Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Э. М. Кудлаев, Б. В. Гнеденко, О случайных величинах, обусловленных суммами независимых случайных величин,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1995, номер 5, 23–31

https://www.mathnet.ru/vmumm2163

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 19:29:10

Эти оценки согласуются с полученными в настоящей работе оценками log Approx для дискретных аналогов классов аналитических функций.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 93-01-01527.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций//Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1963. 230—250.
2. Офман Ю. О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах// //Докл. АН СССР. 1963. **152**, № 4. 823—826.
3. Офман Ю. Об алгоритмической сложности дискретных функций//Докл. АН СССР. 1962. **145**, № 1. 48—51.
4. Тогер А. В. О сложности некоторых функциональных классов//Докл. АН СССР. 1971. **199**, № 4. 789—791.
5. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций// //Успехи матем. наук. 1984. **39**, № 3. 157—169.
6. Аманжаев Г. Г. Дискретный аналог гладких функций//Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М., 1991. 4—24.
7. Аманжаев Г. Г. Дискретные функции с заданным модулем непрерывности// //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 5. 86—89.
8. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах//Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 2(86). 3—86.

Поступила в редакцию
16.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 5

УДК 519.2

Б. В. Гнеденко, Э. М. Кудлаев

О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Предлагаемая работа посвящена изучению сумм зависимых случайных величин вида

$$\zeta(N,\ n)=\sum_{k=1}^{N} f_k(w_k,\ \ldots,\ w_{k+l}), \tag{1}$$

где случайные величины $w_k \equiv w_k(N, n)$, $k=1, \ldots, N$, с $W(N, n)=(w_1, \ldots, w_N)$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega_1,\ S_1,\ P_1)$ и суммирование по индексу k производится по модулю N (mod N); при этом предполагается существование некоторого $a \equiv a(N, n)$ и независимых случайных величин $\theta_1 \equiv \theta_1(N, n), \ldots, \theta_N(N, n)$ с $\theta(N, n)=(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega_2,\ S_2,\ P_2)$ и таких, что их совместное условное распределение при условии

$$\eta(N,\ n) \equiv \sum_{k=1}^{N} \theta_k = a \tag{2}$$

совпадает с совместным распределением случайных величин $w_1, \ldots, w_N$. Предполагается также, что значения каждой из функций f_k принадле-

жат некоторому пространству G_1, а каждая из случайных величин w_k (и θ_k) принимает значения в пространстве G_2, отличном, вообще говоря, от G_1.

Входящие в сумму (1) величины $w_1, \ldots, w_N$ таковы, что для любых целочисленных значений k и $d>0$, удовлетворяющих неравенствам

$$0<k<N+1, \quad 1<k+d<N+1,$$

зависимость между w_k и w_{k+d}, вообще говоря, не ослабевает с ростом d; в частности, она постоянна для перестановочных величин $w_1, \ldots, w_N$ (в этом случае распределения всех θ_k совпадают). Такие последовательности случайных величин принципиально отличаются от последовательностей, в которых зависимость между k-м и $(k+d)$-м членами исчезает начиная с некоторого значения $d=d_0$ (например, для последовательности независимых случайных величин $d_0=0$, а для последовательности m-зависимых случайных величин $d_0=m+1$), либо для достаточно больших значений d может быть сделана сколь угодно малой (как, например, для «слабо зависимых» случайных величин с подходящим значением коэффициента перемешивания).

Величины (1) в отечественной литературе называются разделимыми статистиками и широко применяются как в математике (например, комбинаторике, теории графов и случайных отображений конечных множеств), так и в других областях знаний (ядерной физике, статистической механике, биологии и зоологии, медицине, социологии, вычислительной технике). Наиболее широко они используются в математической статистике при выборочном обследовании конечных совокупностей и для построения критериев согласия и критериев однородности. Разделимые статистики автоматически возникают в теории достаточных статистик и асимптотически подобных критериях.

Отдельные результаты, относящиеся к суммам (1), появились много лет назад. В последние три десятка лет интерес к изучению величин (1) значительно усилился, что нашло свое отражение в резко возросшем количестве публикаций по этой тематике как у нас в стране, так и за рубежом (см. монографии [1, 2] и обзоры [3, 4]). Для исследования поведения, в том числе асимптотического при возрастании N или n, величин (1) используются разнообразные подходы и методы в зависимости от выбора распределений величин $\theta_1, \ldots, \theta_N$ и «точки» a (т. е. для различных схем разделимых статистик). Часто специалисты, пытаясь получить какой-либо результат, связанный с разделимыми статистиками в некоторой схеме, не ищут его аналогов в других схемах. Однако различные схемы разделимых статистик имеют много общих свойств, так что «прорыв» в одном месте может позволить продвинуться и в другом.

Нашей целью является выделение общих свойств величин (1) на основе их связи как с независимыми случайными величинами, так и с условными распределениями. Для этого нам потребуется решить ряд задач, которые мы проиллюстрируем на нескольких примерах.

Пример 1. Имеется полиномиальная схема с N исходами и n испытаниями, в которой вероятность появления исхода с номером «k» равна p_k $(0<p_k<1)$, $k=1, \ldots, N$, для каждого испытания. Рассмотрим случайную величину

$$\zeta(N, n)=\sum_{k=1}^{N} f_k(w_k), \tag{3}$$

где $w_k \equiv w_k(N, n)$ — число появлений исхода с номером «k», а f_k, $k=1, \ldots, N$, — произвольные действительные функции. В этом случае $a=n$ и величина θ_k имеет пуассоновское распределение с параметром np_k, $k=1, \ldots, N$ (этот факт был известен еще Р. Фишеру). Величины вида (3) часто употребляются в задачах теории вероятностей и ее применениях. В частности, сумма

$$\zeta(N, n) = \sum_{k=1}^{N} (w_k - np_k)^2/(np_k) \tag{4}$$

хорошо известна как статистика хи-квадрат критерия согласия, а величина

$$\zeta(N, n) \equiv \mu_r(N, n) = \sum_{k=1}^{N} I^{(r)}(w_k), \tag{5}$$

где $I^{(r)}(x)=1$ при $x=r$ и $I^{(r)}(x)=0$ при $x \neq r$, называется «числом ящиков, содержащих r дробинок». В случае $p_1 = \ldots = p_N$ она часто используется в комбинаторике и называется «числом ячеек, содержащих r различимых частиц» при размещении n различимых частиц по N различимым ячейкам.

При изучении асимптотического поведения величин (4), (5) наиболее интересен (с точки зрения приложений) случай, когда параметры N и n одновременно возрастают. Представив (см., например, [3] и [1] соответственно) в виде контурных интегралов характеристическую и производящую функции величин (4) и (5) соответственно и применив метод перевала, мы получим предельные распределения указанных разделимых статистик. Другой способ отыскания слабых пределов распределений статистик в обобщенной схеме размещения (содержащей и полиномиальную схему) предложен В. Ф. Колчиным [1, 2] и заключается в использовании локальных предельных теорем теории вероятностей. Получаемые двумя этими методами предельные теоремы образуют достаточно широкий спектр (например, среди предельных распределений содержатся распределения с вырожденными в одной или нескольких точках компонентами), однако не исчерпывают всех слабых пределов. Прежде всего это связано с «многопараметричностью» нашей задачи. Даже в случае симметрической полиномиальной схемы ($p_1 = \ldots = p_N$) имеются два параметра N и n, а поэтому применение метода перевала требует «тонкого» исследования (см. работу [5] Б. А. Севастьянова). Стэк [6] привел условия общего характера, при выполнении которых из слабой сходимости ($n \to \infty$) распределения пары случайных величин (X_n, Y_n) к пределу (X, Y) следует сходимость условной характеристической функции $\varphi_{X_n|Y_n}$ к условной характеристической функции $\varphi_{X|Y}$. При этом он воспользовался известным представлением для условной характеристической функции $\varphi_{X_n|Y_n}$ через интеграл по всему пространству от совместной характеристической функции φ_{X_n, Y_n} по второму аргументу (в случае «решетчатости» вектора (X_n, Y_n) указанное представление получается обращением ряда Фурье, а в случае абсолютной непрерывности этого вектора — обращением интеграла Фурье). Стэк применил свой результат, в котором при подходящих центрировании и нормировках роли X_n и Y_n играли

$$\xi(N, n) = \sum_{k=1}^{N} (\theta_k - np_k)^2/(np_k)$$

и $\eta(N, n)$ (см. (2)) соответственно, к доказательству асимптотической нормальности статистики хи-квадрат для ряда предельных ситуаций, зависящих от поведения N, n и вероятностей $p_1, \ldots, p_N$. В дальнейшем такой способ употреблялся многими авторами (в основном для доказательства асимптотической нормальности); его преимущество заключается в использовании результатов [7] классической теории суммирования независимых случайных величин. В частности, при выполнении условия «равномерной асимптотической малости» предельное распределение (X_n, Y_n) будет безгранично делимым, а его характеристическая функция будет иметь каноническое представление (многомерные аналоги представлений Леви—Хинчина и Колмогорова в случаях неограниченных и ограниченных вторых моментов соответственно) — см. [8—10]. Суммируя сказанное, можно поставить следующую задачу: описать класс ситуаций, в которых из слабой сходимости распределения вектора $(\xi_0(N, n), \eta_0(N, n))$ к вектору (ξ, η) следует сходимость распределения $\zeta(N, n)$ к условному распределению величины ξ при условии

$$\eta = a_0 \equiv \lim a_0(N, n), \quad a_0 = (n - d(N, n))/e(N, n), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \xi_0(N, n) &= (\xi(N, n) - b(N, n))/c(N, n), \\ \eta_0(N, n) &= (\eta(N, n) - d(N, n))/e(N, n), \end{aligned} \tag{7}$$

а последовательности констант, входящих в формулы (6) и (7), обеспечивают существование слабого предела распределения вектора $(\xi_0(N, n), \eta_0(N, n))$. В связи с формулами (6), (7) возникает следующий вопрос: если «точка» a_0 не является атомом распределения величины η, то какую версию условного распределения $P_{\xi|\eta}$ следует выбирать?

При изучении асимптотических свойств статистических критериев (мощности, оптимальности и т. д.) наиболее интересным представляется случай, когда имеет место «сближение» альтернативы с гипотезой. Предположим, что в ситуации рассматриваемого примера при N, $n \to \infty$ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} &p_k = p_k^0(N, n)(1 + b_k(N, n)/c_{N,n}), \quad k = 1, \ldots, N; \\ &\sum_{k=1}^{N} p_k^0(N, n) b_k^2(N, n) \to b^2 < \infty, \quad \max_{k=1,\ldots,N} |b_k(N, n)| \leqslant C < \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

В формуле (8) вероятности p_k^0, $k = 1, \ldots, N$, соответствуют проверяемой гипотезе, а последовательность констант $c_{N,n}$ возрастает с увеличением N и n. Для проверки гипотезы равновероятности: $p_1 = \ldots = p_N$ и в ситуации

$$c_{N,n} \equiv N^{1/4}, \quad n/N \to \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad \text{при } N, n \to \infty \tag{9}$$

Хольст [11] доказал, что в классе всех симметрических статистик (3) асимптотически оптимальной при различении односторонних альтернатив (8) является хи-квадрат. Можно ли увеличить асимптотическую мощность статистических критериев в той же ситуации, рассматривая более общий

$$\zeta(N, n) = \sum_{k=1}^{N} f_k(w_k, \ldots, w_{k+l}), \quad l \geqslant 0 \pmod N, \tag{10}$$

чем в (3), класс статистик? Как показали Г. И. Ивченко и С. В. Цуканов [13], статистика

$$X^2(N,\ l)=\sum_{k=1}^{N}(w_k+\ldots+w_{k+l})^2 \tag{11}$$

является асимптотически более мощной, чем статистика хи-квадрат, и к тому же «выигрыш» в асимптотической мощности увеличивается с ростом l. В свою очередь статистика (11), называемая обобщенной статистикой хи-квадрат, уступает [13] с точки зрения асимптотической мощности асимптотически оптимальной (для односторонних альтернатив (8) с $c_{N,n}\equiv N^{1/4}$) статистике

$$Y^2(N,\ n)=X^2(N,\ l)-X^2(N,\ l-1),\ X^2(N,\ -1)=0.$$

При проверке гипотезы равновероятности в другом важном случае сближающихся с гипотезой альтернатив с $c_{N,n}\equiv N^{1/2}$ асимптотически оптимальной в классе всех статистик (3) против односторонних альтернатив (8) с учетом (9) является (см. Хольст [11]) линейная форма

$$\zeta(N,\ n)=\sum_{k=1}^{N}b_k(N,\ n)\,w_k. \tag{12}$$

Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведев [12] доказали асимптотическую оптимальность статистики (12) и в более общей ситуации (8) с $c_{N,n}\equiv N^{1/2}$. Есть некоторые основания считать, что в последнем случае «переход» от разделимых статистик (3) к l-разделимым статистикам (10) не увеличивает асимптотическую мощность соответствующих оптимальных критериев.

Переходя к задачам комбинаторики, предположим, что нам задано некоторое подмножество B множества целых неотрицательных чисел. Рассмотрим «усеченные» случайные величины $w_k^{(B)}$, $k=1,\ldots,N$, где значение $w_k^{(B)}=w_k$ определено при $w_k\in B$, и «усеченные» случайные величины $\theta_{(k)}^{(B)}$, $k=1,\ldots,N$, где значение $\theta_k^{(B)}=\theta_k$ определено при $\theta_k\in B$. Пусть

$$\zeta^{(B)}(N,\ n)=\sum_{k=1}^{N}I^{(r)}(w_k^{(B)}). \tag{13}$$

Тогда статистика (13) является разделимой статистикой, для которой $a(N,n)=n$ и величины $\theta_k^{(B)}$, $k=1,\ldots,N$, распределены по «усеченному» пуассоновскому закону:

$$P_2\{\theta_k^{(B)}=m\}=\frac{(np)^m}{m!\sum\limits_{k\in B}(np)^k/k!},\quad m\in B,\ k=1,\ldots,N.$$

Обозначим, следуя Хольсту [14], через $S(n,A,B)$, где A — подмножество (необязательно собственное) множества целых неотрицательных чисел и «точка» $\{0\}$ не содержится в B, число разбиений n различимых объектов на j непересекающихся (неупорядоченных) классов объемов $s_1,\ldots,s_j$ для всех $j\in A$ и всех $s_1,\ldots,s_j\in B$; положим $S(0,\ 0,\ B)=1$ и $S(n,0,B)=0$ при $n\geqslant 1$. Используя вероятностный подход к изучению задач комбинаторики, получим [14] формулу

$$S(n,\ A,\ B)=n!\,(np)^{-n}A(B(np))\,P\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\theta_k^{(B)}=n\right\}=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int_{\gamma}A(B(z))\,z^{-n-1}\,dz, \tag{14}$$

где ν, $\theta_1^{(B)}$, $\theta_2^{(B)}$, ... —независимые случайные величины,

$$B(\lambda)=\sum_{k\in B}\lambda^k/k!,\quad A(\lambda)=\sum_{k\in A}\lambda^k/k!,$$

$$P(\nu=r)=[(B(\lambda))^r/r!]/A(B(\lambda)),\quad r\in A,\ \lambda>0,$$

и γ — произвольный замкнутый контур, окружающий точку $z=0$. Представления (14) удобны для исследования асимптотических свойств чисел $S(n, A, B)$. Эти числа в случае совпадения B с множеством $\mathbf{N}$ натуральных чисел и $A=\{\mathbf{N}\}$ являются числами Стирлинга 2-го рода $\sigma(N,\ n)$, связанными в свою очередь соотношением

$$\sigma(N,\ n)=(n!)^{-1}\Delta^n 0^N$$

с числами Моргана $\Delta^m 0^k=\Delta^m x^k|_{x=0}$. Хорошо известна опубликованная в 1711 г. Муавром формула, связывающая числа Стирлинга 2-го рода и число μ_0 незанятых ячеек в классической схеме размещения. Если же $A=\{0\}\cup\mathbf{N}$ и $B=\mathbf{N}$, то числа $S(n, A, B)$ являются числами Белла. В комбинаторике могут вызвать интерес аналоги представлений (14) и в других схемах размещения.

Пример 2. Предположим, что на отрезок [0, 1] наудачу и независимо бросаются $N-1$ точек, и пусть $U_N(k)$, $k=1, ..., N-1$, — упорядоченные в порядке возрастания координаты этих точек. Длины выборочных промежутков

$$\Delta_N(k)=U_N(k)-U_N(k-1),\quad k=1,\ \ldots,\ N,\ \text{с}\ U_N(N)=1-U_N(0)=1$$

называются в зарубежной литературе (выборочными) равномерными спейсингами. В нашем случае статистика (1) имеет вид

$$\zeta(N)=\sum_{k=1}^{N}f_k(N\Delta_k,\ \ldots,\ N\Delta_{k+l})\ (\mathrm{mod}\,N) \tag{15}$$

с $w_k=N\Delta_k$, $k=1, ..., N$. При этом величины θ_k, $k=1, ..., N$, распределены по стандартному экспоненциальному закону и $a=N$ (этот факт использовался Ле Камом [15]). Статистикам (15) и их применениям посвящены многочисленные работы (см., например, [16—19, 4]). Дарлингом [16] получено следующее интегральное представление. Предположим, что φ_k, $k=1, ..., N$, — функции (быть может, комплекснозначные) действительного переменного, для которых абсциссы соответствующих преобразований Лапласа меньше некоторого положительного числа c. Тогда

$$E\prod_{k=1}^{N}\varphi_k(\Delta_k)=\frac{(N-1)!}{2\pi i}\int_{\Gamma_c}e^z\left\{\prod_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty}\varphi_k(x)\,e^{-x}\,dx\right\}dz, \tag{16}$$

где Γ_c — прямая $\mathrm{Re}\,z=c$ и i — мнимая единица. Формула (16) позволяет, в частности, получить интегральные представления для моментов случайной величины (15) и для ее характеристической функции в случае $l=0$. С помощью указанного представления для характеристической функции и метода перевала Дарлинг [16] доказал ряд предельных

теорем, касающихся величин вида (15) с $l=0$. Ле Кам [15] применил другой способ: положив в основу связь величин w_k, $k=1, \ldots, N$, с экспоненциальным распределением, он описал (в терминах совместной характеристической функции соответствующих величин ξ и η) множество всех предельных распределений статистики (15) в симметрическом случае $f_1 = \ldots = f_N$ и с $l=0$. Статистики, основанные на спейсингах, используются и для построения критериев согласия. При этом проверяемая гипотеза предполагает равномерность распределения членов выборки $U_1, \ldots, U_{N-1}$, а класс альтернативных функций распределения F_N выбирается, как правило, в следующем виде:

$$F_N(u) \equiv u + N^{-\delta} \int_0^u b_N(t)\, dt; \; u \in [0, 1]; \; \delta > 0; \tag{17}$$

здесь $b_N(u)$ есть величина $o(1)$ по N при каждом фиксированном значении $u \in [0, 1]$. При $\delta = 1/2$ альтернативы (17), как показал Д. М. Чибисов [20], асимптотически не различаются при $l=0$ и в симметрическом случае. Это обстоятельство стало причиной снижения интереса к критериям согласия, основанным на спейсингах. Однако указанные альтернативы могут различаться [21] этими критериями, если использовать несимметрические статистики; более того, при $l=0$ асимптотически оптимальная для односторонних альтернатив статистика задается [22] функциями $f_k(x) = b_N(k/N)x$, $k=1, \ldots, N$. В случае же $\delta = 1/4$ и $l=0$ асимптотически оптимальной в классе всех симметрических статистик, основанных на спейсингах, является [23] статистика Гринвуда с $f_k(x) = x^2$, $k=1, \ldots, N$. Возникает вопрос: можно ли (как в полиномиальной схеме) увеличить мощность асимптотически оптимального критерия, если рассматривать более широкий класс статистик с $l \geqslant 0$?

К статистикам (15) можно предъявить несколько естественных требований. При округлении значений функций $f_1, \ldots, f_N$ и $w_1, \ldots, w_N$ значение статистики $\zeta(N)$ и ее распределение не должны меняться «слишком сильно». Кроме того, у нас случайные величины $\theta_1, \ldots, \theta_N$ имеют непрерывную плотность распределения, отличную от нуля в окрестности точки $a=N$, так что имеется непрерывный (в смысле слабой сходимости) вариант условного распределения $P_{\theta(N,n)|\eta}$ и хотелось бы, чтобы индуцируемое им условное распределение $P_{\xi|\eta}$, где

$$\xi \equiv \xi(N) = \sum_{k=1}^{N} f_k(\theta_k, \ldots, \theta_{k+1}) \pmod N,$$

также было непрерывно (в смысле слабой сходимости) в некоторой окрестности точки a. Тем самым мы вынуждены [4] вводить в пространствах G_1 и G_2 топологии и согласовывать их с операциями сложения в этих пространствах.

Пример 3. Рассмотрим более общую (по сравнению с предыдущим примером) ситуацию. Пусть $U_1, \ldots, U_{N-1}$ и $V_1, \ldots, V_n$ — две независимые выборки, состоящие из независимых в совокупности равномерно распределенных на отрезке [0, 1] случайных величин, и пусть $\varkappa_k$ — число точек второй выборки, попавших в полуинтервал $(U_N(k-1), U_N(k)]$, $k=1, \ldots, N$. Величины

$$\zeta(N, n) = \sum_{k=1}^{N} f_k(N\Delta_k, \varkappa_k) \tag{18}$$

введены в [24]. Если функции f_k, входящие в правую часть (18), при каждом значении k не зависят от второго аргумента, то статистики

(18) сводятся к статистикам критериев согласия предыдущего примера. Если же функции f_k при каждом значении k не зависят от первого аргумента, то статистики (18) сводятся к статистикам, основанным на спейсинг-частотах. В рассматриваемом случае $a=(N, n)$, $w_k=(N\Delta_k, \varkappa_k)$ и $\theta_k=(\theta_k', \theta_k'')$, $k=1, \ldots, N$, причем распределение второй компоненты вектора θ_k является геометрическим с параметром $0<p<1$, а условное при условии $\theta_k''=s_k$ распределение первой компоненты является гамма-распределением с параметрами s_k+1 и v формы и масштаба соответственно (см. работу [25]). Существует [24] аналог представления Дарлинга и для статистик (18). С его помощью, используя метод перевала, Э. М. Кудлаев [22] получил условия асимптотической нормальности (при пропорциональном росте N и n) статистик (18). Приводимые в работе [26] слабые пределы распределений величин (18) найдены с помощью вышеупомянутого представления через условные распределения.

Возникает вопрос: нельзя ли построить класс разделимых статистик, включающий в себя статистики всех вышеупомянутых примеров? С другой стороны, хотелось бы получить условия, при которых разделимые статистики задавались бы семейством условных распределений. Ответ на эти вопросы частично дается в [4, 27].

Суммируя сказанное, можно поставить следующие задачи.

1. Каковы условия существования разделимых статистик? Какие конкретные схемы сумм зависимых сл. величин можно представить в виде разделимых статистик?

2. Пусть задана величина вида (1). Какие «сужения» вероятностного пространства (Ω_1, S_1, P_1) и согласованного с ним «сужения» вероятностного пространства (Ω_2, S_2, P_2) снова дадут величину вида (1)?

3. Каковы условия слабой сходимости распределений разделимых статистик как в случае справедливости гипотезы, так и при асимптотически разделимых [4] альтернативах?

4. Каков вид асимптотически оптимальных критериев согласия и однородности, основанных на разделимых статистиках?

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-01273.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М., 1976.
2. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М., 1984.
3. Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Дискретные задачи теории вероятностей//Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теор. киберн. М., 1984. **22**. 3—60.
4. Кудлаев Э. М. Разделимые статистики//Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теор. киберн. М., 1988. **26**. 97—149.
5. Севастьянов Б. А. Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам распределения числа «пустых ящиков» в классической задаче о дробинках//Теория вероятн. и ее применен. 1967. **12**, № 1. 144—154.
6. Steck G. P. Limit theorems for conditional distributions//Univ. Calif. Publs. Statist. 1957. **2**, N 12. 237—284.
7. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л., 1949.
8. Takano K. Central convergence criterion in the multidimensional case//Ann. Inst. Statist. Math. 1955. **7**, N 2. 95—102.
9. Takano K. Multidimensional central limit criterion in the case of bounded variances//Ann. Inst. Statist. Math. 1956. **7**, N 2. 81—93.

10. Рвачева Е. Л. Об областях притяжения устойчивых законов//Науч. зап. Львов. ун-т. 1955. **29**, № 6(1). 5—44.
11. Holst L. Asymptotic normality and efficiency for certain goodness-of-fit tests// //Biometrica. 1972. **59**, N 1. 137—145.
12. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Разделимые статистики и проверка гипотез. Случай малых выборок//Теория вероятн. и ее применен. 1978. **23**, № 4. 796—806.
13. Ивченко Г. И., Цуканов С. В. О новых статистических критериях в полиномиальной схеме и их асимптотических свойствах//Теория вероятн. и ее применен. 1988. **33**, № 1. 201—205.
14. Holst L. On number related to partitions of unlike objects and occupancy problems//Eur. J. Combinatorics. 1981. **2**. 231—237.
15. Le Cam L. Une théorème sur la division d'une intervalle par des points au hasard//Publ. Inst. Statist. Univ. Paris. 1958. **7**, N 3—4. 7—16.
16. Darling D. A. On a class problems related to the random division of an interval//Ann. Math. Statist. 1953. **24**, N 2. 239—253.
17. Pyke R. Spacings//J. Roy. Statist. Soc. B. 1965. **27**, N 3. 395—436.
18. Hall P. On powerfull distributional tests based on sample spacings//J. Multivar. Anal. 1986. **19**, N 2. 201—224.
19. Кудлаев Э. М. Критерии согласия и однородности, основанные на разделимых статистиках (§ 15 в статье «Статистические критерии, основанные на эмпирических процессах, и связанные с ними вопросы»)//Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теор. киберн. М., 1992. **30**. 72—81.
20. Чибисов Д. М. О критериях согласия, основанных на выборочных промежутках//Теория вероятн. и ее применен. 1961. **6**, № 3. 354—358.
21. Кудлаев Э. М. Распределение взвешенной статистики Шермана при сближающихся альтернативах//Теория вероятн. и ее применен. 1977. **22**, № 4. 813—822.
22. Кудлаев Э. М. Асимптотическая нормальность статистик некоторых классов критериев согласия и однородности//Докл. АН СССР. 1978. **240**, № 3. 534—537.
23. Rao J. S., Sethuraman J. S. Weak convergence of empirical distribution function of random variables subject to perturbations and scale factors//Ann. Math. Statist. 1975. **3**, N 2. 299—313.
24. Кудлаев Э. М. Интегральное представление, относящееся к сравнению двух выборок//Матем. заметки. 1978. **24**, № 6. 809—817.
25. Кудлаев Э. М. О предельных условных распределениях сумм случайных величин//Теория вероятн. и ее применен. 1984. **29**, № 4. 743—752.
26. Кудлаев Э. М. Предельные теоремы для одного класса разделимых статистик//Теория вероятн. и ее применен. 1985. **30**, № 1. 170—174.
27. Кудлаев Э. М. О суммировании некоторых зависимых случайных величин со значениями в локально компактных абелевых группах//Изв. вузов. Математика. 1989. **2**. 41—46.

Поступила в редакцию
22.07.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 5

УДК 517

Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков

О ДВОЙНЫХ И ПОВТОРНЫХ ПРЕДЕЛАХ ПО БАЗЕ

В этой статье мы продолжаем развитие теории сходимости по базе множеств (см. также [1—3]).

Одним из элементов построения курса математического анализа является одновременное применение процедур предельных переходов различных типов. Заметную роль играют здесь вопросы существования повторных пределов, их равенство и связь с понятием двойного предела. Изложение теории пределов на основе понятия сходимости по базе множеств предполагает освещение указанных вопросов с общих позиций. Настоящая статья посвящена решению данной проблемы. Существенным моментом является использование понятия двойного предела по совокупности двух баз в качестве обычного предела по не-