\lambda_1\ldots\lambda_r0\ldots0}_{\lambda_1\ldots\lambda_r0\ldots0}$ $(x^2_{\lambda_1\ldots\lambda_r}=\ldots)$.

Используя известный нам вид систем $\widetilde{F}^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$, $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \mu_s}$, найдем, что $\Lambda_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ состоит из следующих векторов:

$$\delta_1^p x_{\mu_1} \quad (0 \leqslant \mu_1 < \lambda_1;\ 0 \leqslant p \leqslant 2(k-\mu_1)),$$

$$\delta_2^p x_{\lambda_1 \mu_2} \quad (0 \leqslant \mu_2 < \lambda_2;\ 0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\mu_2)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_t^p x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{t-1} \mu_t} \quad (0 \leqslant \mu_t < \lambda_t;\ 0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\ldots-\mu_t)) \tag{6.10}$$

и

$$\delta_{t+1}^p x_{\lambda_1 \ldots \lambda_t \mu_{t+1}} \quad (0 \leqslant \mu_{t+1} < \lambda_{t+1};\ 0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\ldots-\mu_{t+1}))$$

при $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \geqslant k$, а также

$$x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r},$$

если $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \leqslant k$. Короче записать $\Lambda_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ в виде

$$\delta_s^p x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \mu_s} \tag{6.11}$$

$$(1 \leqslant s \leqslant t+1;\ 0 \leqslant \mu_s < \lambda_s;\ 0 \leqslant p \leqslant 2(k-\lambda_1-\ldots-\mu_s),$$
$$t = t(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)),$$

где при $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r < k$ следует полагать $s \leqslant r$ и, при $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \leqslant k$, присоединять $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$.

Мы имеем теперь возможность записать полностью всю систему уравнений (обозначим ее для случая теоремы 4 через $\mathring{H}$). При этом для дальнейшего нам удобно уже перейти к обозначениям в производных (вместо операторов частичного дифференцирования $\delta_s$). С тем, чтобы не выделять отдельно случаев $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \gtreqless k$, можно использовать несколько измененную форму записи:

$$x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \mu_s \nu_{s+1} \ldots \nu_n} + \ldots = \ldots$$
$$(1 \leqslant s \leqslant t;\ 0 \leqslant \mu_s < \lambda_s;\ \Sigma \nu_l \leqslant$$
$$\leqslant 2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}-\mu_s)), \tag{6.12}$$

$$x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} x_{\lambda_1 \ldots \lambda_t \mu_{t+1} \nu_{t+2} \ldots \nu_n} + \ldots = \ldots$$
$$(0 \leqslant \mu_{t+1} \leqslant \lambda_{t+1};\ \Sigma \nu_l \leqslant$$
$$\leqslant 2(k-\lambda_1-\ldots-\lambda_t-\mu_{t+1})); \tag{6.13}$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \succeq (\lambda_1, \ldots, \lambda_t, \mu_{t+1}, \nu_{t+2}, \ldots, \nu_n).$$

Знак следования по старшинству указывает здесь на то, что производная $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ должна быть старшей в уравнении. При

$t=r$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_r<k$, естественно положить $\lambda_{t+1}=0$ и $\mu_{t+1}=0$ и тогда условие

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \succeq (\lambda_1, \ldots, \lambda_t, \mu_{t+1}, \nu_{t+2}, \ldots, \nu_n)$$

повлечет за собой $\nu_l=0$. При $\lambda_1+\ldots+\lambda_r=k$, $t=r-1$, будет допустимо значение $\mu_r=\lambda_r$ и $\Sigma\nu_l=0$.

4. Сделаем несколько замечаний относительно изменений, которые надо внести в преобразования системы в случае теорем 1, 2, 3 (соответствующие системы, аналогичные $\mathring{H}$, мы обозначим через $H'$, $H$, $\mathring{H}'$).

Для получения системы $H$, отвечающей теореме 2, достаточно внести в уравнения единственное изменение: опустить все уравнения, содержащие $\mathbf{x}$ (или $\xi_0$, $\xi_{00}\ldots$) вне знака производной. В остальном, все уравнения сохраняют тот же вид.

В случае системы $\mathring{H}'$, соответствующей доказательству теоремы 3, удобно внести в процесс повышения порядка уравнений (п. 3) некоторые изменения. Именно, для всех уравнений, получаемых из системы $F^0$ (т. е. для уравнений с $\lambda_1=0$), все проделанные преобразования остаются в силе. Что касается систем $F^{\lambda_1}$ $(0<\lambda_1<k)$, то порядки получаемых из них уравнений достаточно доводить только до $2(k-\lambda_1)$, т. е. так, чтобы старшая производная в уравнении принадлежала $\mathring{L}'_{2k}$. Наконец, уравнения $F^{\lambda_1}$ $(\lambda_1>k)$ оставляются вовсе без дальнейших преобразований, т. е. остаются конечными относительно $\xi_{\lambda_1}$. В этом случае получается система уравнений $\mathring{H}'$, которую нет необходимости выписывать заново. Достаточно лишь в записи системы $\mathring{H}$ полагать, что $\mathbf{x}_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ пробегает множество векторов

$$\mathring{L}'_{2k} \bigcup_{k<\lambda_1\leqslant 2k} \mathbf{x}_{\lambda_1}.$$

При этом уравнения с главной производной $\mathbf{x}_{\lambda_1}$ $(k<\lambda_1\leqslant \leqslant 2k)$ рассматриваются на $M_{n-1}$, уравнения звена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ при $\lambda_2+\ldots+\lambda_r=2(k-\lambda_1)$ на $M_{n-r+1}$, уравнения $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ при $\lambda_2+\ldots+\lambda_r<2(k-\lambda_1)$ в точке $M_0$.

Система $H'$ получается из системы $\mathring{H}'$ точно так, как система $H$ из системы $\mathring{H}$, т. е. отбрасыванием уравнений, содержащих $\mathbf{x}$ вне знака производной. Можно также сказать, что для перехода от $\mathring{H}'$, $\mathring{H}$ к $H'$, $H$ соответственно следует исключить $\mathbf{x}$ из числа главных производных и из систем векторов $\Lambda_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$.

## § 7. УСЛОВИЯ НЕИЗГИБАЕМОСТИ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПОЛОСОЙ

Рассмотрим поверхность $\mathbf{x}(u^1, \ldots, u^n)$ в $E_N$ и определяемую ею риманову геометрию рода $k$. Аналогично тому, как закрепление неасимптотической линии делает обычную поверхность пространства $E_3$ жесткой относительно изгибания первого порядка, закрепление подповерхности или полосы поверхности $\mathbf{x}(u^l)$ может при некоторых условиях обеспечить ее жесткость относительно изгибания порядка $k$. Соответствующие условия нетрудно получить из рассмотрения уравнений предыдущего § 6 (рассматриваем вариант системы $H'$).

Начнем с простейшего примера. Пусть закреплена подповерхность $u^1 = u_0^1$ поверхности $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}(u_0^1, u^2, \ldots, u^n) = \xi_0(u^2, \ldots, u^n).$$

Поскольку $\xi_{\lambda_1}$ $(1 \leqslant \lambda_1 < 2k)$ удовлетворяют, в числе прочих, уравнениям $F_0^{\lambda_1}$

$$\xi_{\lambda_1}\delta_1^s\xi_0 + \ldots = \ldots (1 \leqslant s \leqslant 2k),$$

то, при условии, что оболочка множества векторов

$$\delta_1\xi_0, \; \delta_1^2\xi_0, \ldots, \delta_1^{2k}\xi_0$$

совпадает со всем $E_N$, $\xi_{\lambda_1}(u^l)$ определяются однозначно. Тем самым и основное звено системы $\widetilde{F}$ может иметь не более одного решения. Отсюда следует

Теорема 5. Если подповерхность $\xi_0 = \mathbf{x}(u_0^1, u^2, \ldots, u^n)$ такова, что подпространство, натянутое на векторы

$$\delta^s\xi_0 \quad (1 \leqslant s \leqslant 2k)$$

совпадает с $E_N$, то данная поверхность не допускает изгибаний порядка $k$, сохраняющих подповерхность $\xi_0$ жесткой.

Если заметим, что для $\xi_1$ имеется еще уравнение

$$\xi_1^2 = \ldots,$$

то можно немного усилить предыдущий результат:

Теорема 6. Если подповерхность $u^1 = u_0^1$ такова, что подпространство, натянутое на векторы

$$\xi_1, \; \delta^s\xi_0 \quad (1 \leqslant s \leqslant 2k), \tag{7.1}$$

совпадает со всем пространством $E_N$, то поверхность не допускает изгибаний порядка $k$ с закрепленной подповерхностью $\xi_0$.

В случае линейной независимости всех векторов (7.1) это означает неизгибаемость порядка $k$ в пространстве

$$C_{n+2k-1}^{2k}$$

измерений. Условие же независимости указанных векторов следует рассматривать как требование «неасимптотичности» подповерхности $\xi_0$.

Условимся называть полосой $\sigma(n-1, \lambda_1)$ подповерхность $u^1 = u_0^1$ с заданными на ней полями векторов $(\lambda_1 < k)$

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\lambda_1}$$

(полоса размерности $n-1$, порядка $\lambda_1$). Теперь, если множество векторов $\Lambda_{\lambda_1+1}$ имеет оболочку, совпадающую со всем пространством, то задание полосы $\sigma(n-1, \lambda_1)$ обеспечит единственность решения уравнений задачи погружения.

Теорема 7. Поверхность с закрепленной полосой $\sigma(n-1, \lambda_1)$ неизгибаема порядка $k > \lambda_1$, если подпространство, натянутое на векторы

$$\Lambda_{\lambda_1+1}\begin{cases}\delta_1^s\xi_0 \quad (1 \leqslant s \leqslant 2k),\\ \delta_1^{s_\lambda}\xi_\lambda \; (1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1;\; 0 \leqslant s_\lambda \leqslant 2(k-\lambda)),\\ \xi_{\lambda_1+1},\end{cases}$$

совпадает со всем пространством.

В случае если все указанные векторы линейно независимы, это дает для размерности пространства

$$N = \sum_{s=k-\lambda_1}^{k} C_{n+2s-1}^{2s}.$$

В пространстве такой размерности поверхность с закрепленной полосой, неасимптотической в смысле независимости указанных векторов, неизгибаема.

Дальнейшие результаты такого рода могут быть получены и для подповерхностей или полос меньших размерностей. Например, если взять закрепленную $(n-2)$-мерную подповерхность $\xi_{00}$ (которую можно обозначить, как полосу $\sigma(n-2, 0, 0)$), то получим:

Теорема 8. Поверхность с закрепленной подповерхностью $u^1 = u_0^1$, $u^2 = u_0^2$ неизгибаема, если подпространство, натянутое на векторы

$$\Lambda_{01}\colon\ \xi_{01},\ \delta_2^s\xi_{00} \quad (1 \leqslant s \leqslant 2k),$$

совпадает со всем $E_N$.

В случае независимости указанных векторов это дает для размерности пространства

$$N = C_{n+2k-2}^{2k}.$$

## Глава III.

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ПОГРУЖЕНИЯ

## § 8. СВОЙСТВА СИСТЕМЫ $H$

1. При описании свойств системы $H$ в любом из ее вариантов нам потребуется некоторая классификация символов Кристоффеля.

Напомним, что $\overset{\circ}{L}_k$, $L_k$ соответственно обозначают множества производных $\mathbf{x}$ до порядка $k$ включительно, в том числе, соответственно, с $\mathbf{x}$ или без $\mathbf{x}$. Аналогичный смысл имеют обозначения $\overset{\circ}{L}_{2k}$, $L_{2k}$. Для случая теорем 3, 1 эти множества заменяются множествами $\overset{\circ}{L}'_{2k}$, $L'_{2k}$. Матрицы Грама для всех указанных множеств производных $\mathbf{x}$ обозначаются соответственно $\overset{\circ}{\mathfrak{G}}_k$, $\mathfrak{G}_k$, $\overset{\circ}{\mathfrak{G}}_{2k}$, $\mathfrak{G}_{2k}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{G}}'_{2k}$, $\mathfrak{G}'_{2k}$.

Установим для записи матриц Грама $\mathfrak{G}_k$, $\mathfrak{G}_{2k}, \ldots$ следующий строго определенный порядок (слева направо и сверху вниз): сначала располагаются производные первого порядка, в порядке возрастания старшинства в алфавите $u^1$, $u^2, \ldots, u^n$, затем также в порядке возрастания старшинства по алфавиту — производные второго порядка и т. д. до порядка $k$ или $2k$, соответственно.

Введем теперь следующие классы символов Кристоффеля.

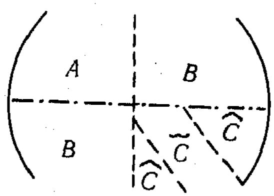
**А.** В класс $A = (L_k, L_k)$ входят скалярные произведения векторов, принадлежащих $L_k$. Из символов класса $A$ состоит матрица $\mathfrak{G}_k$ (для $\overset{\circ}{\mathfrak{G}}_k$ можно рассматривать класс $\overset{\circ}{A}$, но, как правило, мы пользуемся для обоих случаев одним и тем же обозначением).

**В.** К классу $B = (L_{2k} - L_k, L_k)$ принадлежат произведения вида

$$\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s} \mathbf{x}_{j_1 \ldots j_t} \quad (k < s \leqslant 2k,\ 1 \leqslant t \leqslant k).$$

Если сомножитель из $L_{2k} - L_k$ принадлежит $L'_{2k}$, то произведение относится к классу $B'$; также понятны обозначения $\overset{\circ}{B}$, $\overset{\circ}{B}'$.

C. Класс $C=(L_{2k}-L_k,\ L_{2k}-L_k)$ образуется произведениями сомножителей, принадлежащих $L_{2k}-L_k$; для классов $C'$, $C''$ соответственно требуется, чтобы один или оба сомножителя принадлежали $L'_{2k}-L_k$. В свою очередь $C\,(C', C'')$ подразделяется на подкласс $\hat{C}\,(\hat{C}', \hat{C}'')$ произведений, образованных различными сомножителями, и подкласс $\tilde{C}\,(\tilde{C}'')$, образованный квадратами производных. В совокупности произведения $C$, $B$, $A$ заполняют матрицу Грама $\mathfrak{G}_{2k}$. Матрица $\mathfrak{G}'_{2k}$ составляется из произведений классов $C''$, $B'$, $A$. Места, занимаемые в матрице Грама произведениями разных классов, схематически изобразятся таким образом:




D. К классу $D$ отнесены все символы Кристоффеля веса $\leqslant 4k$ в случае, если один из сомножителей не принадлежит $L_{2k}$, т. е. имеет порядок $>2k$ (порядок другого соответственно $<2k$).

В дальнейшем приводится более подробная классификация тех произведений класса $D$, которые могут встретиться в уравнениях системы $H$.

2. Перечислим свойства системы $\mathring{H}$ (и ее вариантов $H$, $H'$, $\mathring{H}'$), на которых основано доказательство теорем погружения.

1) Явно выписанные в уравнениях $\mathring{H}$ слагаемые суть главные, т. е. старшие из всех входящих в левые части уравнений символов Кристоффеля. Записанные на первом месте сомножители — старшие из производных $\mathbf{x}$, входящих в соответствующие уравнения.

2) Множество главных производных в уравнениях систем $\mathring{H}$, $H$, $H'$, $\mathring{H}'$ соответственно совпадает со множествами векторов $\mathring{L}_{2k}$, $L_{2k}$, $L'_{2k}$, $\mathring{L}'_{2k}$ и $\mathbf{x}_{\lambda_1}$ $(k<\lambda_1\leqslant 2k)$ для двух последних случаев.

3) Если уравнение звена $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ получено при повышении порядка из уравнения $F^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\lambda_1\ldots\mu_s}$ (где, следовательно, $s<r$), то главная производная в этом уравнении является в нем старшей, по сравнению с остальными, уже по порядку диф-

ференцирования по аргументу $u^s$. Так как при повышении порядка производились дифференцирования по аргументам $u^{s+1}, \ldots, u^r$, то, среди входящих в уравнение производных от $\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$, нет производных по $u^p$ при $p > r$. Это свойство не соблюдается для уравнений звена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, принадлежащих системе $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\lambda_1 \ldots \mu_r}$, что для дальнейшего несущественно.

В случае уравнения, полученного при дифференцировании уравнения, принадлежащего $\widetilde{F}^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$, старшинство главной производной определяется порядком дифференцирования по $u^{s+1}$

4) Главные слагаемые во всех уравнениях различны.

5) Любой символ Кристоффеля классов $A$ и $B$ ($A$ и $B'$) является главным членом в одном из уравнений системы $H$ ($H'$). Уравнения, главные члены которых принадлежат классам $A$ и $B$, не содержат в левых частях произведений других классов, кроме $A$ и $B$.

Последняя часть этого утверждения следует из однородности уравнений по весу, т. е. по сумме порядков $p+q$ произведений типа $(p, q)$, входящих в уравнение.

Первая часть устанавливается следующим образом. Всякое произведение классов $A$ или $B$ имеет вид

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_r} \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} \mu_p \nu_{p+1} \ldots \nu_n} \tag{8.1}$$

где $\mu_p < \lambda_p$ и $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r) + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{p-1} + \mu_p + \ldots + \nu_n) \leqslant \leqslant 2k+1$ (случай $\mathbf{x}^2_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}}$ можно формально включить сюда, допуская $r = p-1$). Теперь находим

$$\sum_{p+1}^{n} \nu_i \leqslant 2(k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{p-1}) - (\lambda_p + \mu_p) - \lambda_{p+1} - \ldots - \lambda_r \leqslant$$
$$\leqslant 2(k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{p-1} - \mu_p),$$

откуда и следует, что (8.1) является главным слагаемым одного из уравнений. Доказательство для других вариантов аналогично.

6) Ни одно из произведений $C$ не является главным в уравнениях системы. Свойство вытекает из вида уравнений системы.

7) Если $\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ старше, чем $\mathbf{x}_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_{r'}}$, то

$$\Lambda_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \supseteq \Lambda_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_{r'}}.$$

Доказательство вытекает из вида множеств $\Lambda_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$.

8) Уравнения системы, получаемые при повышении порядка из $\widetilde{F}^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$, не содержат слагаемых типа $D$. Действитель-

но, в уравнениях систем $\widetilde{F}^{\lambda_1 \dots \lambda_s}_{\lambda_1 \dots \lambda_s}$ главная производная имеет наивысший порядок и, при повышении ее порядка до $2k$, производных более высокого порядка не появится. Слагаемых типа $D$ нет также в уравнениях $F^{\lambda_1 \dots \lambda_s}_{\lambda_1 \dots \mu_s}$ (рассматриваемых в точке $M_0$).

3. Рассмотрим свойства систем $H$, $\overset{\circ}{H}$, связанные с наличием в уравнениях слагаемых класса $D$. Соответственные свойства для систем $H'$, $\overset{\circ}{H}{}'$ указаны в п. 4.

Каждое слагаемое класса $D$ является скалярным произведением производной $\mathbf{x}$ порядка $> 2k$ на производную $\mathbf{x}$ порядка $< 2k$. Классифицируем их следующим образом. Возьмем совокупность всех главных слагаемых в уравнениях системы. Пусть произведение

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \mathbf{x}_{\mu_1 \dots \mu_s}, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \succeq (\mu_1, \dots, \mu_s)$$

есть любое из них. Представим себе всевозможные производные этого слагаемого по всем аргументам любого порядка (безотносительно к размерности многообразия, на котором рассматривается соответствующее уравнение). Все получаемые при этом главные слагаемые написанных производных, относящиеся к классу $D$, мы включим в подкласс $D_2$; подкласс $D_1$ образован остальными произведениями класса $D$. Иначе говоря, подкласс $D_2$ состоит из тех и только тех произведений класса $D$, которые являются главными слагаемыми от производных произведений классов $A$, $B$, $C$, служащих главными слагаемыми в уравнениях системы. В силу этого, всякое произведение класса $D$, в котором производная высшего порядка является младшей, а низшего — старшей, заведомо принадлежит подклассу $D_1$.

Отсюда также следует

9) Произведение класса $D$

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \dots \lambda_p \lambda_{p+1} \dots \lambda_r} \mathbf{x}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_t}, \tag{8.2}$$

где

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_r > 2k, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_p < 2k,$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{p+1} = 2k + \sigma \geqslant 2k,$$

$$\lambda'_1 + \dots + \lambda'_t < 2k, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \succ (\lambda'_1, \dots, \lambda'_t),$$

принадлежит классу $D_2$ в том и только в том случае, если $\mathbf{x}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_t}$ принадлежит множеству векторов $\Lambda_{\lambda_1 \dots \lambda_p \lambda_{p+1-\sigma}}$.

Действительно, из всех производных, являющихся главными в уравнениях системы и таких, что $\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ можно получить их дифференцированием, самая старшая — $\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \lambda_{p+1-\sigma}}$. Поэтому $\Lambda_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \lambda_{p+1-\sigma}}$ — наиболее широкая совокупность вторых сомножителей (свойство 7) главных членов уравнений системы, при дифференцировании которых можно прийти к произведению (8.2) в качестве главного слагаемого уравнения.

Лемма 8.1. Система $H$ ($\mathring{H}$) может быть эквивалентно преобразована так, что 1) главные члены всех уравнений сохранятся, 2) свойства 1—8 сохранятся, 3) в уравнениях системы не будет слагаемых класса $D_2$.

Для доказательства леммы рассмотрим любое уравнение системы, могущее содержать слагаемые класса $D_2$. В силу свойства 8 это уравнение должно быть получено при повышении порядка одного из уравнений системы вида $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \mu_s}$. Пусть главный член этого уравнения будет

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s \ldots \lambda_r} \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \mu_s \nu_{s+1} \ldots \nu_n}. \tag{8.3}$$

Тогда, если в него входит слагаемое класса $D_2$, то оно должно иметь вид (свойство 3)

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \lambda'_s \ldots \lambda'_{r'}} \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \mu'_s \nu'_{s+1} \ldots \nu'_n} \quad (\lambda'_s < \lambda_s),$$

где

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{s-1} + \lambda'_s + \ldots + \lambda'_{r'} > 2k,$$

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda'_s, \ldots, \lambda'_{r'}) \succ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}, \mu'_s, \nu_{s+1}, \ldots, \nu_n).$$

Полагая

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{s-1} + \lambda'_s + \ldots + \lambda'_{p+1} = 2k + \sigma, \ 0 \leqslant \sigma < \lambda'_{p+1},$$

в силу 9) найдем, что в системе имеется уравнение вида

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \lambda'_s \ldots \lambda'_{p+1-\sigma}} \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \mu'_s \nu'_{s+1} \ldots \nu'_n} + \ldots = \ldots, \tag{8.4}$$

повышением порядка которого можно получить уравнение с главным членом (8.3). При этом уравнение (8.4) принадлежит системе $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} \lambda'_s}$ для $\xi_{\lambda_1 \ldots \lambda'_s}$, причем $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \succ (\lambda_1, \ldots, \lambda'_s)$.

В силу замечания п. 2 § 6 это уравнение можно использовать (относя его быть может к многообразию более высокой размерности) для преобразования данного уравнения. Таким образом можно исключить слагаемое (8.3) класса $D_2$.

Конечно, при этом можно внести новые слагаемые класса $D_2$, но они будут младшими по сравнению с уже исключенным, ввиду чего процесс закончится в конечное число шагов.

Сохранение свойств 1, 2 и 4—8 очевидно. Требует объяснения сохранение свойства 3 в той его части, где утверждается отсутствие в уравнениях, получаемых повышением порядка из $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \mu_s}$ и принадлежащих звену $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ производных от $\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$ по $u^t$, $t > r$. Действительно, так как при исключении слагаемых класса $D_2$ из уравнений, происходящих от уравнений $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$, использовались лишь системы $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_s'}$ при $\lambda_s' < \lambda_s$, то указанные производные не могли быть внесены при выполненных преобразованиях.

**4.** Обратимся к системам $H'$, $\mathring{H}'$. Для этих систем производные из $L_{2k} - L_{2k}'$ не входят в матрицу Грама $\mathfrak{G}_{2k}'$. В силу этого удобно произведения, содержащие множитель из $L_{2k} - L_{2k}'$, отнести к классу $D'$ (такое произведение вместе с тем лежит в классе $B - B'$ или $C - C''$).

10) В уравнения системы $H'$ не входят произведения, оба сомножителя которых принадлежат $L_{2k} - L_{2k}'$. Действительно, если главный член уравнения имеет вид $(\mathbf{x}_{\lambda_1})_{i_1 \ldots i_p} (\mathbf{x}_{\mu_1})_{j_1 \ldots j_q}$, то в силу $2\lambda_1 + p \leqslant 2k$, $2\mu_1 + q \leqslant 2k$ имеем $2(\lambda_1 + \mu_1) + p + q \leqslant 4k$ и в силу весовой однородности для любого слагаемого $(\mathbf{x}_{\lambda_1'})_{i_1' \ldots i_{p'}'} (\mathbf{x}_{\mu_1'})_{j_1' \ldots j_{q'}'}$, входящего в уравнение, также $2(\lambda_1' + \mu_1') + p' + q' \leqslant 4k$, откуда ясно, что неравенства $2\lambda_1' + p' > 2k$, $2\mu_1' + q' > 2k$, характеризующие множество $L_{2k} - L_{2k}'$, не могут удовлетворяться одновременно. Деление класса $D'$ на подклассы $D_1'$ и $D_2'$ проводится аналогично делению класса $D$ на $D_1$ и $D_2$.

11) В уравнениях $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, получаемых при повышении порядка из $\widetilde{F}^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$, слагаемые класса $D'$ не входят.

12) Если слагаемое класса $D'$, входящее в некоторое уравнение системы $H'$, одновременно принадлежит классу $B - B'$, то оно входит в подкласс $D_2'$ класса $D'$. Действительно, если такое слагаемое имеет вид:

$$(\mathbf{x}_{\lambda_1})_{i_1 \ldots i_{2k - 2\lambda_1 + p}} (\mathbf{x}_{\lambda_1'})_{j_1 \ldots j_q} \qquad (p > 0),$$

то из его принадлежности классу $B$ следует

$$2k - \lambda_1 + p + \lambda_1' + q \leqslant 2k + 1$$

и либо $\lambda_1' < \lambda_1$, либо $\lambda_1' = \lambda_1$, $p = 1$, $q = 0$. В любом из двух случаев в звене системы с главной производной $(\mathbf{x}_{\lambda_1})_{i_1 \ldots i_{2k-2\lambda_1}}$ имеется уравнение со старшим членом вида $(\mathbf{x}_{\lambda_1})_{i_1 \ldots i_{2k-2\lambda_1}} \times \times (\mathbf{x}_{\lambda_1'})_{j_1 \ldots j_q}$, ч. и т. д.

Заметим, что все особенности систем $H'$, $\mathring{H}'$ по сравнению с системами $H$, $\mathring{H}$ относятся исключительно к звеньям $\{\lambda_1 \ldots \lambda_r\}$, где $0 < \lambda_1$.

Аналогично лемме 8.1 доказывается

Лемма 8.2. Система $H'$ ($\mathring{H}'$) может быть эквивалентно преобразована так, что 1) главные члены всех уравнений сохранятся, 2) в уравнениях не будет слагаемых классов $D_2$ и $D_2'$, 3) свойства 1—12 сохранят силу.

Далее мы под системами $H, \mathring{H}, H', \mathring{H}'$ уже понимаем системы, преобразованные по леммам 8.1, 8.2.

## § 9. ВЫБОР ВЕКТОРОВ $L_{2k}$ ($\mathring{L}_{2k}$, $L_{2k}'$, $\mathring{L}_{2k}'$) В ТОЧКЕ $M_0$

Лемма 9.1. При произвольно заданных числовых значениях всех произведений класса $D_1$, входящих в уравнения системы $H$ ($\mathring{H}$), всегда можно указать такие значения произведений классов $A$, $B$, $C$ в точке $M_0$, чтобы все уравнения системы удовлетворялись ими в точке $M_0$, а матрица Грама $\mathfrak{G}_{2k}$ ($\mathring{\mathfrak{G}}_{2k}$), ими образованная, была положительно определенной.

Лемма 9.2. При произвольно заданных значениях всех произведений классов $D_1$ и $D_1'$, входящих в уравнения системы $H'$ ($\mathring{H}'$), всегда можно указать такие значения произведений классов $A$, $B'$, $C''$ в точке $M_0$, чтобы все уравнения системы (за исключением звеньев $F^{\lambda_1}$, $\lambda_1 > k$) удовлетворялись в точке $M_0$, а матрица Грама $\mathfrak{G}_{2k}'$ ($\mathring{\mathfrak{G}}_{2k}'$) была положительно определенной.

Доказательство обеих лемм проводим параллельно.

В силу свойств 4, 5, 12 (последнее обеспечивает отсутствие в уравнениях $H'$ слагаемых из $B - B'$), все произведения классов $A$, $B$ (соответственно $A$, $B'$) определяются в точке $M_0$ системой $H$ ($H'$).

Условия положительной определенности системы форм $\widetilde{\Omega}_s$ понимаются нами, как условия положительной определенности матрицы $\mathfrak{G}_k$ ($\mathring{\mathfrak{G}}_k$), образованной произведениями класса

$A$. Знание положительно определенной матрицы $\mathfrak{G}_k$ ($\mathring{\mathfrak{G}}_k$) равносильно заданию в начальной точке (с точностью до движения) векторов $L_k$ ($\mathring{L}_k$). Фиксируем, как-либо, положение этих векторов в точке $M_0$:

$$\mathrm{x}_{i_1 \ldots i_s}|_{M_0} = \mathrm{a}_{i_1 \ldots i_s} \ (1 \leqslant s \leqslant k \text{ или } 0 \leqslant s \leqslant k). \tag{9.1}$$

В дальнейшем мы ищем решения системы, удовлетворяющие, в частности, условиям (9.1).

В уравнения нашей системы могут входить некоторые произведения класса $D_1$. Придадим им в точке $M_0$ произвольные начальные значения

$$\mathrm{x}_{i_1 \ldots i_{2k+s}} \mathrm{x}_{j_1 \ldots j_t}|_{M_0} = g_{i_1 \ldots i_{2k+s};\ j_1 \ldots j_t}\,. \tag{9.2}$$

Эти уравнения (отнесенные к точке $M_0$) мы также включим в систему. В случае леммы 9.2 следует также задать произведения класса $D_1'$, входящие в уравнения системы (кроме уравнений для $\xi_{\lambda_1}$ ($\lambda_1 > k$), которые в этом случае сейчас никак не затрагиваются).

Теперь, при рассмотрении системы в точке $M_0$ все произведения классов $A$, $B$, $D_1$ уже заданы, уравнения же налагают некоторые линейные алгебраические соотношения на произведения класса $C$ ($C''$ соответственно).

Главные члены уравнений системы относятся к классам $A$, $B$, $C'$ ($A$, $B'$, $C''$). Задаем еще произвольно значения всех тех произведений класса $\hat{C}$ ($\hat{C}''$), которые не являются главными в уравнениях системы. Возможно, что при этом определятся в точке $M_0$ некоторые из главных произведений класса $\hat{C}$ ($\hat{C}''$). Ясно, однако, что при этом еще алгебраически не определяются ни произведения класса $\tilde{C}$ ($\tilde{C}''$), ни те из произведений $\hat{C}$ ($\hat{C}''$), которые являются главными в уравнениях, содержащих слагаемые классов $\tilde{C}$ ($\tilde{C}''$) (прямо или косвенно, через слагаемые класса $\hat{C}$ ($\hat{C}''$), главные в другом уравнении).

Теперь мы покажем, как выбрать недостающие еще значения элементов матрицы $\mathfrak{G}_{2k}$ ($\mathring{\mathfrak{G}}_{2k}$, $\mathfrak{G}_{2k}'$, $\mathring{\mathfrak{G}}_{2k}'$) так, чтобы удовлетворить алгебраически в $M_0$ всем уравнениям системы и соблюсти условие положительной определенности матрицы.

Внесем в матрицу все, уже заданные до настоящего времени, значения ее элементов (соблюдая порядок расположения элементов, указанный в п. 1 § 8). Окажутся заполненными все места элементов классов $A$ и $B$ и значительное число мест элементов $C$. Останутся свободными все диагональные места за пределами (положительно определенной) подматрицы

$\mathfrak{G}_k$ ($\mathring{\mathfrak{G}}_k$) и часть других мест $C$. Первое свободное диагональное место должно быть занято выражением $\left(\frac{\partial^k \mathbf{x}}{\partial u^{n^k}}\right)^2$ (считаем сверху вниз и слева направо). При первом окаймлении $\mathfrak{G}_k$ все элементы присоединяемых столбца и строки уже известны (элементы класса $B$), кроме указанного диагонального элемента. Выбираем его так, чтобы обеспечить положительную определенность матрицы (что возможно в силу положительной определенности $\mathfrak{G}_k$). Переходим затем к следующему диагональному элементу $\left(\frac{\partial^k \mathbf{x}}{\partial u^{n^{k-1}} \partial u^{n-1}}\right)^2$ и т. д. При этом, на каждом шаге подставляем задаваемое значение элемента класса $\widetilde{C}$ ($\widetilde{C}''$) в уравнения системы (если он в них входит) и находим те элементы $\hat{C}$ ($\hat{C}''$), которые при этом алгебраически определяются, внося их в $\mathfrak{G}_{2k}$. Остается убедиться только в том, что на каждом шаге все места, идущие вверх-влево от вписываемого диагонального элемента, бывают уже заполнены.

Это сразу видно из того, что на каждом шаге остаются еще не вписанными в матрицу лишь элементы, зависящие от данного диагонального элемента или следующих за ним. Но по соображениям однородности ясно, что произведение класса $\widetilde{C}\left(\widetilde{C}''\right)$, стоящее на диагонали и имеющее вид $(\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s})^2$, может входить лишь в такие уравнения системы, которые содержат в качестве главного слагаемого произведение с тем же суммарным набором индексов, что и $(\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s})^2$. Тогда либо один из его сомножителей имеет порядок выше, либо если оба сомножителя порядка $s$, то один из них старше, чем $\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s}$. В силу правила расположения элементов $\mathfrak{G}_{2k}$, в обоих случаях такое произведение лежит вне пределов главного диагонального минора с правым нижним угловым элементом $(\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_s})^2$, ч. и т. д.

Заполнив, таким образом, матрицу $\mathfrak{G}_{2k}\left(\mathring{\mathfrak{G}}_{2k}, \mathfrak{G}'_{2k}, \mathring{\mathfrak{G}}'_{2k}\right)$ непротиворечиво по отношению к системе $H$ ($\mathring{H}$, $H'$, $\mathring{H}'$), рассматриваемой алгебраически в точке $M_0$, выберем значения всех векторов $L_{2k}\left(\mathring{L}_{2k}, L'_{2k}, \mathring{L}'_{2k}\right)$ в точке $M_0$ (в согласии с уже выбранными ранее векторами $L_k\left(\mathring{L}_k\right)$):

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s | M_0} = \mathbf{a}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s} \quad (0 \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_s \leqslant 2k)$$

или (9.3)

$$\mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s | M_0} = \mathbf{a}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s} \quad (0 \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_s \leqslant 2(k - \lambda_1)).$$

Эти уравнения, в сочетании с уравнениями, задающими в начальной точке произведения $D_1$ ($D_1$ и $D'_1$), входящие в уравнения системы, имеют своим следствием в точке $M_0$ все уравнения системы. В частности, те из уравнений системы, которые вообще рассматриваются в точке $M_0$, теперь становятся лишними и могут быть отброшены.

## § 10. ДОПОЛНЕНИЕ СИСТЕМЫ $H$

Дополним систему $H$ новыми уравнениями так, чтобы она получала при начальных условиях (9.3) единственн ое решение. Звено $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ состоит из уравнений вида

$$M_{n-s+1},\quad \begin{array}{l} \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}\mathbf{x}_{\mu'_1 \ldots \mu'_t} + \ldots = \ldots,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 2k \quad (H, \mathring{H}) \\ \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}\mathbf{x}_{\mu'_1 \ldots \mu'_t} + \ldots = \ldots,\ \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = 2(k - \lambda_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (H', \mathring{H}'), \end{array}$$

где $\mathbf{x}_{\mu'_1 \ldots \mu'_t}$ принадлежит $\Lambda_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$ и пробегает часть совокупности векторов $L'_{2k}$ $(\mathring{L}'_{2k})$. Будем обозначать через $\mathbf{x}_{\mu'_1 \ldots \mu'_t}$ вторые сомножители главных членов уравнений звена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, а через $\mathbf{x}_{\mu''_1 \ldots \mu''_t}$ дополнительное множество векторов из $L_{2k}$ $(\mathring{L}_{2k}, L'_{2k}, \mathring{L}'_{2k})$. Введем новые уравнения

$$M_{n-s+1},\quad \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}\mathbf{a}_{\mu''_1 \ldots \mu''_t} = f_{\lambda_1 \ldots \lambda_s;\, \mu''_1 \ldots \mu''_t}, \tag{10.1}$$

так что все звено теперь будет

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}\mathbf{x}_{\mu'_1 \ldots \mu'_t} + \ldots = \ldots, \\ M_{n-s+1},\quad \mathbf{x}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}\mathbf{a}_{\mu''_1 \ldots \mu''_t} = f_{\lambda_1 \ldots \lambda_s;\, \mu''_1 \ldots \mu''_t}, \end{array} \tag{10.2}$$

где $f_{\lambda_1 \ldots \lambda_s;\, \mu''_1 \ldots \mu''_t}$ — функции, аналитические на $M_{n-s+1}$, подчиненные условиям

$$\left. \frac{\partial^{\lambda'_s + \lambda_{s+1} + \ldots + \lambda_r} f_{\lambda_1 \ldots \lambda_s;\, \mu''_1 \ldots \mu''_t}}{\partial u^{s\lambda'_s}\, \partial u^{s+1\,\lambda_{s+1}} \ldots \partial u^{r\lambda_r}} \right|_{M_0} = g_{\lambda_1 \ldots \lambda_s + \lambda'_s \ldots \lambda_r;\, \mu''_1 \ldots \mu''_t}$$

для всех тех сочетаний индексов, для которых правые части последних уравнений были заданы (9.2). В остальном, эти функции произвольны. Теперь условия, определявшие произведения класса $D_1$ ($D_1$ и $D_1'$) становятся следствиями вновь написанных уравнений и могут быть отброшены.

Окончательно, вся система теперь состоит из звеньев вида (10.2) и начальных условий (9.3).

В следующем § показывается однозначная разрешимость системы. Здесь отметим, что произвол решения при этом определяется числом введенных функций $f$ максимального числа аргументов.

В случае систем $H$ и $\mathring{H}$, эти функции входят в уравнения, дополняющие главное звено системы:

$$d_1^{2k} \mathbf{x}\, \mathbf{a}_{\mu_1'' \ldots \mu_t''} = \ldots,$$

и число их равно разности между числом векторов, принадлежащих множеству $L_{2k}$ и $L_{2k}'$, соответственно, т. е. равно

$$T(n, k) = N(n, k) - N'(n, k),$$

как это и указывается в формулировке теорем 2, 4.

В случае теорем 1, 3 мы имеем системы $H'$ и $\mathring{H}'$, при дополнении которых функций $n$ аргументов не вводится. Появляются лишь функции $(n-1)$ (или меньшего числа) аргументов. Они появляются в уравнениях, дополняющих звенья с главной производной $\mathbf{x}_{\lambda_1}$, $\lambda_1 < k$, и число их равно, для каждого звена $\{\lambda_1\}$,

$$\dim\{L_{2k}'\} - \dim\{\Lambda_{\lambda_1 2(k-\lambda_1)}\},$$

а всего

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=k-1} \left\{\dim\{L_{2n}'\} - \dim\{\Lambda_{\lambda_1 2(k-\lambda_1)}\}\right\}.$$

Полагая

$$\mathring{N}'(n, k) = N'(n, k) + 1 = 1 + \sum_{s=1}^{k} C_{n+2s-1}^{2s},$$

найдем

$$\dim\{\Lambda_{\lambda_1 2(k-\lambda_1)}\} = \mathring{N}(n-1, k) + \mathring{N}(n-1, k-1) + \ldots$$
$$\ldots + \mathring{N}(n-1, k-\lambda_1+1) + \mathring{N}'(n-1, k-\lambda_1),$$

откуда

$$\dim\{L_{2k}'\} - \dim\{\Lambda_{\lambda_1 2(k-\lambda_1)}\} = \mathring{N}'(n, k) - \mathring{N}(n-1, k) - \ldots$$
$$\ldots - \mathring{N}(n-1, k-\lambda_1+1) - \mathring{N}'(n-1, k-\lambda_1),$$

и после простых преобразований

$$\dim\{L'_{2k}\} - \dim\{\Lambda_{\lambda_1 2(k-\lambda_1)}\} = \sum_{s=1}^{k-\lambda_1} C_{n+2s-2}^{2s-1},$$

т. е. всего функций $(n-1)$ аргументов будет

$$\sum_{\lambda_1=0}^{k-1}\sum_{s=1}^{k-\lambda_1} C_{n+2s-2}^{2s-1} = \sum_{s=1}^{k}(k-s+1)\,C_{n+2s-2}^{2s-1},$$

что и соответствует формулировке теорем 1, 3 и подтверждает ориентировочный подсчет, проведенный в § 5.

## § 11. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ДОПОЛНЕННОЙ СИСТЕМЫ

Доказательство последовательной разрешимости всех звеньев системы будем вести индукцией от младших звеньев к старшим. Низшее звено системы $\{0, 0, \ldots, 2k\}$ имеет вид пишем применительно к системе $\overset{\circ}{H}$):

$$M_1\begin{cases} \mathbf{x}_{0\ldots0\,2k}\mathbf{x}_{0\ldots00} + \ldots = \ldots \\ \mathbf{x}_{0\ldots0\,2k}\mathbf{x}_{0\ldots01} + \ldots = \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{x}_{0\ldots0\,2k}\mathbf{x}_{0\ldots0k} + \ldots = \ldots \\ \mathbf{x}_{0\ldots0\,2k}\mathbf{a}_{\mu''_1\ldots\mu''_t} = \ldots . \end{cases}$$

Множество индексов $\{\mu''_1\ldots\mu''_t\}$ таково, что производные $\mathbf{x}_{\mu''_1\ldots\mu''_t}$ дополняют систему производных $\mathbf{x}_{0\ldots0s}$ $(s\leqslant k)$ до $L_{2k}$, в случае теорем 2, 4, и до $L'_{2k}$, в случае теорем 1, 3. Во всех вариантах система однозначно разрешима относительно. $\mathbf{x}_{|M_1}$ при введенных начальных условиях $\left.\dfrac{\partial^s\mathbf{x}}{\partial u^{n^s}}\right|_{M_0} = \mathbf{a}_{0\ldots0s}$ $(s\leqslant 2k)$, обращающих в начальной точке все уравнения в тождества и обеспечивающих их алгебраическую разрешимость относительно $\dfrac{\partial^{2k}\mathbf{x}}{\partial u^{n^{2k}}}$ (в пространстве, размерность которого определена числом векторов в $L_{2k}$, $\overset{\circ}{L}_{2k}$, $L'_{2k}$, $\overset{\circ}{L}{}'_{2k}$, соответственно)

Рассмотрим теперь произвольное звено $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ и докажем однозначную разрешимость его при условии, что все предшествующие звенья уже разрешены в согласии с начальными условиями (9.3). Выясним, какие производные $\mathbf{x}$ входят в левые части уравнений звена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ со старшей производной $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$. Так как все они суть младшие по отношению к $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$, то их можно отнести к следующим группам.

1. $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_s \mu_{s+1} \nu_{s+2} \ldots \nu_n}$ $(s+1 < r;\ \mu_{s+1} < \lambda_{s+1})$. Эти производные следует уже рассматривать как известные функции. В самом деле, при решении уравнений звена

$$M_{n-s+1},\ \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_{s+1}, \lambda'_{s+2}\} \quad \begin{array}{c} \lambda'_{s+2} = 2k - \lambda_1 - \ldots - \mu_{s+1} \\ \text{или} \\ \lambda'_{s+2} = 2(k - \lambda_1) - \lambda_2 - \ldots - \mu_{s+1}, \end{array}$$

мы уже нашли $\left(x_{\lambda_1 \ldots \lambda_s \mu_{s+1}}\right)_{|M_{n-s+1}}$, которое позволяет вычислить

$$\left(x_{\lambda_1 \ldots \lambda_s \mu_{s+1} \nu_{s+2} \ldots \nu_n}\right)_{|M_{n-r+1}}.$$

2. $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1} \mu_r}$ $(\mu_r < \lambda_r)$. Эти производные являются производными по $u^r$ от неизвестной функции $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$ порядка меньшего, чем порядок главной производной. Их значения на многообразии $M_{n-r}$, входящие в начальное определение данной системы, уже известны, так как по предположению индукции они найдены в процессе решения уравнений звена $\{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1} \mu_r \lambda'_{r+1}\}$, где

$$\lambda'_{r+1} = 2k - \lambda_1 - \ldots - \mu_r \text{ или } \lambda'_{r+1} = 2(k - \lambda_1) - \lambda_2 - \ldots - \mu_r$$

или просто заданы в точке $M_0$ в случае $r = n$.

3. $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1} \mu_r \nu_{r+1} \ldots \nu_n}$. Такие производные могут входить лишь в уравнения, получаемые из систем $\widetilde{F}^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$ (свойство 3, п. 2, § 8), и в силу свойств 8,11 не могут быть производными порядка выше $2k$ или $2(k - \lambda_1)$, соответственно. Таким образом, по отношению к неизвестной функции $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$ они имеют порядок, не превосходящий порядка главной ее производной.

Отсюда видно, что очередное звено системы при решении его уравнений относительно главной производной (алгебраически выполнимом в окрестности начальной точки и дающем в этой точке для $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ требуемое значение $a_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$) превращается в систему Коши—Ковалевской с начальным определением, обеспечивающим ее однозначную разрешимость.

Таким образом, однозначная разрешимость дополненной системы уравнений устанавливается для каждого из четырех случаев $H, H', \overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{H}'$ в пространствах, соответственно размерности, указанной соответствующими формулировками теорем. Подсчет произвола был произведен ранее (§ 5 и § 10).

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Рыжков В. В., О метрическом изгибании различных порядков. Успехи матем. наук, 1950, 5, вып. 4, 134—135
2. —, Теорема вложения для римановых геометрий высших порядков. Докл. АН СССР, 1950, 75, № 4, 503—505
3. Bompiani E., Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale. Rend. Accad. Lincei, 1915, 5, № 24, 126—131
4. —, Basi analitiche per una teoria della deformazioni delle superficie di specie superiore. Rend. Accad. Lincei, 1916, 5, № 25, 627—634
5. —, Geometrie riemanniane di specie superiore. Mem. Accad. Ital., 1935, 6, № 8, 269—520
6. —, Géométrie riemanniennes d'espèce superieure. Colloq. de géom. diff. Louvain, 1951, 125—156
7. —, Deformazioni di superficie di uno spazio euclideo con linee e striscie rigide. Matematiche, 1954, 9, 154—175
8. Bortolotti E., Nuova esposizioni su basi geometriche del calcolo assoluto del Vitali e applicazione alle geométrie riemaniane di specie superiore. Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1931; I, 1—48; II, 169—212
9. —, La méthode de Vitali dans la recherche géométrique: représantation fonctionelle et calcul absolu généralisé. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1937, 4, 269—288
10. Burstin C., Mayer W., Das Formenproblem der $L$-dimensionalen Hyperflächen in $n$-dimensionalen Räume konstanter Krümmung. Monatshefte f. Math. und Phys., 1926, 34, 89—136
11. Cartan E., Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. Ann. Soc. Polon. Math., 1927, 6, 1—7
12. Janet M., Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. Ann. Soc. Polon. Math., 1926, 5, 38—43
13. Mayer W., Über das vollständige Formensystem der $F_l$ in $R_n$. Monatshefte f. Math. und Phys., 1928, 35, 87—110
14. Nash J., $C^1$-isometric imbeddings. Ann. Math., 1954, 60, № 3, 383—396
15. —, The imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. Math., 1956, 63, № 1, 20—63
16. Schläfli L., Nota alla memoria del sig. Beltrami. Ann. Math., 1871—73, 2, № 5, 170—193
17. Vitali G., Geometria nello spazio hilbertiano. Bologna, 1929