Х. Х. Имомназаров, Л. Х. Хужаев, З. Ш. Янгибоев, Об одной обратной динамической задаче пороупругости для пористой среды, *Математические заметки СВФУ*, 2022, том 29, выпуск 2, 19–30

DOI: 10.25587/SVFU.2022.10.86.002

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2022. Том 29, № 2

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПОРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Х. Х. Имомназаров,
Л. Х. Хужаев, З. Ш. Янгибоев

Аннотация. Рассматривается обратная динамическая задача пороупругости кусочно гладкого коэффициента сдвига по дополнительной информации колебаний точек свободной поверхности. Считается, что выполнена гипотеза Гупилла о равном времени распространения возмущений по слоям насыщенной жидкостью пористой среды. Получены рекуррентные формулы для восстановления неизвестного коэффициента сдвига.

DOI: 10.25587/SVFU.2022.10.86.002

Ключевые слова: сейсмические волны, уравнения пороупугости, модуль сдвига, коэффициент Дарси, полупространство, вязкая жидкость.

Математическое моделирование волновых полей стало неотъемлемой частью современных обрабатывающих геофизических комплексов в нефте- и газодобыче. Еще большее значение оно имеет на этапах интерпретации сейсмических данных. Его активно используют при идентификации и увязывании горизонтов, при сопоставлении результатов обработки с данными акустического каротажа и т. п. На нем основан метод псевдоакустического каротажа, представляющий собой одну из попыток решения обратной динамической задачи для реальных данных.

Модель горизонтально-слоистой среды достаточно часто используется для интерпретации сейсмических данных. Например, данная модель может быть применима для Восточной Сибири, когда слои сформированы осадочными породами. Также модель горизонтально-слоистой среды может использоваться при раздельной интерпретации, когда на первом шаге интерпретации геофизических данных выбирается простая модель среды и выделяются особенности среды, где потом могут быть использованы двух- и трехмерные модели сред.

В основе существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования, как правило, лежит уравнение с частными производными. Задачи о распространении волн различной природы в плоских

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 21–51–15002).

слоисто-неоднородных средах возникают во многих физических исследованиях. Наряду с прямыми задачами могут быть поставлены обратные, заключающиеся в определении характеристик слоисто-неоднородных сред. Обратным задачам для гиперболических уравнений ввиду их широкого прикладного значения посвящена обширная литература (см., например, [1–4]). Среди этих задач большое практическое значение имеют обратные задачи электроразведки [5], магнитотеллурического зондирования [6], задачи интерпретации данных о дисперсии поверхностных сейсмических волн [7, 8], обратные динамические задачи сейсмики [9, 10], а также задачи синтеза слоистых покрытий [11].

В [12] получены рекуррентные формулы для определения кусочно-постоянного коэффициента волнового уравнения в рамках гипотезы Гупилла о равном времени τ распространения возмущения по плоскопараллельным слоям. В качестве дополнительной информации рассматривалось значение решения начально-краевой задачи (или его производной по времени) на свободной поверхности $x = 0$.

Наиболее близкой к предложенной является идея послойного определения коэффициента волнового уравнения путем последовательного анализа в точке $x = 0$ отраженного сигнала в моменты времени $2n\tau$. Измеренный в этот момент времени сигнал должен содержать информацию о первых $n+1$ слоях и при известных значениях коэффициента в первых n слоях позволяет определить искомую величину в $(n+1)$-м слое (см., например, [1, 13, 14]). Отметим также работы [15–19].

В данной работе нас будет интересовать задача, связанная с распространением волн в изотропной слоистой пористой среде, опирающейся на однородное полупространство. Будем рассматривать плоскопараллельные слои. Рассматривается одномерная обратная динамическая задача пороупругости в диссипативном приближении для слоистых сред.

1. Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения колебаний в неоднородном по пространственной переменной полупространстве, описываемый системой уравнений [20–27]:

$$\rho_s(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho_l(x)b(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\right), \quad x > 0,\ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b(x)(u - v), \quad x > 0,\ t > 0, \tag{2}$$

при следующих нулевых начальных условиях:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad x > 0, \tag{3}$$

и граничном условии

$$u_x|_{x=0} = H(t), \quad t > 0. \tag{4}$$

В формулах (1) и (2) функции $\mu(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$, $b(x)$ кусочно-постоянны и могут иметь разрывы в точках $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, т. е., полагая $a_0 = 0$, можно записать равенства

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_m, & x \in (a_{m-1}, a_m),\ m = 1, \ldots, k, \\ \mu_{k+1}, & x > a_k, \end{cases} \tag{5}$$

$$\rho_l(x) = \begin{cases} \rho_{lm}, & x \in (a_{m-1}, a_m),\ m = 1, \ldots, k, \\ \rho_{lk+1}, & x > a_k, \end{cases} \tag{6}$$

$$\rho_s(x) = \begin{cases} \rho_{sm}, & x \in (a_{m-1}, a_m),\ m = 1, \ldots, k, \\ \rho_{sk+1}, & x > a_k, \end{cases} \tag{7}$$

$$b(x) = \begin{cases} b_m, & x \in (a_{m-1}, a_m),\ m = 1, \ldots, k, \\ b_{k+1}, & x > a_k, \end{cases} \tag{8}$$

где $b_m, \mu_m, \rho_{lm}, \rho_{sm} = \mathrm{const}$. В точках разрыва a_m коэффициента $\mu(x)$ к условиям (3), (4) добавим условия сопряжения

$$[u]_{x=a_m} = [\mu(x) u_x]_{x=a_m} = 0, \quad m = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Задачу определения функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющих равенствам (1)–(4), (9) при заданных функциях $b(x)$, $\mu(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ вида (5)–(8), принято называть *прямой задачей.*

Основной предмет исследования настоящей работы составляет

Обратная задача A_μ^1. *Определить коэффициент $\mu(x)$ уравнения (1), т. е. найти набор из $2k+1$ чисел $\{\mu_1, \ldots, \mu_{k+1};\ a_1, \ldots, a_k\}$, если относительно решения задачи (1)–(4), (9) известна информация*

$$\Phi(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} u_t(0,t) e^{-i\omega t}\, dt, \quad \omega \in \Omega, \tag{10}$$

причем Ω — отделенный от нуля конечный интервал и функции $b(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ заданы. Далее будем для простоты считать, что функции $b(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ постоянны.

Все дальнейшие построения будем проводить в предположении, что

$$\tau = \frac{a_1 - a_0}{c_1} = \frac{a_2 - a_1}{c_2} = \cdots = \frac{a_k - a_{k-1}}{c_k} \tag{11}$$

и величина τ задана, $c_k = \sqrt{\mu_k / \rho_{sk}}$. Как отмечалось выше, в ряде случаев предположение (11) эквивалентно гипотезе Гупилла. Будем считать, что $|\Omega| > \pi/\tau$.

Отметим, что наличие k равенств (11) обратной задачи позволяет говорить о восстановлении в рамках решения обратной задачи A_μ^1 лишь $k+1$ констант. Будем считать, что это $\{c_1, \ldots, c_{k+1}\}$.

Известно (см., например, [1, 4]), что прямая задача (1)–(4), (9) в случае слоистой среды связана со следующей задачей для уравнения Гельмгольца с параметром:

$$U_{xx} + \omega^2 \widetilde{B}^2(x,\omega) U = 0, \tag{12}$$

$$U_x(0,\omega) = h(\omega), \quad U_x - i\widetilde{B}\omega U \to 0, \ x \to \infty, \tag{13}$$

$$[U]_{x=a_m} = [\mu U_x]_{x=a_m} = 0, \quad m = 1, \dots, k. \tag{14}$$

Здесь $U(x,\omega)$, $h(\omega)$ — образы Фурье соответственно функций u и H:

$$U(x,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega t}\, dt, \quad h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\widetilde{B}(x,\omega) = \frac{\sqrt{(1 + \rho_l(x)/\rho_s(x)) b(x) - i\omega}}{c(x)\sqrt{b(x) - i\omega}}.$$

Дополнительная информация (10) для обратной задачи A_μ^1 определения коэффициента $\mu(x)$ будет соответствовать равенству

$$\Phi(\omega) = i\omega U(0,\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{15}$$

Таким образом, решение обратной задачи A_μ^1 связано с решением следующей задачи.

Обратная задача A_μ^2. *Определить коэффициент* $\mu(x)$ *вида* (5)–(8) *уравнения* (12), *если относительно решения задачи* (12)–(14) *известна информация* (15).

Следуя [12], введем следующее

Определение. Обратную задачу A_μ^2 об определении функции $\mu(x)$ вида (5) по дополнительной информации (10) в рамках гипотезы (11) назовем k-*слойной.*

Если это не оговорено особо, всюду в дальнейшем будем рассматривать k-слойную задачу.

Воспользуемся явными формулами для общего решения (a_{m-1}, a_m) уравнения (12) на участках постоянства функции $\mu(x)$:

$$U(x,\omega) = A_1^m(\omega) e^{i\widetilde{B}_m \omega x} + A_2^m(\omega) e^{-i\widetilde{B}_m \omega x}. \tag{16}$$

Краевое условие (13) при $x \to \infty$ означает, что из бесконечности нет приходящих волн, т. е. $A_2^{k+1} = 0$. Для полупространства $x > a_k$ выполнено равенство

$$U(x,\omega) = A e^{i\widetilde{B}_{k+1}\omega x}, \tag{17}$$

где параметр $A(\omega)$ будет определен ниже.

Согласно (16) равенства (15) можно записать в виде

$$A_1^m e^{i\widetilde{B}_m \omega_m} + A_2^m e^{-i\widetilde{B}_m \omega a_m} = A_1^{m+1} e^{i\widetilde{B}_{m+1}\omega a_m} + A_2^{m+1} e^{-i\widetilde{B}_{m+1}\omega a_m},$$

$$\mu_m\big(A_1^m e^{i\widetilde{B}_m\omega a_m} - A_2^m e^{-i\widetilde{B}_m\omega a_m}\big) = \mu_{m+1}\big(A_1^{m+1} e^{i\widetilde{B}_{m+1}\omega a_m} - A_2^{m+1} e^{-i\widetilde{B}_{m+1}\omega a_m}\big).$$

Отсюда, используя обозначения

$$B_j^m = A_j^m e^{(-1)^{j-1} i\omega \widetilde{B}_m a_m}, \tag{18}$$

легко получить, что в силу (7) справедливы равенства

$$\begin{aligned} B_1^m + B_2^m &= B_1^{m+1} e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} + B_2^{m+1} e^{i\omega\widetilde{b}\tau}, \\ B_1^m - B_2^m &= \frac{\mu_{m+1}}{\mu_m}\big(B_1^{m+1} e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} - B_2^{m+1} e^{i\omega\widetilde{b}\tau}\big). \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $\widetilde{b} = \sqrt{\frac{(1+\rho_l/\rho_s)b - i\omega}{b-i\omega}}$.

Система (19) в обозначениях

$$\lambda_m^{\pm} = 1 \pm \frac{\mu_{m+1}}{\mu_m} \tag{20}$$

эквивалентна равенствам

$$B_1^m = \frac{1}{2}\big(\lambda_m^+ B_1^{m+1} e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} + \lambda_m^- B_2^{m+1} e^{i\omega\widetilde{b}\tau}\big),$$

$$B_2^m = \frac{1}{2}\big(\lambda_m^- B_1^{m+1} e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} + \lambda_m^+ B_2^{m+1} e^{i\omega\widetilde{b}\tau}\big), \quad m = 1, \dots, k-1. \tag{21}$$

Для вычисления величин B_j^k используем равенства (13) в точке $x = a_k$, представление (17) и формулы (11), (16), (20). Полагая $\alpha = e^{i\omega\widetilde{B}_{k+1} a_k}$, получим

$$B_1^k = \frac{1}{2} A\alpha\lambda_k^+, \quad B_2^k = \frac{1}{2} A\alpha\lambda_k^-. \tag{22}$$

Функцию $A(\omega)$ определим из краевого условия (13) при $x = 0$, которое согласно (11), (16), (18) имеет вид

$$i\omega\widetilde{B}_1\big(A_1^1 - A_2^1\big) = i\omega\widetilde{B}_1\big(B_1^1 e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} - B_2^1 e^{i\omega\widetilde{b}\tau}\big) = h(\omega). \tag{23}$$

Используя формулы (21), (22), можно сделать вывод о том, что

$$B_j^1 = \frac{A\alpha}{2^k} P_j^{k-1}(e^{i\omega\tau}, e^{-i\omega\tau}), \tag{24}$$

где $P_j^{k-1}(\xi, \eta)$ — однородные полиномы степени $k-1$ от переменных ξ, η. Коэффициенты этих полиномов, в свою очередь, суть однородные полиномы степени k, состоящие из слагаемых вида $1^{\pm}\, 2^{\pm} \dots \lambda_k^{\pm}$.

Согласно (23), (24) справедлив аналог равенства из [12]:

$$\frac{A\alpha}{2^k} = \frac{h(\omega)}{i\omega\widetilde{B}_1}\big(P_1^{k-1} e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} - P_2^{k-1} e^{i\omega\widetilde{b}\tau}\big)^{-1},$$

Но тогда для дополнительной информации (16) $\Phi(\omega) = i\omega U(0,\omega) = i\omega(A_1^1 + A_1^1)$ получим представление

$$\Phi(\omega) = \frac{h(\omega)}{\widetilde{B}_1} \frac{P_1^{k-1} e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} + P_2^{k-1} e^{i\omega\widetilde{b}\tau}}{P_1^{k-1} e^{-i\omega\widetilde{b}\tau} - P_2^{k-1} e^{i\omega\widetilde{b}\tau}}. \tag{25}$$

Наложим ограничение на функцию $h(\omega)$ (т. е. функцию $H(t)$ в терминах динамической постановки (1)–(4)). Пусть для некоторого $\omega_0 > 0$ функция $h(\omega)$ не обращается в нуль на отрезке $[\omega_0, \omega_0 + \pi/\tau] \subset \Omega$. В частности, если $H(t) = \delta(t)$ и $\Omega = R$, то $h(\omega) = 1$ и приведенное выше условие выполнено при любых ω_0, τ.

Рассмотрим следующие коэффициенты Фурье функции $\Phi(\omega)/h(\omega)$:

$$\varphi_m = \int\limits_{\omega_0}^{\omega_0+\pi/\tau} \Phi(\omega) h^{-1}(\omega) e^{-2i\omega m\tau}\, d\omega. \tag{26}$$

Установим связь между числами φ_m и параметрами μ_m обратной задачи A^2_μ.

Для вычисления интегралов (26) используем замену переменных $z = e^{2i\omega\tau}$ ($dz = 2i\tau z d\omega$), взаимно однозначно отображающую полуинтервал $[\omega_0, \omega_0 + \pi/\tau]$ и ω на единичную окружность $|z| = 1$ комплексной плоскости z (интегрирование происходит в сторону возрастания $\arg z$).

Умножая числитель и знаменатель правой части (25) на функцию $e^{ki\omega\tau} = z^{k/2}$, получим, что функция $\widetilde{B}_1\Phi(\omega)/h(\omega)$, которую в терминах переменной z будем обозначать через $F_k(z)$, является отношением двух полиномов степени k:

$$F_k(z) = \frac{f_0^{(k)} + f_1^{(k)} z + \cdots + f_k^{(k)} z^k}{g_0^{(k)} + g_1^{(k)} z + \cdots + g_k^{(k)} z^k}. \tag{27}$$

Здесь нижний индекс функции $F_k(z)$ и верхние индексы коэффициентов $f_j^{(k)}$, $g_j^{(k)}$ означают «слойность» задачи.

Равенства (26) в этих обозначениях принимают вид

$$\varphi_m = \frac{1}{2i\tau c_1} \int\limits_{|z|=1} F_k(z) \frac{dz}{z^{m+1}}, \quad m = 0, \ldots, k. \tag{28}$$

Интегралы вида (28) в случае, когда все корни стоящего в знаменателе функции $F_k(z)$ полинома лежат вне единичного круга плоскости z, сравнительно просто вычисляются с помощью методов теории функции комплексного переменного. Все дальнейшие выкладки будем проводить в вышеупомянутом предположении, что полином $g_0^{(k)} + g_1^{(k)} z + \cdots + g_k^{(k)} z^k$ не имеет корней в круге $|z| \le 1$. Достаточным условием для справедливости этого предположения в силу известной теоремы Руше [28] является неравенство

$$\left|g_0^{(k)}\right| > \sum_{j=1}^{k} \left|g_j^{(k)}\right|. \tag{29}$$

Итак, считаем, что подынтегральные функции в равенствах (28) внутри ограниченной контуром интегрирования области $|z| < 1$ имеют единственную особую точку, соответственно полюс порядка $m+1$ в точке $z=0$. Это позволяет воспользоваться теоремой о вычетах [28], на основании которой

$$\varphi_m = \frac{\pi}{\tau \widetilde{B}_1} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{F_k(z)}{z^{m+1}}.$$

Поскольку, как уже отмечалось, точка $z=0$ является полюсом порядка $m+1$ для рассматриваемой функции, коэффициенты Фурье (28) можно вычислять по формулам [28]

$$\varphi_m = \frac{1}{m!} \frac{\pi}{\tau \widetilde{B}_1} F_k^{(m)}(0). \tag{30}$$

Прежде чем сформулировать основной результат работы, введем некоторые обозначения (см. (20)):

$$\gamma_m = \frac{\lambda_m^-}{\lambda_m^+} = -\frac{\mu_{m+1} - \mu_m}{\mu_{m+1} + \mu_m}, \quad m = 1, \dots, k; \tag{31}$$

$$\begin{gathered} h_p^m = h_{m-1}^m h_{m-p-1}^{m-1} + h_p^{m-1}, \quad p = 0, \dots, m-2,\ m = 2, \dots, k \\ h_{m-1}^m = -\gamma_m, \quad m = 2, \dots, k, \\ h_0^1 = h_m^m = 0, \quad m = 1, \dots, k. \end{gathered} \tag{32}$$

Теорема. *Пусть выполнены равенства* (11), *полином* (27) $g_0^{(k)} + g_1^{(k)} z + \dots + g_k^{(k)} z^k$ *не имеет корней в круге* $|z| \le 1$ *и образ Фурье* $h(\omega)$ *функции* $H(t)$ *не обращается в нуль для* $\omega \in [\omega_0, \omega_0 + \pi/\tau] \subset \Omega$. *Тогда для построенной по решению задачи* (12)–(14) *функции* $F_k(z)$ (27) *справедливы формулы*

$$F_k^{(m)}(0) = m! \left[2\gamma_m \prod_{p=1}^{m-1} (1 - \gamma_p^2) - \sum_{p=1}^{m-1} \frac{h_p^m}{(m-p)!} F_k^{(m-p)}(0) \right]. \tag{33}$$

При этом коэффициенты γ_m, h_p^m *вычисляются согласно формулам* (31), (32), $m = 2, \dots, k$.

Доказательство теоремы проводится так же, как в [12].

2. Алгоритм решения обратной задачи A_μ^1 (обратной задачи A_μ^2)

Используем формулы (33) для построения алгоритма решения обратной задачи A_μ^2, а тем самым и обратной задачи A_μ^1.

Перед описанием алгоритма напомним условия его применимости.

1. Должны быть выполнены равенства (11), что в терминах системы уравнений Ламе означает справедливость гипотезы Гупилла об одинаковом времени прохождения волны по слоям.

2. Полином $g_0^{(k)} + g_1^{(k)} z + \dots g_k^{(k)} z^k$ (27) не должен иметь корней в круге $z \le 1$. Достаточным условием выполнения этого ограничения в терминах коэффициентов μ_m исходной задачи является то, что скорости в слоях отличаются «не сильно».

3. Образ Фурье $h(\omega)$ данных $H(t)$ (4) не должен обращаться в нуль для содержащегося в Ω отрезка длины π/τ: $\omega \in [\omega_0, \omega_0 + \pi/\tau]$. Например, если $H(t) = \delta(t)$ и $\Omega = R$, то это условие выполнено для всех ω_0, τ.

При всех сформулированных предположениях решение обратной задачи $(\mu_1, \ldots, \mu_{k+1})$ можно найти по следующей схеме.

1. Вычислить $k+1$ интегралов (26): $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k.}$

2. Последовательно определить числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$:

$$\gamma_1 = \varphi_1/2\varphi_0, \tag{34}$$

согласно (30), (33)

$$\gamma_m = \frac{1}{2\varphi_0} \frac{\varphi_m + \sum\limits_{p=1}^{1} h_p^m \varphi_{m-p}}{\prod\limits_{p=1}^{m-1} \left(1 - \gamma_p^2\right)}, \tag{35}$$

где коэффициенты h_p^m вычисляются по рекуррентным формулам (32).

3. Найти решение обратной задачи:

$$\mu_1 = \pi/\tau\varphi_0, \tag{36}$$

а в соответствии с (31)

$$\mu_{m+1} = \frac{1 - \gamma_m}{1 + \gamma_m} \mu_m, \tag{37}$$

Итак, в сформулированных предположениях формулы (26), (32), (34)–(37) дают решение обратной задачи A_μ^2. Численная реализация этих формул состоит лишь в процедуре вычисления интегралов (26) и алгебраических преобразований (34)–(37), (32).

Важным является то, что моменты (26) могут вычисляться на отделенном от нуля интервале изменения ω.

Алгоритм допускает наличие фиктивных слоев $\mu_m = \mu_{m+1}$, что расширяет возможность его применения.

3. Заключение

Рассмотрена задача распространения поперечной волны в изотропной слоистой насыщенной жидкостью пористой среде, опирающейся на однородное полупространство. При этом рассмотрены плоскопараллельные слои. Исследована одномерная обратная динамическая задача пороупругости в диссипативном приближении для слоистых сред. Диссипация энергии происходит за счет коэффициента трения. Получены рекуррентные формулы для рассмотренной обратной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983.

2. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

3. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984

4. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.

5. *Тихонов А. Н.* О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР. 1949. Т. 19, № 6. С. 797–800.

6. *Тихонов А. Н.* О вариациях земного электромагнитного поля // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87, № 4. С. 547–550.

7. *Гласко В. Б.* К вопросу о единственности решения задачи восстановления структуры земной коры по дисперсионному спектру волн Рэлея // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 6. С. 1345–1348.

8. *Гласко В. Б.* О единственности некоторых обратных задач сейсмологии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1970. Т. 10, № 6. С. 1465–1480.

9. *Алексеев А. С.* Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967. С. 9–84.

10. *Романов В. Г.* Обратные задачи распространения сейсмических и электромагнитных волн // Методы решения некорректных задач и их приложения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. С. 111–118.

11. *Гласко В. Б., Тихонов А. Н., Тихонравов А. В.* О синтезе многослойных покрытий // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14, № 1. С. 135–144.

12. *Лаврентьев М. М.* Обратная задача для волнового уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 101–111.

13. *Баев А. В.* О решении обратной краевой задачи для волнового уравнения с разрывным коэффициентом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 11. С. 1619–1633.

14. *Гервер М. Л.* Обратная задача для волнового уравнения с неизвестным источником колебаний. М.: Наука, 1974.

15. *Белишев М. И., Куприянова Н. В.* Об отражении плоской наклонной волны от слоистого полупространства периодического профиля // Акуст. журн. 1983. Т. 29, вып. 6. С. 733–735.

16. *Баев А. В.* Об одной постановке обратной краевой задачи для волнового уравнения и итерационном методе ее решения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 4. С. 818–821.

17. *Баев А. В.* О решении обратной задачи для волнового уравнения на отрезке методом последовательных приближений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 6. С. 1358–1361.

18. *Белишев М. И.* Восстановление профиля скорости в неоднородном слое по низкочастотной асимптотике коэффициента отражения // Акуст. журн. 1986. Т. 32, вып. 1. С. 8–14.

19. *Карчевский А. Л.* Восстановление продольной и поперечной скоростей и границ тонких слоёв в тонкослоистой пачке // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 67–82.

20. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И.* Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 1. С. 99–110.

21. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Sci. Publ., Inc., 1995.

22. *Imomnazarov Kh. Kh.* Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13, N 3. P. 33–35.

23. *Имомназаров Х. Х.* Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 2. С. 154–165.

24. *Imomnazarov Kh. Kh., Kholmurodov A. E.* Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Math. Comput. Model. 2007. V. 45, N 3–4. P. 270–280.

25. *Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Рахмонов Т. Т., Янгибоев З. Ш.* Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавк. мат. журн. 2013. Т. 15, № 2. С. 45–57.

26. *Imomnazarov Kh., Kholmuradov A. E., Dilmuradov N.* Direct and inverse dynamic quasilinear problems of poroelasticity // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2365, N 1. Article ID 070020.

27. *Имомназаров Х. Х., Холмуродов А. Э., Омонов А. Т.* Прямая и обратная динамическая задача пороупругости // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2022. № 75. С. 87–99.

28. *Лаврентьев М. А.. Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию 15 марта 2022 г.
После доработки 15 апреля 2022 г.
Принята к публикации 31 мая 2022 г.

Имомназаров Холматжон Худайназарович
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
imom@omzg.sscc.ru

Хужаев Лочин Хусанович
Каршинский филиал Ташкентского университета информационных технологий,
Бешкентское шоссе, 3-й км, Карши 180202, Узбекистан
lochin-x@mail.ru

Янгибоев Зойир Шобердиевич
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, 17, Карши 180100, Узбекистан
zoyiry@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2022. Том 29, № 2

UDC 517.95

ON AN INVERSE DYNAMIC POROELASTICITY PROBLEM FOR A LAYERED MEDIUM

Kh. Kh. Imomnazarov, L. Kh. Khujaev, and Z. Sh. Yangiboev

Abstract: An inverse dynamic problem of poroelasticity of piecewise-smooth shear coefficient with respect to additional information about vibrations of free surface points is considered. The Gupill hypothesis of equal propagation time of perturbations through the layers of a porous medium saturated with liquid is assumed fulfilled. Recursive formulas for recovering the unknown shift coefficient are obtained.

DOI: 10.25587/SVFU.2022.10.86.002

Keywords: seismic waves, porosity equations, shear modulus, Darcy coefficient, half-space, viscous liquid.

REFERENCES

1. *Aki K., Richards P. G.*, Quantitative Seismology: Theory and Methods, Freeman & Co., San Francisco (1980).

2. *Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., and Shishatski S. P.*, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1986).

3. *Romanov V. G.*, Inverse Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1984).

4. *Yakhno V. G.*, Inverse Problems for Differential Equations of Elasticity [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1990).

5. *Tikhonov A. N.*, "On the uniqueness of the solution to the problem of electrical exploration [in Russian]," Dokl. AN SSSR, **69**, No. 6, 797–800 (1949).

6. *Tikhonov A. N.*, "On variations of the terrestrial electromagnetic field [in Russian]," Dokl. AN SSSR, **87**, No. 4, 547–550 (1952).

7. *Glasko V. B.*, "On the question of the uniqueness of the solution of the problem of reconstructing the structure of the Earth's crust from the dispersion spectrum of Rayleigh waves [in Russian]," Dokl. AN SSSR, **206**, No. 6, 1345–1348 (1972).

8. *Glasko V. B.*, "On the uniqueness of some inverse problems of seismology [in Russian]," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **10**, No. 6, 1465–1480 (1970).

9. *Alekseev A. S.*, "Inverse dynamic problems of seismics [in Russian]," in: Some Methods and Algorithms for Interpretation of Geophysical Data, pp. 9–84, Nauka, Moscow (1967).

10. *Romanov V. G.*, "Inverse problems of propagation of seismic and electromagnetic waves [in Russian]," in: Methods for Solving Ill-Posed Problems and Their Applications, pp. 111–118, Vychisl. Tsentr SO AN SSSR, Novosibirsk (1982).

11. *Glasko V. B., Tikhonov A. N., and Tikhonravov A. V.*, "On the synthesis of multilayer coatings [in Russian]," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **14**, No. 1, 135–144 (1974).

12. *Lavrentiev M. M.*, "Inverse problem for a wave equation with a piecewise constant coefficient," Sib. Math. J., **33**, No. 3, 101–111 (1992).

13. *Baev A. V.*, "On the solution of an inverse boundary value problem for a wave equation with a discontinuous coefficient [in Russian]," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **28**, No. 11, 1619–1633 (1988).

14. *Gerver M. L.*, Iinverse Problems for a One-Dimensional Wave Equation with an Unknown Source of Oscillation [in Russian], Nauka, Moscow (1974).
15. *Belishev M. I. and Kupriyanova N. V.*, "On the reflection of a plane oblique wave from a layered half-space of a periodic profile [in Russian]," Akust. Zh., **29**, No. 6, 733–735 (1983).
16. *Baev A. V.*, "Formulation of an inverse boundary value problem for the wave equation and an iterative method of solving it," Sov. Phys. Dokl., **31**, 301–302 (1986).
17. *Baev A. V.*, "Solution of the inverse problem for the wave equation on a segment by the method of successive approximations," Sov. Phys. Dokl., **31**, 314–316 (1986).
18. *Belishev M. I.*, "Reconstruction of the velocity profile in an inhomogeneous layer from the low-frequency asymptotics of the reflection coefficient [in Russian]," Akust. Zh., **32**, No. 1, 8–14 (1986).
19. *Karchevsky A. L.*, "Reconstruction of pressure and shear velocities and boundaries of thin layers in a thinly stratified layer," Numer. Anal. Appl., **5**, No. 1, 54–67 (2012).
20. *Dorovsky V. N., Perepechko Yu. V., and Romensky E. I.*, "Wave processes in saturated porous elastically deformed media," Combust. Explos. Shock Waves, **29**, No. 1, 93–103 (1993).
21. *Blokhin A. M. and Dorovsky V. N.*, Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum, Nova Sci. Publ., Inc., New York (1995).
22. *Imomnazarov Kh. Kh.*, "Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium," Appl. Math. Lett., **13**, No. 3, 33–35 (2000).
23. *Imomnazarov Kh.Kh.*, "Numerical modeling of some problems of the theory of filtration for porous media [in Russian]," Sib. Zh. Ind. Mat., **4**, No. 2, 154–165 (2001).
24. *Imomnazarov Kh. Kh. and Kholmurodov A. E.*, "Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media," Math. Comput. Model., **45**, No. 3–4, 270–280 (2007).
25. *Imomnazarov Kh. Kh., Imomnazarov Sh. Kh., Rakhmonov T. T., and Yangiboyev Z. Sh.*, "Regularization in inverse dynamic problems for the equation of SH-waves in a porous medium [in Russian]," Vladikavkaz. Mat. Zh., **15**, No. 2, 45–57 (2013).
26. *Imomnazarov Kh., Kholmuradov A. E., and Dilmuradov N.*, "Direct and inverse dynamic quasilinear problems of poroelasticity," AIP Conf. Proc., **2365**, No. 1, 070020 (2021).
27. *Imomnazarov Kh. Kh., Kholmurodov A. E., and Omonov A. T.*, "Direct and inverse dynamic problem of poroelasticity [in Russian]," Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat., Mekh., No. 75, 87–99 (2022).
28. *Lavrentiev M. A. and Shabat B. V.*, Methods for the Theory of Functions of a Complex Variable [in Russian], Fizmatgiz, Moscow (1958).

Submitted March 15, 2022
Revised April 15, 2022
Accepted May 31, 2022

Kholmatzhon Kh. Imomnazarov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
`imom@omzg.sscc.ru`

Lochin Kh. Khujaev
Karshi Branch of Tashkent University of Information Technologies,
3 km Beshkent Road, Karshi 180100, Uzbekistan
`lochin-x@mail.ru`

Zoyir Sh. Yangiboev
Karshi State University,
17 Kuchabag Street, Karshi 180100, Uzbekistan
`zoyiry@mail.ru`