D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, An initial-boundary value problem with a Venttsel' boundary condition for parabolic equations not in divergence form,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 6, 1–29

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 6

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВЕНТЦЕЛЯ ДЛЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров

Получены априорные оценки градиента решения начально-краевой задачи для квазилинейного недивергентного параболического уравнения со слабо нелинейным граничным условием Вентцеля. С помощью этих оценок доказаны теоремы существования решения указанной задачи в пространствах Соболева и Гёльдера.

В последнее десятилетие активно развивается теория разрешимости краевых задач для квазилинейных уравнений недивергентного вида, описывающих стационарные и нестационарные процессы диффузии частиц в среде.

Описание основных результатов, касающихся первой краевой задачи для равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений, имеющих неограниченные особенности по независимым переменным, приведено О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой в обзоре [1], где имеется также обширная библиография.

В том случае, когда на границе области вместо условия Дирихле задается производная по направлению некоторого векторного поля, трансверсального к поверхности, мы получаем так называемую задачу с наклонной производной, соответствующую диффузии в области с отражением от границы. Для линейной стационарной задачи с наклонной производной Н. С. Надирашвили [2] оценил максимум модуля и гёльдеровские нормы решений, предполагая лишь ограниченность и измеримость как векторного поля, так и коэффициентов уравнения.

В работе [3] Г. Либерман и Н. Трудингер исследовали нелинейную задачу с наклонной производной для полностью нелинейных эллиптических уравнений. В [3] получены все априорные оценки, необходимые для доказательства классической разрешимости задачи, и установлены теоремы существования. Соответствующие результаты для нестационарной задачи были достигнуты А. И. Назаровым и Н. Н. Уральцевой в [4–7]. В публикациях [6–7] помимо классических решений рассматривались также решения из пространств $W_q^{2,1}$ для случаев, когда коэффициенты уравнений имеют суммируемые особенности.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 93-011-1696.

Менее исследована ситуация, когда соответствующее векторное поле может касаться поверхности. Такая вырожденная задача с наклонной производной для слабо нелинейных (линейных относительно производных решения) параболических уравнений изучалась Д. К. Палагачевым [8].

В работах [9–12] Я. Луо и Н. Трудингер исследовали классическую разрешимость стационарной задачи с краевым условием, имеющим вид эллиптического уравнения второго порядка по касательным переменным, которое означает, что в описываемом диффузионном процессе наряду с граничным отражением имеет место и диффузия частиц вдоль границы. Поскольку подобная проблема была поставлена в 1959 г. А. Д. Вентцелем [13], то данное краевое условие было названо условием Вентцеля (см. также работы Н. Икеда и С. Ватанабе [14, 15]).

Настоящая статья продолжает серию работ авторов, посвященную нестационарной задаче Вентцеля (начально-краевой задаче для параболического уравнения с граничным условием, имеющим вид параболического уравнения по касательным переменным). В [16] установлена локальная оценка максимума модуля решения линейной задачи с измеримыми неограниченными коэффициентами, в [17] получены оценки гёльдеровской нормы решения квазилинейной задачи. В данной работе устанавливаются априорные оценки градиента решения и доказывается разрешимость задачи Вентцеля в пространствах Соболева и Гёльдера для случая, когда граничное условие является слабо нелинейным.

Статья разделена на шесть параграфов. В §1 дается постановка задачи и формулируется теорема существования решения в пространстве V_{q+2}. §2 посвящен исследованию линейной задачи Вентцеля. В §3 с использованием результатов для операторов специального вида (см. [18]) и интерполяционных неравенств получены оценки градиента решения задачи Вентцеля. В §4 доказывается теорема существования. §5 посвящен классической разрешимости задачи. В приложении (§6) собраны вспомогательные результаты, касающиеся операторов продолжения.

Ниже используются следующие обозначения: $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$; $(x;t) = (x', x_n; t)$ — точка в $\mathbb{R}^{n+1}$; $(x';t)$ — точка в $\mathbb{R}^n_t$; Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$; $d(x) = \operatorname{dist}\{x; \partial\Omega\}$. $\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}_i(x))$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x. Q — цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$.

$|\Omega|$ ($|Q|$) — мера Лебега соответствующей размерности.

Если $Q = \Omega \times]t^1; t^2[$, то $\partial''Q = \partial\Omega \times]t^1; t^2[$ — боковая граница цилиндра Q, $\partial'Q = \partial''Q \cup \{\overline{\Omega} \times \{t^1\}\}$ — так называемая параболическая граница Q. $\Omega^+(Q^+)$ — часть $\Omega(Q)$, лежащая в полупространстве $x_n > 0$. $\Gamma(\Omega^+)(\Gamma(Q^+))$ — часть $\partial\Omega^+$ (соответственно часть $\partial''Q^+$), расположенная в гиперплоскости $x_n = 0$.

$$B_R(x^0) = \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R \,\} \text{ — шар в } \mathbb{R}^n; \qquad B_R = B_R(0);$$
$$Q_{R,T}(x^0; t^0) = B_R(x^0) \times]t^0 - T; t^0[;$$
$$\Gamma_{R,T}(x^0; t^0) = \Gamma(Q^+_{R,T}(x^0; t^0)).$$
$$Q_R(x^0; t^0) = Q_{R,R^2}(x^0; t^0); \qquad Q_{R,T} = B_R \times]0; T[; \qquad \Gamma_{R,T} = \Gamma(Q^+_{R,T});$$

$$\Sigma'_{R,T} = \partial' Q^+_{R,T} \setminus \Gamma_{R,T}; \qquad \Sigma''_{R,T} = \partial'' Q^+_{R,T} \setminus \Gamma_{R,T}.$$

Всюду в работе индексы i, j изменяются от 1 до n, а индексы k, m — от 1 до $n-1$. По повторяющимся индексам везде предполагается суммирование.

Оператор дифференцирования по переменной x_i обозначим D_i; в частности, $Du = (D_1 u, \dots, D_{n-1}u, D_n u) = (D'u, D_n u)$ — градиент функции u.

δ_i означает касательный дифференциальный оператор на $\partial\Omega$, т.е.

$$\delta_i = D_i - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j D_j;$$

$\delta u = (\delta_i u)$ — проекция градиента u на касательную к $\partial\Omega$ плоскость; в частности, на $\Gamma(Q^+)$ $\delta u = (D'u, 0)$; $u_t = \partial u / \partial t$.

Через $\|\cdot\|_{p,Q}$ обозначается норма в $L_p(Q)$.

$W^{2,1}_p(Q)$ — пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} = \|u_t\|_{p,Q} + \|D(Du)\|_{p,Q} + \|u\|_{p,Q},$$

аналогично, $W^{2,1}_p(\partial'' Q)$ — пространство с нормой

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(\partial'' Q)} = \|u_t\|_{p,\partial'' Q} + \|\delta(\delta u)\|_{p,\partial'' Q} + \|u\|_{p,\partial'' Q};$$

$$V_p(Q) = W^{2,1}_p(Q) \cap W^{2,1}_{p-1}(\partial'' Q),$$

$$\|u\|_{V^{2,1}_p(Q)} = \|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_{p-1}(\partial'' Q)}.$$

$C(\overline{Q})$ — пространство непрерывных функций. Через $\|\cdot\|_Q$ обозначается норма в $C(\overline{Q})$.

$C^\beta(\overline{Q})$, $C^{1+\beta}(\overline{Q})$, $C^{1+\beta}_x(\overline{Q})$, $C^{2+\beta}(\overline{Q})$, $(0 < \beta < 1)$ — пространства Гёльдера с нормами

$$\|u\|_{C^\beta(\overline{Q})} = \|u\|_Q + [u]_{\beta,Q},$$

$$\|u\|_{C^{1+\beta}_x(\overline{Q})} = \|u\|_Q + \|Du\|_Q + [u]_{\beta,Q} + [Du]_{\beta,Q},$$

$$\|u\|_{C^{1+\beta}(\overline{Q})} = \|u\|_{C^{1+\beta}_x(\overline{Q})} + \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t,t'\in]t^1,t^2[}} \frac{|u(x;t) - u(x;t')|}{|t-t'|^{(1+\beta)/2}},$$

$$\|u\|_{C^{2+\beta}(\overline{Q})} = \|u\|_Q + \|D(Du)\|_Q + \|u_t\|_Q + [D(Du)]_{\beta,Q} + [u_t]_{\beta,Q}$$

соответственно, где $[\cdot]_{\beta,Q}$ — постоянная Гёльдера с показателем β (относительно параболического расстояния

$$d_p((x^1;t^1),(x^2;t^2)) = (|x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|^{1/2}).$$

Если $f = f(x;t;z;p)$, то $f_{(u)}(x;t) = f(x;t;u(x;t);Du(x;t))$, аналогично, если $\varphi = \varphi(x;t;z)$, то $\varphi_{(u)}(x;t) = \varphi(x;t;u(x;t))$.

$$g_+ = \max\{g;0\}, \qquad g_- = \max\{-g;0\}.$$
$$\operatorname*{osc}_Q g = \sup_Q g - \inf_Q g.$$

Показатель q может принимать значения $n < q < \infty$.

Различные постоянные обозначаются через C, M, N с индексами или без. Запись $C\ (\dots)$ означает, что C зависит только от параметров, указанных в скобках. Укажем также, что мы не будем отмечать зависимость тех или иных постоянных от n.

§1. Постановка задачи

Изучаются решения квазилинейного параболического уравнения

$$u_t - a^{ij}(x;t;u;Du)D_iD_ju = a(x;t;u;Du) \quad \text{в } Q = \Omega \times]0;T[, \tag{1.1}$$

удовлетворяющие граничному условию

$$u_t - \alpha^{ij}(x;t;u)\delta_i\delta_j u + \beta^i(x;t;u)D_iu = \theta(x;t;u) \quad \text{на } \partial''Q \tag{1.2}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{1.3}$$

Отметим, что (1.2) не является автономным уравнением на боковой поверхности цилиндра Q, так как оно содержит не только касательную, но и нормальную составляющую Du.

Основные требования на функции a^{ij} и a состоят в равномерной параболичности уравнения (1.1), т.е.

$$\forall (x;t) \in Q, \qquad z \in \mathbb{R}^1, \qquad p \in \mathbb{R}^n,$$
$$a^{ij} = a^{ji}, \qquad \nu|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x;t;z;p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2$$
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \nu = \text{const} > 0, \tag{1.4}$$

и выполнении ряда естественных структурных ограничений, а именно

$$\forall (x;t) \in Q, \qquad z \in \mathbb{R}^1, \qquad p \in \mathbb{R}^n:$$

(A1) $|a(x;t;z;p)| \leqslant \mu_1|p|^2 + b(x;t)|p| + \Phi_1(x;t)$, где $\mu_1 = \text{const} > 0$;

(A2) функции $a^{ij}(x;t;z;p)$ имеют производные первого порядка по аргументам x, z, p;

(A3) $\left|\dfrac{\partial a^{ij}(x;t;z;p)}{\partial p_r}\right| \leqslant \mu_2(1+|p|^2)^{-1/2}, \quad \mu_2 = \mathrm{const} > 0;$

(A4) $\left|\dfrac{\partial a^{ij}(x;t;z;p)}{\partial z} p_r + \dfrac{\partial a^{ij}(x;t;z;p)}{\partial x_r}\right| \leqslant \mu_3|p| + \Phi_2(x;t)$, где $\mu_3 = \mathrm{const} > 0$;

(A5) функции b, Φ_1, Φ_2 принадлежат $L_{q+2}(Q)$;

(A6) коэффициенты a^{ij} непрерывны по всем своим аргументам, а функция $a(\cdot;z;p)$ непрерывна по $(z;p)$ как элемент $L_{q+2}(Q)$.

Будем считать, что оператор в левой части условия (1.2) является равномерно параболическим граничным оператором Вентцеля, т.е. $\forall(x;t) \in \partial''Q$, $z \in \mathbb{R}^1$ выполнены условия

$$\begin{gathered} \alpha^{ij} = \alpha^{ji}, \qquad \nu_1|\xi|^2 \leqslant \alpha^{ij}(x;t;z)\xi_i\xi_j \leqslant \nu_1^{-1}|\xi|^2 \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \xi \perp \mathbf{n}(x), \qquad \nu_1 = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$0 \leqslant \beta^i(x;t;z)\mathbf{n}_i(x). \tag{1.6}$$

Кроме того, на коэффициенты граничного оператора также накладываются некоторые структурные ограничения:

(B1)

$$\begin{aligned} &\forall(x;t) \in \partial''Q, \qquad z \in \mathbb{R}^1, \\ &|\beta^i(x;t;z)| \leqslant \beta(x;t), \quad i = 1,\dots,n, \\ &|\theta(x;t;z)| \leqslant \Theta_1(x;t); \end{aligned}$$

(B2) функции β, Θ_1 принадлежат $L_{q+1}(\partial''Q)$;

(B3) функции α^{ij} непрерывны по всем своим аргументам; $\beta^i(\cdot;z)$, $\theta(\cdot;z)$ — непрерывны по z как элементы $L_{q+1}(\partial''Q)$.

Теорема 1.1. *Пусть $\partial\Omega \in W^2_{q+2}$. Предположим также, что функции a^{ij}, a; α^{ij}, β^i, θ удовлетворяют условиям* (1.4)–(1.6), (A1)–(A6), (B1)–(B3).

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.3) *имеет по крайней мере одно решение $u \in V_{q+2}(Q)$.*

§2. Линейная задача Вентцеля

В этом параграфе устанавливается глобальная оценка максимума для решения линейной задачи Вентцеля. Затем, при условии непрерывности старших коэффициентов, оценивается норма решения в пространстве $V_{q+2}(Q)$ и доказывается теорема существования.

Пусть L — линейный параболический оператор:

$$L \equiv \partial/\partial t - a^{ij}(x;t)D_iD_j + b^i(x;t)D_i + c(x;t),$$

$$\forall(x;t) \in Q \qquad a^{ij} = a^{ji}, \quad \nu|\eta|^2 \leqslant a^{ij}\eta_i\eta_j \leqslant \nu^{-1}|\eta|^2 \ \forall\eta \in \mathbb{R}^n, \quad \nu = \mathrm{const} > 0,$$

B — линейный параболический граничный оператор:

$$B \equiv \partial/\partial t - \alpha^{ij}(x;t)\delta_i\delta_j + \beta^i(x;t)D_i + \gamma(x;t),$$
$$\forall(x;t) \in \partial''Q, \quad \alpha^{ij} = \alpha^{ji}, \quad \nu|\eta|^2 \leqslant \alpha^{ij}\eta_i\eta_j \leqslant \nu^{-1}|\eta|^2, \ \forall\eta \in \mathbb{R}^n, \quad \eta \perp \mathbf{n}(x).$$

Теорема 2.1. *Пусть $\partial\Omega \in W^2_{n+1}$, $u \in V_{n+1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ — решение уравнения*

$$Lu(x;t) = f(x;t) \quad \text{в } Q, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее условию

$$Bu(x;t) = \theta(x;t) \quad \text{на } \partial''Q. \tag{2.2}$$

Предположим также, что

$$\forall(x;t) \in \partial''Q, \quad 0 \leqslant \beta^i(x;t)\mathbf{n}_i(x),$$
$$f_+, |\mathbf{b}|, c_- \in L_{n+1}(Q); \quad \theta_+, |\beta|, \gamma_- \in L_n(\partial''Q). \tag{2.3}$$

(здесь $\mathbf{b}(x;t) = ((b^i(x;t))$, аналогично $\beta(x;t) = (\beta^i(x;t)))$.

Тогда справедлива оценка

$$\sup_Q u \leqslant C_1\{\|f_+\|_{n+1,Q} + \|\theta_+\|_{n,\partial''Q} + \sup_\Omega u(\cdot,0)\}, \tag{2.4}$$

где C_1 зависит только от ν, T, $\operatorname{diam}\Omega$, свойств $\partial\Omega$, $\|b^i\|_{n+1,Q}$, $\|\beta^i\|_{n,\partial''Q}$, и от модулей абсолютной непрерывности функций $b^i(x;t)$, $c_-(x;t)$ в $L_{n+1}(Q)$ и функций $\beta^i(x;t)$, $\gamma_-(x;t)$ в $L_n(\partial''Q)$.

Замечание 2.1. Для случая, когда на существенной части боковой поверхности цилиндра Q задается условие Дирихле, аналогичная оценка была установлена в [16].

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия $\partial\Omega \in W^2_{n+1}$ можно произвести распрямление границы $\partial\Omega$ в окрестности произвольной точки $x \in \partial\Omega$ (аналогично п. 2 доказательства теоремы 6.1). Рассуждения, подобные приведенным в §1 [1], показывают, что в новой системе координат будут сохраняться все условия на коэффициенты операторов L, B и правые части уравнений (2.1) и (2.2); „новые“ константы, входящие в эти условия, определяются лишь „старыми“ постоянными и свойствами $\partial\Omega$. В связи с этим мы будем сохранять в новых координатах прежние обозначения. Отметим также, что R — радиус окрестности, в которой будет производиться распрямление границы, — определяется только свойствами $\partial\Omega$, и он может быть выбран одинаковым для всех точек $x \in \partial\Omega$.

Далее, при помощи гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости $t = 0$, „разрежем“ цилиндр Q на s равных частей, причем значение константы s определим позднее. В результате этой операции получим, что

$$\overline{Q} = \bigcup_{p=1}^{s} \overline{Q^{(p)}},$$

где $Q^{(p)} = \Omega \times]T_{p-1}, T_p[$, $T_0 = 0$, $T_p = pT/s$.

Рассмотрим сначала цилиндр $Q^{(1)} = \Omega \times]0; T^1[$. Возьмем точку $(x^0; t^0) \in \partial'' Q^{(1)}$ такую, что

$$\sup_{\partial'' Q^{(1)}} u = u(x^0; t^0),$$

и произведем описанное выше распрямление границы $\partial\Omega$ в окрестности точки x^0.

Возьмем в новой системе координат цилиндр $Q^+_{R,T_1} \subset Q^{(1)}$. Заметим также, что на Γ_{R,T_1} уравнение (2.2) примет вид

$$u_t - \alpha^{km}(x;t) D_k D_m u + \beta^i(x;t) D_i u + \gamma(x;t) u = \theta(x;t), \tag{2.5}$$

причем в силу (2.3)

$$\beta^n(x;t) \leqslant 0 \quad \text{при } (x;t) \in \Gamma_{R,T_1}.$$

Введем срезающую функцию $\xi = \xi(x)$ такую, что

$$\begin{gathered} \xi \in C^\infty(\overline{B^+_R}), \quad 1 \leqslant \xi \leqslant 5 \text{ в } \overline{B^+_R}, \\ \xi(0) = 5, \ \ \xi(x) = 1 \quad \text{на } \partial B^+_R \setminus \Gamma(B^+_R). \end{gathered}$$

Рассмотрим функцию

$$v(x;t) = (u(x;t)\xi(x)) \exp\{-\varkappa t\},$$

где положительный параметр k будет определен позднее.

Воспользовавшись равенствами (2.1) и (2.5), нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \widetilde{L} v &\equiv v_t - a^{ij}(x;t) D_i D_j v + \widetilde{b}^i(x;t) D_i v \\ &= f(x;t)\xi(x)\exp\{-\varkappa t\} + \varkappa v - \widetilde{c}(x;t) v \quad \text{в } Q^+_{R,T_1}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B} v &\equiv v_t - \alpha^{km}(x;t) D_k D_m v + \widetilde{\beta}^m(x;t) D_m v + \beta^n(x;t) D_n v \\ &= \theta(x;t)\xi(x)\exp\{-\varkappa t\} + \varkappa v - \widetilde{\gamma}(x;t) v \quad \text{на } \Gamma_{R,T_1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}^i(x;t) &= b^i(x;t) + \frac{2a^{ij}(x;t)D_j\xi}{\xi},\\
\widetilde{c}(x;t) &= c(x;t) + \frac{a^{ij}(x;t)D_iD_j\xi}{\xi} - \frac{2a^{ij}(x;t)D_i\xi D_j\xi}{\xi^2}\\
&\quad - \frac{b^i(x;t)D_i\xi}{\xi},\\
\widetilde{\beta}^m(x;t) &= \beta^m(x;t) + \frac{2\alpha^{km}(x;t)D_k\xi}{},\\
\widetilde{\gamma}(x;t) &= \gamma(x;t) + \frac{\alpha^{km}(x;t)D_kD_m\xi}{\xi} - \frac{2\alpha^{km}(x;t)D_k\xi D_m\xi}{\xi^2}\\
&\quad - \frac{\beta^i(x;t)D_i\xi}{\xi}.
\end{aligned}$$

Применив к функции v в цилиндре Q^+_{R,T_1} теорему 1 [16], получим оценку

$$\begin{aligned}
\sup_{Q^+_{R,T_1}} v &\leqslant N_1\{\|(\widetilde{L}v)_+\|_{n+1,Q^+_{R,T_1}} + \|(\widetilde{B}v)_+\|_{n,\Gamma_{R,T_1}}\} + \sup_{\Sigma'_{R,T_1}} v\\
&\leqslant N_1\Big\{\|(f\xi\exp\{-\varkappa t\})_+\|_{n+1,Q^+_{R,T_1}} + \|(\widetilde{c}-\varkappa)_-\|_{n+1,Q^+_{R,T_1}} \sup_{Q^+_{R,T_1}} v\\
&\quad + \|(\theta\xi\exp\{-\varkappa t\})_+\|_{n,\Gamma_{R,T_1}} + \|(\widetilde{\gamma}-\varkappa)_-\|_{n,\Gamma_{R,T_1}} \sup_{Q^+_{R,T_1}} v\Big\} + \sup_{\Sigma'_{R,T_1}} v,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $N_1 = N_0R^{(n-1)/n}$, N_0 — константа из теоремы 1 [16], зависящая только от ν, $R^{-1/(n+1)}\|\widetilde{\mathbf{b}}\|_{n+1,Q^+_{R,T_1}}$, $R^{-1/n}\|\widetilde{\beta}\|_{n,\Gamma_{R,T_1}}$. (Здесь $\widetilde{\mathbf{b}}(x;t) = (\widetilde{b}^i(x;t))$, $\widetilde{\beta}(x;t) = (\beta^i(x;t))$).

Выберем теперь $\varkappa > 0$ так, чтобы

$$N_1\{\|(\widetilde{c}-\varkappa)_-\|_{n+1,Q^+_{R,T_1}} + \|(\widetilde{\gamma}-\varkappa)_-\|_{n,\Gamma_{R,T_1}}\} \leqslant 5^{-1}.$$

(Заметим, что $\varkappa$ зависит только от величин, приведенных в условии теоремы).

Тогда соотношение (2.8) примет вид

$$\sup_{Q^+_{R,T_1}} v \leqslant (5/4)N_1\{\|(f\xi)_+\|_{n+1,Q^+_{R,T_1}} + \|(\theta\xi)_+\|_{n,\Gamma_{R,T_1}}\} + (5/4)\sup_{\Sigma'_{R,T_1}} (u\xi),$$

и, следовательно, в силу выбора ξ

$$\begin{aligned}
\sup_{Q^+_{R,T_1}} u &\leqslant (5/4)\exp\{\varkappa T_1\}\\
&\quad \times \{5N_1[\|f_+\|_{n+1,Q^+_{R,T_1}} + \|\theta_+\|_{n,\Gamma_{R,T_1}}] + 5\sup_{\Omega} u(\cdot;0) + \sup_{\Sigma''_{R,T_1}} u\}.
\end{aligned}$$

Взяв последнее неравенство в точке $(0; t^0)$ и учтя, что $\xi(0) = 5$, для $u(0; t^0) = \sup_{\partial'' Q^{(1)}} u$, получим

$$\sup_{\partial'' Q^{(1)}} u \leqslant (5/4)\exp\{\varkappa T_1\}\{N_1[\|f_+\|_{n+1,Q} + \|\theta_+\|_{n,\partial'' Q}] + \sup_\Omega u(\cdot; 0)\}$$
$$+ (1/4)\exp\{\varkappa T_1\} \sup_{\Sigma''_{R,T_1}} u. \tag{2.9}$$

Далее, применяя к функции u в цилиндре Q теорему 4 [19], получим

$$\sup_{Q^{(1)}} u \leqslant 2\exp\{\lambda T_1\}[\sup_{\partial'' Q^{(1)}} u + \sup_\Omega u(\cdot; 0) + N_2\|f_+\|_{n+1,Q^{(1)}}], \tag{2.10}$$

где $N_2 = N_2(\nu, \operatorname{diam}\Omega, \|\mathbf{b}\|_{n+1,Q^{(1)}})$, а λ выбрано из условия

$$N_2\|(c-\lambda)_-\|_{n+1,Q^{(1)}} \leqslant 2^{-1}$$

и так же, как и $\varkappa$, контролируется известными величинами.

Подставив затем в правую часть (2.10) мажоранту для $\sup_{\partial'' Q^{(1)}} u$ из (2.9) и заметив, что $\sup_{\Sigma''_{R,T_1}} u \leqslant \sup_{Q^{(1)}} u$, имеем

$$\begin{aligned}\sup_{Q^{(1)}} u &\leqslant 2\exp\{\lambda T_1\}\\ &\quad\times \Big[(1 + (5/4)\exp\{\varkappa T_1\})\sup_\Omega u(\cdot; 0)\\ &\qquad + ((5/4)N_1\exp\{\varkappa T_1\} + N_2)\|f_+\|_{n+1,Q} + (5/4)N_1\exp\{\varkappa T_1\}\|\theta_+\|_{n,\partial'' Q}\Big]\\ &\quad + 2^{-1}\exp\{(\varkappa + \lambda)T_1\}\sup_{Q^{(1)}} u.\end{aligned}$$

Отсюда, выбрав s, а, следовательно, и T_1 так, чтобы

$$\exp\{(\varkappa + \lambda)T_1\} \leqslant 3/2,$$

приходим к оценке

$$\sup_{Q^{(1)}} u \leqslant N_3\{\sup_\Omega u(\cdot; 0) + \|f_+\|_{n+1,Q} + \|\theta_+\|_{n,\partial'' Q}\}, \tag{2.11}$$

где

$$N_3 = 10\exp\{\lambda T_1\}\max\{(1 + \exp\{\varkappa T_1\}); (\exp\{\varkappa T_1\}N_1 + N_2)\}.$$

Рассмотрим теперь цилиндр $Q^{(2)}$. Повторив в нем все рассуждения, проведенные в цилиндре $Q^{(1)}$, получим неравенство

$$\sup_{Q^{(2)}} u \leqslant N_3[\sup_\Omega u(\cdot; T_1) + \|f_+\|_{n+1,Q} + \|\theta_+\|_{n,\partial'' Q}],$$

которое с учетом (2.11) примет вид

$$\sup_{Q^{(2)}} u \leqslant N_3(N_3+1)\{\sup_{\Omega} u(\cdot;0) + \|f_+\|_{n+1,Q} + \|\theta_+\|_{n,\partial''Q}\}.$$

Аналогично для $p = 3, \ldots, s$ имеем

$$\sup_{Q^{(p)}} u \leqslant N_3(N_3+1)^{p-1}\{\sup_{\Omega} u(\cdot;0) + \|f_+\|_{n+1,Q} + \|\theta_+\|_{n,\partial''Q}\}.$$

В итоге, положив $C_1 = N_3(N_3+1)^{s-1}$, получим (2.4). •

Теорема 2.2. *Пусть $\partial\Omega \in W^2_{q+2}$. Предположим также, что в цилиндре Q определена функция $u \in V_{q+2}(Q)$, являющаяся решением задачи* (2.1), (2.2), (1.3).

Если вдобавок

$$a^{ij} \in C(\overline{Q}), \quad \alpha^{ij} \in C(\overline{\partial''Q}); \ f, |\mathbf{b}|, c \in L_{q+2}(Q); \ \theta, |\beta|, \gamma \in L_{q+1}(\partial''Q), \tag{2.12}$$

то

$$\|u\|_{V_{q+2}(Q)} \leqslant C_2\{\|f\|_{q+2,Q} + \|\theta\|_{q+1,\partial''Q}\}, \tag{2.13}$$

где C_2 зависит только от ν, q, T, $\operatorname{diam}\Omega$, свойств $\partial\Omega$, $\|b^i\|_{q+2,Q}$, $\|c\|_{q+2,Q}$, $\|\beta^i\|_{q+1,\partial''Q}$, $\|\gamma\|_{q+1,\partial''Q}$ и от модулей непрерывности коэффициентов $a^{ij}(x;t)$ в $C(\overline{Q})$, $\alpha^{ij}(x;t)$ в $C(\overline{\partial''Q})$.

Доказательство. Перепишем граничное условие (2.2) в виде

$$\begin{aligned} Bu &\equiv u_t - \alpha^{ij}(x;t)\delta_i\delta_j u + \beta^i(x;t)\delta_i u + \gamma(x;t)u \\ &= \theta(x;t) + \beta_0(x;t)\partial u/\partial\mathbf{n} \equiv \theta_1(x;t) \quad \text{на } \partial''Q, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$\beta_0(x;t) = -\beta^j(x;t)\mathbf{n}_j(x), \qquad \partial u/\partial\mathbf{n} \text{ — производная по нормали.}$$

Так же, как и в теореме 2.1, „разрежем“ цилиндр Q на s' равных частей, причем значение константы s' определим позднее.

Рассмотрим (2.14) как параболическое уравнение на $\partial''Q^{(1)}$. Известно (см. §10 гл. IV [21]), что для решения u этого уравнения, удовлетворяющего нулевому начальному условию, справедливо неравенство

$$\|u\|_{W^{2,1}_{q+1}(\partial''Q^{(1)})} \leqslant N_4\{\|\theta_1\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}} + \|u\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}}\},$$

здесь N_4 определяется значениями ν, q, $\|\beta^i\|_{q+1,\partial''Q}$, $\|\gamma\|_{q+1,\partial''Q}$ и мажорантой модулей непрерывности $\alpha^{ij}(x;t)$ в $C(\overline{\partial''Q})$.

Учитывая (2.14), перепишем последнее неравенство в виде

$$\|u\|_{W^{2,1}_{q+1}(\partial''Q^{(1)})} \leqslant N_4\{\|\theta\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}} + \|\beta_0\|_{q+1,\partial''Q}\|Du\|_{\partial''Q^{(1)}} + \|u\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}}\} \quad (2.15)$$

и рассмотрим в $Q^{(1)}$ функцию

$$v(x;t) = u(x;t) - \widetilde{u}(x;t), \quad (2.16)$$

где $\widetilde{u} = \Pi(u|_{\partial''Q^{(1)}})$, Π — оператор продолжения из теоремы 6.1. Из замечания к теореме 6.1 видно, что v является решением начально-краевой задачи

$$Lv = f - L\widetilde{u} \quad \text{в } Q^{(1)}, \quad v|_{\partial'Q^{(1)}} = 0. \quad (2.17)$$

Как известно, для решения задачи (2.17) выполнена оценка

$$\|v\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q^{(1)})} \leqslant N_5\{\|(f - L\widetilde{u})\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|v\|_{q+2,Q^{(1)}}\},$$

где константа N_5 определяется значениями ν, q, свойствами $\partial\Omega$, $\|b^i\|_{q+2,Q}$, $\|c\|_{q+2,Q}$ и мажорантой модулей непрерывности $a^{ij}(x;t)$ в $C(\overline{Q})$.

С учетом (2.16) преобразуем полученное неравенство следующим образом:

$$\|u\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q^{(1)})} \leqslant N_6\{\|f\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|\widetilde{u}\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q^{(1)})} + \|u\|_{q+2,Q^{(1)}}\}, \quad (2.18)$$

здесь N_6 зависит от тех же величин, что и N_5.

Объединяя (2.18), (6.1) и (2.15), имеем

$$\|u\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q^{(1)})} \leqslant N_7\{\|f\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|\theta\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}} + \|\beta_0\|_{q+1,\partial''Q}\|Du\|_{\partial''Q^{(1)}} + \|u\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|u\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}}\}, \quad (2.19)$$

где $N_7 = N_6(1 + \widehat{N}_1 N_4)$, $\widehat{N}_1$ — константа из теоремы 6.1.

Воспользовавшись теперь интерполяционным неравенством (лемма 3.3 [21])

$$\|Du\|_{Q^{(1)}} \leqslant \varepsilon\|u\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q^{(1)})} + N_8\varepsilon^{-(q+n+4)/(q-n)}\|u\|_{q+2,Q^{(1)}}$$

(N_8 зависит от q, T, $\operatorname{diam}\Omega$ и свойств $\partial\Omega$) при $\varepsilon = (2N_7\|\beta_0\|_{q+1,\partial''Q})^{-1}$, получим оценку

$$\|Du\|_{Q^{(1)}} \leqslant N_9\{\|f\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|\theta\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}} + \|u\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|u\|_{q+1,\partial''Q^{(1)}}\}, \quad (2.20)$$

здесь

$$N_9 = (\|\beta_0\|_{q+1,\partial''Q})^{-1} + 2N_8(2N_7\|\beta_0\|_{q+1,\partial''Q})^{(q+n+4)/(q-n)}.$$

Подставив теперь (2.20) в правые части неравенств (2.19) и (2.15), приходим к оценке

$$\begin{aligned}\|u\|_{V_{q+2}(Q^{(1)})} &= \|u\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q^{(1)})} + \|u\|_{W^{2,1}_{q+1}(\partial'' Q^{(1)})} \\ &\leqslant N_{10}\{\|f\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|\theta\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}} + \|u\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|u\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}}\},\end{aligned} \tag{2.21}$$

где $N_{10} = (N_4 + N_7)(1 + N_9\|\beta_0\|_{q+1}, \partial'' Q)$.

Теорема вложения (теорема 10.4 [20]) с учетом (2.21) приводит к неравенству

$$\begin{aligned}\|u\|Q^{(1)} \leqslant N_{11}N_{10}\{&\|f\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|\theta\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}} \\ &+ \|u\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|u\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}}\},\end{aligned} \tag{2.22}$$

здесь N_{11} — константа из теоремы вложения, зависящая только от q, $\operatorname{diam}\Omega$ и свойств $\partial\Omega$.

Заметив, что

$$\begin{aligned}\|u\|_{q+2,Q^{(1)}} &\leqslant [T/s']^{1/(q+2)}|\Omega|^{1/(q+2)}\|u\|_{Q^{(1)}}, \\ \|u\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}} &\leqslant [T/s']^{1/(q+1)}|\partial\Omega|^{1/(q+1)}\|u\|_{Q^{(1)}},\end{aligned} \tag{2.23}$$

при достаточно большом s' из (2.22) имеем

$$\|u\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|u\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}} \leqslant \|f\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|\theta\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}}.$$

Подставив это неравенство в (2.23), получим

$$\|u\|_{V_{q+2,(Q^{(1)})}} \leqslant \widetilde{C}_1\{\|f\|_{q+2,Q^{(1)}} + \|\theta\|_{q+1,\partial'' Q^{(1)}}, \tag{2.24}$$

где $\widetilde{C}_1 = 2N_{10}$ — константа, зависящая только от величин, приведенных в условии теоремы.

Рассмотрим в цилиндре $Q^{(2)}$ функцию

$$\widetilde{v}(x;t) = u(x;t) - u(x; 2T/s' - t).$$

Поскольку $\widetilde{v}\big|_{t=T/s'} = 0$, к функции $\widetilde{v}$ применимы предыдущие рассуждения (с заменой $Q^{(1)}$ на $Q^{(2)}$).

В результате получаем

$$\begin{aligned}\|\widetilde{v}\|_{V_{q+2}(Q^{(2)})} &\leqslant N_{12}\{\|L\widetilde{v}\|_{q+2,Q^{(2)}} + \|B\widetilde{v}\|_{q+1,\partial''(Q^{(2)}}\} \\ &\leqslant N_{13}\{\|f\|_{q+2,Q^{(2)}} + \|\theta\|_{q+1,\partial'' Q^{(2)}} + \|u\|_{V_{q+2}(Q^{(1)})}\},\end{aligned}$$

здесь N_{12} и N_{13} — константы, зависящие только от известных величин.

Отсюда в силу неравенства (2.24) имеем

$$\|u\|_{V_{q+2}(Q^{(2)})} \leqslant \widetilde{C}_2\{\|f\|_{q+2,Q} + \|\theta\|_{q+1,\partial''Q}\},$$

где $\widetilde{C}_2 = N_{13}(1 + \widetilde{C}_1)$.

Аналогично для $p = 1, \dots, s'$, получим

$$\|u\|_{V_{q+2}(Q^{(p)})} \leqslant \widetilde{C}_p\{\|f\|_{q+2,Q} + \|\theta\|_{q+1,\partial''Q}\},$$

здесь $\widetilde{C}_p$ зависят только от величин, приведенных в условии теоремы.

Положив теперь $C_2 = \sum\limits_{p=1}^{s'} \widetilde{C}_p$, приходим к (2.13). •

Теорема 2.3. *Пусть* $\partial\Omega \in W^2_{q+2}$. *Если коэффициенты операторов* L, B *и функции* f, θ *удовлетворяют условиям* (2.12), *то начально-краевая задача* (2.1), (2.2), (1.3) *имеет единственное решение* $u \in V_{q+2}(Q)$.

Доказательство. Положим $\widetilde{B} \equiv \partial/\partial t - \delta_i\delta_i$ и рассмотрим семейство задач

$$\begin{cases} L_\tau u \equiv Lu = f & \text{в } Q, \\ B_\tau u \equiv \tau Bu + (1-\tau)\widetilde{B}u = \theta & \text{на } \partial''Q, \\ u\big|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \tag{2.25}$$

Очевидно, что при всех $\tau \in [0;1]$ операторы L_τ, B_τ являются равномерно параболическими с константой ν, и их коэффициенты удовлетворяют условиям (2.12) равномерно по τ.

Теорема 2.2 показывает, что для решения $u^{(\tau)}$ задачи (2.25) справедлива оценка

$$\|u^{(\tau)}\|_{V_{q+2}(Q)} \leqslant C_2\{\|f\|_{q+2,Q} + \|\theta\|_{q+1,\partial''Q}\}.$$

Метод продолжения по параметру сводит теперь доказательство теоремы к вопросу о разрешимости задачи

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } Q, \\ \widetilde{B}u = \theta & \text{на } \partial''Q, \\ u\big|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega, \end{cases} \tag{2.26}$$

в которой граничное условие является автономным параболическим уравнением на $\partial''\Omega$.

Известно, что задача Коши для этого уравнения

$$\widetilde{B}v = \theta \quad \text{на} \quad \partial''Q, \qquad v\big|_{t=0} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

имеет единственное решение $v \in W^{2,1}_{q+1}(\partial'' Q)$. Как указывалось в теореме 2.2, функция V допускает продолжение в цилиндр Q как функция класса $W^{2,1}_{q+1}(Q)$. Поэтому задача Дирихле

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } Q, \\ u = v & \text{на } \partial'' Q, \\ u\big|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega \end{cases}$$

имеет единственное решение $u \in W^{2,1}_{q+2}(Q)$.

Построенная функция u, очевидно, принадлежит $V_{q+2}(Q)$ и является решением задачи (2.26), что и завершает доказательство теоремы. •

§3. Оценка $|Du|$ для решений нелинейной задачи

Прежде чем приступить к получению оценок градиента на границе, сформулируем вспомогательное утверждение, касающееся внутренних оценок градиента решения параболического уравнения.

Лемма 3.1. *Пусть функция* $u \in W^{2,1}_{q+2}(Q)$ *удовлетворяет* (1.1),

$$\|u\|_Q \leqslant M_0,$$

и условия (1.4), (A1)–(A5) *выполнены при* $|z| \leqslant M_0$.

Тогда существует $\lambda = \lambda(\nu, q, \mu_2) > 0$ *такое, что если цилиндр* $Q_\rho(x;t)$ *не пересекает* $\partial'' Q$ *и*

$$\omega(\rho) = \operatorname*{osc}_{Q_\rho(x;t)\cap Q} u \leqslant \omega_0,$$

то

$$|Du(x;t)| \leqslant C_3 \rho^{-1} [\omega(\rho)]^\lambda + \sup_{Q_\rho(x;t)\cap\{t=0\}} |Du|, \tag{3.1}$$

где положительные константы C_3 *и* ω_0 *определяются значениями* ν, q, μ_1, μ_2, μ_3, $\|b\|_{q+2,Q}$, $\|\Phi_1\|_{q+2,Q}$, $\|\Phi_2\|_{q+2,Q}$.

Доказательство. Неравенство (3.1) фактически доказано в теореме 3.1 [22] (при $b = 0$; случай $b \in L_{q+2}(Q)$ рассcматривается аналогично); достаточно выписать зависимость от ρ константы C в указанной теореме.

Теорема 3.1. *Пусть* $\partial\Omega \in W^2_{q+2}$, *и пусть* u *есть решение задачи* (1.1)–(1.3), *принадлежащее* $V_{q+2}(Q)$,

$$\|u\|_Q \leqslant M_0.$$

Предположим также, что при $|z| \leqslant M_0$ *выполнены условия* (1.4)–(1.6), (A1)–(A5), (B1)–(B3).

Тогда имеют место оценки

$$\|Du\|_{\partial''Q} \leqslant C_4, \quad [Du]_{\gamma,\partial''Q} \leqslant C_5, \quad \|u\|_{W^{2,1}_{q+1}}(\partial''Q) \leqslant C_6, \tag{3.2}$$

где $\gamma = \gamma(\nu, \nu_1, q, \mu_2, \partial\Omega) \in]0;1[$, *а константы* C_4–C_6 *зависят от тех же параметров, что и* γ, *а также от* $\operatorname{diam}\Omega$, T, μ_1, μ_3, $\|b\|_{q+2,Q}$, $\|\Phi_1\|_{q+2,Q}$, $\|\Phi_2\|_{q+2,Q}$, $\|\beta\|_{q+1,\partial''Q}$, $\|\Theta_1\|_{q+1,\partial''Q}$, M_0, *и от модулей непрерывности* $\alpha^{ij}(x;t;u)$ *в* $C(\mathrm{m}_1)$ (*здесь* $\mathrm{m}_1 = \{(x;t;u) : x \in \partial\Omega,\ t \in [0;T],\ |u| \leqslant M_0\}$).

Доказательство. Рассмотрим $u(x;t)$ как решение линейного уравнения в цилиндре Q

$$u_t - a^{ij}_{(u)}(x;t)D_iD_ju = a_{(u)}(x;t), \tag{3.3}$$

удовлетворяющее линейному граничному условию

$$u_t - \alpha^{ij}_{(u)}(x;t)\delta_i\delta_ju + \beta^i_{(u)}(x;t)D_iu = \theta_{(u)}(x;t) \quad \text{на} \quad \partial''Q \tag{3.4}$$

и начальному условию (1.3).

В работе [17] установлена оценка

$$\omega(\rho) \leqslant N_{14}\rho^{\lambda_1}, \tag{3.5}$$

где $\lambda_1 = \lambda_1(\nu, \nu_1, \partial\Omega) \in]0;1[$, а константа N_{14} определяется известными величинами, приведенными в условии теоремы. Заметим, кстати, что отсюда следует непрерывность функций $\alpha^{ij}_{(u)}$ по $(x;t)$.

Из неравенства (3.1) с учетом (1.3) имеем

$$|Du(x;t)| \leqslant N_{15}(d(x))^{\gamma_1-1} \quad \text{в} \quad Q,$$

где $\gamma_1 = \lambda\lambda_1$, $N_{15} = C_3N_{14}$. Не умаляя общности, можно считать

$$\gamma_1 < 1 - (n+1)/(q+1).$$

С помощью последнего неравенства преобразуем условие (A1) следующим образом:

$$|a_{(u)}(x;t)| \leqslant [b(x;t) + \widehat{b}(x)]|Du| + \Phi_1(x;t), \tag{3.6}$$

здесь $\widehat{b}(x) \equiv \mu_1 N_{15}(d(x))^{\gamma_1-1}$. Положим

$$\begin{aligned} b^i_1(x;t) &= -\operatorname{sign}(a_{(u)}(x;t))[b(x;t)/(b(x;t)+\widehat{b}(x))] \\ &\quad\times \min\{|a_{(u)}(x;t)|/|Du|;\, b(x;t)+\widehat{b}(x)\} \cdot D_iu/|Du|, \\ b^i_2(x;t) &= -\operatorname{sign}(a_{(u)}(x;t))[\widehat{b}(x)/(b(x;t)+\widehat{b}(x))] \\ &\quad\times \min\{|a_{(u)}(x;t)|/|Du|;\, b(x;t)+\widehat{b}(x)\} \cdot D_iu/|Du| \end{aligned}$$

(если $|Du| = 0$, то будем считать $b_1^i = b_2^i = 0$).

Очевидно, что при таком выборе функций $b_1^i(x;t)$, $b_2^i(x;t)$ справедливы утверждения

$$|\mathbf{b}_1(x;t)| \leqslant b(x;t), \qquad |\mathbf{b}_2(x;t)| \leqslant F(d(x))^{\gamma_1 - 1} \quad \text{в} \quad Q \tag{3.7}$$

(здесь $\mathbf{b}_h(x;t) = (b_h^i(x;t))$, $h = 1,2$; $F = \mu_1 N_{15}$).

Рассмотрим в цилиндре Q линейный оператор

$$L \equiv \partial/\partial t - a_{(u)}^{ij}(x;t)D_iD_j + [b_1^i(x;t) + b_2^i(x;t)]D_i.$$

Учитывая (3.3) и (3.6), легко убедиться, что

$$|Lu| \leqslant \Phi_1(x;t) \quad \text{в} \quad Q. \tag{3.8}$$

Займемся теперь изучением граничного условия (3.4), переписав его в виде

$$\begin{aligned} Bu &\equiv u_t - \alpha_{(u)}^{ij}(x;t)\delta_i\delta_j u + \beta_{(u)}^i(x;t)\delta_i u \\ &= \theta_{(u)}(x;t) + \widehat{\beta}_{(u)}(x;t)\partial u/\partial \mathbf{n} \quad \text{на} \quad \partial''Q, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\widehat{\beta}_{(u)}(x;t) = -\beta_{(u)}^j(x;t)\mathbf{n}_j(x)$, $\partial u/\partial \mathbf{n}$ — производная по нормали.

Так же, как и в теореме 2.2, рассмотрим (3.9) как автономное параболическое уравнение на $\partial''Q$ и установим для его решения, удовлетворяющего нулевому начальному условию, оценку

$$\|u\|_{W_{q+1}^{2,1}(\partial''Q)} \leqslant N_{16}\{\|\theta_{(u)}\|_{q+1,\partial''Q} + \|\widehat{\beta}_{(u)}\|_{q+1,\partial''Q}\|\partial u/\partial \mathbf{n}\|_{\partial''Q} + \|u\|_{q+1,\partial''Q}\} \tag{3.10}$$

с константой N_{16}, зависящей только от ν, q, $\|\beta_{(u)}^i\|_{q+1,\partial''Q}$, и мажоранты модулей непрерывности $\alpha_{(u)}^{ij}(x;t)$ в $C(\overline{\partial''Q})$.

В силу условия $\gamma_1 < 1 - (n+1)/(q+1)$, $u \in C^{1+\gamma_1}(\overline{\partial''Q})$ и справедливо интерполяционное неравенство (лемма 3.3 гл. II [21]): для любого $\varepsilon > 0$

$$\|u\|_{C^{1+\gamma_1}(\overline{\partial''Q})} \leqslant \varepsilon\|u\|_{W_{q+1}^{2,1}(\partial''Q)} + N_{17}(\varepsilon)\|u\|_{q+1,\partial''Q} \tag{3.11}$$

(N_{17} зависит также от γ_1, q, T и свойств $\partial\Omega$).

Положим $\widetilde{u} = \xi\Pi_2(u\big|_{\partial''Q})$, где Π_2 — оператор продолжения из теоремы 6.2, а $\xi(x)$ — бесконечно гладкая срезающая функция, равная единице при $d(x) < r_0/4$ и нулю при $d(x) > r_0/2$ (r_0 — константа из теоремы 6.2).

Продолжим функцию $\widetilde{u}$ с приграничной полоски нулем на Q и положим

$$v(x;t) = u(x;t) - \widetilde{u}(x;t).$$

Очевидно, что $v\big|_{\partial' Q} = 0$. Далее,

$$|Lv| \leqslant |Lu| + |L\widetilde{u}| \leqslant \Phi_1(x;t) + |\widetilde{u}_t| + |a^{ij}_{(u)}(x;t)D_iD_j\widetilde{u}| + [|\mathbf{b}_1(x;t)| + |\mathbf{b}_2(x;t)|]|D\widetilde{u}|.$$

Используя неравенства (6.8)–(6.11) и (3.7), получаем

$$|Lv| \leqslant \Phi(x;t) + H[d(x)]^{\gamma_1 - 1} \quad \text{в} \quad Q, \tag{3.12}$$
$$\Phi \in L_{q+2}(Q),$$
$$\|\Phi\|_{q+2,Q} \leqslant \|\Phi_1\|_{q+2,Q} + N_{18}\|u\|_{C^{1+\gamma_1}(\overline{\partial'' Q})}[\nu^{-1} + \|b\|_{q+2,Q}],$$
$$H = N_{18}\|u\|_{C^{1+\gamma_1}(\overline{\partial'' Q})}[1 + \nu^{-1} + F], \tag{3.13}$$

где N_{18} — константа, зависящая от свойств $\partial\Omega$, F — константа из (3.7).

Неравенства (3.7), (3.12) и соотношение $v\big|_{\partial' Q} = 0$ показывают, что к функции v применима теорема 2 [18]. Поэтому

$$\|Dv\|_{\partial'' Q} \leqslant N_{19}[1 + \|\Phi\|_{q+2,Q} + H], \tag{3.14}$$

где N_{19} определяется значениями ν, q, γ_1, F, $\|b\|_{q+2,Q}$, $\|v\|_Q$, T и свойствами $\partial\Omega$.

Из соотношения (6.5) имеем

$$\|\widetilde{u}\|_Q \leqslant \|u\|_{\partial'' Q} \leqslant M_0.$$

Поэтому

$$\|v\|_Q \leqslant 2M_0.$$

Далее, неравенства (6.8), (3.14) и (3.13) дают

$$\|Du\|_{\partial'' Q} \leqslant \|D\widetilde{u}\|_{\partial'' Q} + \|Dv\|_{\partial'' Q} \leqslant N_{20} + N_{21}\|u\|_{C^{1+\gamma_1}(\overline{\partial'' Q})}, \tag{3.15}$$

где

$$N_{20} = N_{19}(1 + \|\Phi_1\|_{q+2,Q}),$$
$$N_{21} = \widehat{N}_3 + N_{19}N_{18}(1 + 2\nu^{-1} + F + \|b\|_{q+2,Q}),$$
$$\widehat{N}_3 \text{ — константа из теоремы 6.2.}$$

Положим $M_1 = \|\partial u/\partial \mathbf{n}\|_{\partial'' Q}$. Тогда, применяя последовательно неравенства (3.15), (3.11), (3.10), получаем

$$M_1 \leqslant \|Du\|_{\partial'' Q} \leqslant \varepsilon N_{22} M_1 + N_{23}(\varepsilon), \tag{3.16}$$

где

$$N_{22} = N_{21}N_{16}\|\widehat{\beta}_{(u)}\|_{q+1,\partial''Q},$$
$$N_{23}(\varepsilon) = N_{20} + \varepsilon N_{21}N_{16}\|\theta_{(u)}\|_{q+1,\partial''Q} + (\varepsilon N_{16} + N_{17}(\varepsilon))\|u\|_{q+1,\partial''Q}.$$

Положив $\varepsilon = (2N_{22})^{-1}$, с учетом условий (B1), (B2) и неравенства

$$\|u\|_{q+1,\partial''Q} \leqslant T^{1/(q+1)}|\partial\Omega|^{1/(q+1)}M_0,$$

мы оценим M_1 через величины, указанные в условии теоремы. Первая из оценок (3.2) следует теперь из (3.16), третья — из (3.10).

Для доказательства второй оценки в (3.2) применим к функции v теорему 3 [18]. С учетом неравенств (3.12), (3.13), (3.11) и третьей оценки в (3.2) получим соотношение

$$[Dv]_{\gamma,\partial''Q} \leqslant N_{24},$$

где γ зависит только от ν, q, γ_1 и свойств $\partial\Omega$ (не умаляя общности, можно считать $\gamma \leqslant \gamma_1$), а N_{24} определяется известными величинами.

Теперь остается записать неравенство

$$[Du]_{\gamma,\partial''Q} \leqslant [D\widetilde{u}]_{\gamma,\partial''Q} + [Dv]_{\gamma,\partial''Q}$$

и оценить первое слагаемое в правой части с помощью (6.8), (3.11) и третьей оценки в (3.2). •

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.

Если вдобавок функции $a^{ij} \in C(\mathbf{m}_2)$, *где* $\mathbf{m}_2 = \{(x;t;z;p) : x \in \overline{\Omega},\ t \in [0;T],\ |z| \leqslant M_0, p \in \mathbb{R}^n\}$, *то справедлива оценка*

$$\|u\|_{V_{q+2}(Q)} \leqslant C_7, \tag{3.17}$$

где C_7 *определяется теми же величинами, что и константы* C_4–C_6 *из теоремы* 3.1, *а также модулями абсолютной непрерывности функций* a^{ij} *в* $C(\mathbf{m}_2)$.

Доказательство. Оценка $\|u\|_{W^{2,1}_{q+1}(\partial''Q)}$ уже установлена в теореме 3.1. Для получения оценки $\|u\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q)}$ положим

$$\widetilde{\widetilde{u}} = \Pi(u|_{\partial''Q}),$$

где Π — оператор продолжения из теоремы 6.1.

Тогда к функции $\widetilde{v} = u - \widetilde{\widetilde{u}}$ можно применить последовательно теорему 4.2 [1], следствие 4.2 [1] и теорему 5.2 [1], которые дают оценку для $\|\widetilde{v}\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q)}$. Эта оценка вместе с неравенством (6.1) приводит к требуемому результату. •

§4. Разрешимость задачи Вентцеля в соболевских пространствах

Результаты предыдущих параграфов позволяют установить глобальную разрешимость задачи Вентцеля в пространстве $V_{q+2}(Q)$ с помощью метода продолжения по параметру.

Лемма 4.1. *Пусть* u *— решение задачи* (1.1)–(1.3), *принадлежащее* $V_{n+1}(Q)$, *и выполнены условия* (1.4)–(1.6), (A1), (B1), *причем* b, $\Phi_1 \in L_{n+1}(Q)$; β, $\Theta_1 \in L_n(\partial'' Q)$.

Тогда

$$\|u\|_Q \leqslant M_0, \tag{4.1}$$

где M_0 *зависит от* q, ν, ν_1, μ_1, T, $\|b\|_{n+1,Q}$, $\|\Phi_1\|_{n+1,Q}$, $\|\beta\|_{n,\partial''Q}$, $\|\Theta_1\|_{n,\partial''Q}$, $\operatorname{diam}\Omega$ *и свойств* $\partial\Omega$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$v^{(\pm)} = \exp(\pm\varkappa) - 1,$$

где $\varkappa = \mu_1\nu^{-1}$.

Очевидно, что

$$v_t^{(\pm)} = \pm\varkappa(v^{(\pm)} + 1)u_t, \quad Dv^{(\pm)} = \pm\varkappa(v^{(\pm)} + 1)Du,$$
$$D_iD_jv^{(\pm)} = \pm\varkappa(v^{(\pm)} + 1)\{D_iD_ju \pm \varkappa D_iuD_ju\}.$$

Поэтому в цилиндре Q

$$Lv^{(\pm)} \equiv v_t^{(\pm)} - a_{(u)}^{ij}(x;t)D_iD_jv^{(\pm)} + b^i(x;t)D_iv^{(\pm)} - \varkappa\Phi_1v^{(\pm)} \leqslant \varkappa\Phi_1,$$

здесь $b^i(x;t) = -b(x;t)D_iu/|Du|$ (если $|Du| = 0$, то будем считать $b^i = 0$), и аналогично на $\partial''Q$

$$Bv^{(\pm)} \equiv v_t^{(\pm)} - \alpha_{(u)}^{ij}(x;t)\delta_i\delta_jv^{(\pm)} + \beta^i(x;t)D_iv^{(\pm)} - \varkappa\Theta_1v^{(\pm)} \leqslant \varkappa\Theta_1.$$

Теорема 2.1 с учетом очевидного соотношения $v^{(\pm)}(x;0) \equiv 0$ дает оценку сверху для $\sup\limits_Q v^{(\pm)}$, а следовательно, и для $\|u\|_Q$. •

Доказательство теоремы 1.1. Возьмем произвольную функцию $v \in C^{1+\gamma/2}(\overline{Q})$, где γ — константа из теоремы 3.1, и рассмотрим семейство задач

$$\begin{cases} \tau\{w_t^{(\tau)} - a^{ij}(x;t;v;Dv)D_iD_jw^{(\tau)} - a(x;t;v;Dv)\} & \\ +(1-\tau)\{w_t^{(\tau)} - \Delta w^{(\tau)}\} = 0 & \text{в } Q, \\ \tau\{w_t^{(\tau)} - \alpha^{ij}(x;t;v)\delta_i\delta_jw^{(\tau)} + \beta^i(x;t;v)D_iw^{(\tau)} & \\ -\theta(p;t;v)u\} + (1-\tau)\{w_t^{(\tau)} - \delta_i\delta_jw^{(\tau)}\} = 0 & \text{на } \partial''Q, \\ w^{(\tau)}\big|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Теорема 2.3 гарантирует, что при любом $\tau \in [0,1]$ задача (4.2) имеет единственное решение $w^{(\tau)}$ в пространстве $V_{q+2}(Q)$, а следовательно, согласно теореме вложения (лемма 3.3, гл. II [21]), и в пространстве $C^{1+\gamma}(\overline{Q})$.

Определим теперь отображение

$$\Psi\colon C^{1+\gamma/2}(\overline{Q}) \times [0,1] \to C^{1+\gamma/2}(\overline{Q}),$$

полагая для каждого $v \in C^{1+\gamma/2}(\overline{Q})$, $\tau \in [0,1]$

$$\Psi(v;\tau) = w^{(\tau)}.$$

Тем самым доказательство теоремы 1.1 сводится к вопросу о разрешимости задачи

$$\Psi(u;1) = u.$$

Из условий теоремы, результатов §2 и теоремы вложения следует, что отображение Ψ является непрерывным и компактным.

Рассмотрим далее произвольную неподвижную точку $u(\tau)$ отображения $\Psi(\cdot;\tau)$. Очевидно, что функция $u^{(\tau)}$ принадлежит $V_{q+2}(Q)$ и является решением задачи

$$\begin{cases} u_t^{(\tau)} - a^{ij}_{[\tau]} D_i D_j u^{(\tau)} = a_{[\tau]} & \text{в } Q,\\ u_t^{(\tau)} - \alpha^{ij}_{[\tau]} \delta_i \delta_j u^{(\tau)} + \beta^i_{[\tau]} D_i u^{(\tau)} = \theta_{[\tau]} & \text{на } \partial' Q,\\ u^{(\tau)}(x;0) = 0 & \text{в } \Omega, \end{cases}$$

где

$$\begin{gathered} a^{ij}_{[\tau]}(x;t;u^{(\tau)};Du^{(\tau)}) = \tau a^{ij}(x;t;u^{(\tau)};Du^{(\tau)}) + (1-\tau)\delta^i_j,\\ a_{[\tau]}(x;t;u^{(\tau)};Du^{(\tau)}) = \tau a(x;t;u^{(\tau)};Du^{(\tau)}),\\ \alpha^{ij}_{[\tau]}(x;t;u^{(\tau)}) = \tau \alpha^{ij}(x;t;u^{(\tau)}) + (1-\tau)\delta^i_j,\\ \beta^i_{[\tau]}(x;t;u^{(\tau)}) = \tau \beta^i(x;t;u^{(\tau)}),\\ \theta_{[\tau]}(x;t;u^{(\tau)}) = \tau \theta(x;t;u^{(\tau)}). \end{gathered}$$

Лемма 4.1, следствие 3.1 и теорема вложения показывают, что все неподвижные точки отображения $\Psi(\cdot;\tau)$, $\tau \in [0,1]$ лежат в ограниченном множестве

$$\|u\|C^{1+\gamma/2}(\overline{Q}) \leqslant \mathrm{const}.$$

Учитывая, что $\Psi(v;0) \equiv 0$, мы можем применить к отображению Ψ принцип Лере–Шаудера ([23], теорема 10.1): при каждом $\tau \in [0,1]$ существует по крайней мере одна неподвижная точка $u^{(\tau)} \in V_{q+2}(Q)$ отображения $\Psi(\cdot;\tau)$.

Полагая $\tau = 1$, получаем утверждение теоремы. •

Замечание. Очевидно, структурные условия (A2)–(A5), (B2) могут выполняться лишь при $|z| \leqslant M_0$, где M_0 — константа из леммы 4.1.

§5. Задача Вентцеля в пространствах Гёльдера

Здесь приводятся формулировки теорем, касающихся классической разрешимости задачи Вентцеля и являющихся аналогами теорем 2.2, 2.3 и 1.1.

Во всем параграфе предполагается, что $\partial\Omega \in C^{2+\widehat{\gamma}}$, $\widehat{\gamma} \in \,]0,1[$.

Теорема 2.2′. *Пусть функция* $u \in C^{2+\widehat{\gamma}}(\overline{Q})$ *— решение задачи* (2.1), (2.2), (1.3).

Если коэффициенты и правая часть (2.1) *принадлежат пространству* $C^{\widehat{\gamma}}(\overline{Q})$, *а коэффициенты и правая часть* (2.2) *— пространству* $C^{\widehat{\gamma}}(\overline{\partial'' Q})$, *то*

$$\|u\|_{C^{2+\widehat{\gamma}}(\overline{Q})} \leqslant C_2'\{\|f\|_{C^{\widehat{\gamma}}(\overline{Q})} + \|\theta\|_{C^{\widehat{\gamma}}(\overline{\partial'' Q})}, \tag{5.1}$$

где C_2' *зависит только от* v, $\widehat{\gamma}$, T, $\operatorname{diam}\Omega$, *норм коэффициентов* L *и* B *соответственно в* $C^{\widehat{\gamma}}(\overline{Q})$, $C^{\widehat{\gamma}}(\overline{\partial' Q})$ *и свойств* $\partial\Omega$.

Теорема 2.3′. *Если коэффициенты и правые части* (2.1), (2.2) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2′, *то начально-краевая задача* (2.1), (2.2), (1.3) *имеет единственное решение* $u \in C^{2+\widehat{\gamma}}(\overline{Q})$.

Теорема 1.1′. *Пусть функции* a^{ij}, a, α^{ij}, β^i, θ *удовлетворяют* (1.4)–(1.6), *а также следующим структурным условиям*:

при всех $(x;t) \in \overline{Q}, z \in \mathbb{R}^1, p \in \mathbb{R}^n$,

(A1′) $|a(x;t;z;p)| \leqslant \mu_1(1+|p|^2)$, $\mu_1 = \text{const} > 0$;

выполнены условия (A2)–(A4);

(A5′) $\Phi_2 \in L_{q+2}(Q)$;

(A6′) *функции* a^{ij} *и* a *удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* $\widehat{\gamma}$ *по переменным* $x; z; p$ *и условию Гёльдера с показателем* $\widehat{\gamma}/2$ *по переменной* t;

(B1′) *при всех* $(x;t) \in \overline{\partial'' Q}$, $z \in \mathbb{R}^1$

$$|\beta^i(x;t;z)| \leqslant \mu_4, \quad i = 1,\dots,n,$$
$$|\theta(x;t;z)| \leqslant \mu_5, \quad \mu_4, \mu_5 = \text{const} > 0;$$

(B3′) *функции* α^{ij}, β^i, θ *удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* $\widehat{\gamma}$ *по переменным* x, z *и условию Гёльдера с показателем* $\widehat{\gamma}/2$ *по переменной* t.

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.3) *имеет по крайней мере одно решение* $u \in C^{2+\widehat{\gamma}(\overline{Q})}$.

Замечание. Доказательство теоремы 2.2′ проводится по схеме теоремы 2.2. Теорема 2.3′ доказывается дословно так же, как и теорема 2.3, с использованием оценки (5.1) вместо (2.13).

Утверждение теоремы 1.1′ следует из теорем 1.1 и 2.3′.

§6. Приложение

Теорема 6.1. *Пусть $\partial\Omega \in W^2_{q+2}$, $q \geqslant n$, $Q = \Omega \times]0;T[$. Тогда существует оператор продолжения*

$$\Pi\colon W^{2,1}_{q+1}(\partial'' Q) \to W^{2,1}_{q+2}(Q)$$

такой, что

$$\|\Pi u\|_{W^{2,1}_{q+2}(Q)} \leqslant \widehat{N}_1 \|u\|_{W^{2,1}_{q+1}(\partial' Q)}, \tag{6.1}$$

где $\widehat{N}_1$ зависит только от q и свойств $\partial\Omega$.

Более того, если $u|_{t=0} = 0$, то $(\Pi u)|_{t=0} = 0$.

Доказательство. 1. Опишем сначала процедуру построения оператора продолжения с плоской границы в приграничную полосу, ограниченно действующего из $W^{2,1}_{q+1}(\Gamma_{R,T})$ в $W^{2,1}_{q+2}(\Gamma_{R,T}]0;R[)$. Последовательное применение теорем из [20] дает:

теорема 9.6 [20]: распространение

$$W^{2,1}_{q+1}(\Gamma_{R,T}) \to W^{2,1}_{q+1}(\mathbb{R}^n_t);$$

теорема 18.9 [20]: вложение

$$W^{2,1}_{q+1}(\mathbb{R}^n_t) \to \mathbf{B}^{2,1}_{q+1,q+1}(\mathbb{R}^n_t)$$

(обозначения пространств Бесова $\mathbf{B}$ соответствуют монографии [20]);

теорема 17.10 [20]: продолжение

$$\mathbf{B}^{2,1}_{q+1,q+1}(\mathbb{R}^n_t) \to \mathbf{B}^{2+1/(q+1),1+1/2(q+1)}_{q+1,q+1}(\mathbb{R}^{n+1});$$

теорема 18.10 [20]: вложение

$$\mathbf{B}^{2+1/(q+1),1+1/2(q+1)}_{q+1,q+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \to W^{2,1}_{q+2}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Замечание. Путем домножения на гладкую срезающую функцию можно добиться, чтобы:

1) полученная функция равнялась нулю при $|x_n| > R/2$;

2) если исходная функция равнялась нулю при $|x'| > R/2$, то и результат обратился бы в нуль при $|x'| > 3R/4$.

Далее, из конструкции оператора продолжения (теорема 17.10, [20]) видно, что нечетная по одной из переменных функция может быть продолжена как нечетная по той же переменной. Отсюда следует, что если исходная функция равна нулю при $t = 0$, то результат также можно считать равным нулю при $t = 0$ (для этого достаточно продолжить функцию нечетным по t образом на $\Gamma(B^+_R) \times]-T;0[$, а затем применить вышеуказанные теоремы).

Отметим также, что оценка нормы оператора продолжения зависит только от q и R.

2. Условие $\partial\Omega \in W^2_{q+2}$ означает, что для каждой точки $x^0 \in \partial\Omega$ существует декартова система координат с началом в точке x^0, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\partial\Omega$ касается плоскости $x_n = 0$ в точке x^0;

2) пересечение $\partial\Omega$ с окрестностью $U_R = \{(x', x_n) : |x'| < R, |x_n| < R\}$ задается уравнением $x_n = \omega(x')$, где $\omega \in W^2_{q+2}(\Gamma(B^+_R))$, причем радиус окрестности может быть выбран одинаковым для всех точек $x^0 \in \partial\Omega$. Преобразование $y' = x'$, $y_n = x_n - \omega(x')$ переводит $\partial\Omega \cap U_R$ в шар радиуса R, лежащий в гиперплоскости $y_n = 0$.

Оператор „пересадки“ $u(x;t) \to u(y;t)$, порожденный этим преобразованием координат, ограниченно действует из $W^{2,1}_{q+1}((\partial\Omega \cap U_R) \times]0;T[)$ в $W^{2,1}_{q+1}(\Gamma_{R,T})$.

3. Теперь, используя результаты п. 1 и 2, можно построить локальные операторы продолжения, переводящие функции из $W^{2,1}_{q+1}(\partial''Q)$ с достаточно малым по переменным x носителем в функции из $W^{2,1}_{q+2}(\mathbb{R}^{n+1})$, обращающиеся в нуль при $|x_n| > R/2$, $|x'| > 3R/4$.

Воспользовавшись подходящим разбиением единицы, можно „склеить“ из них оператор П. Последнее утверждение теоремы следует из замечания к п. 1. •

Лемма 6.1. *Пусть $R \leqslant 1$. Тогда существует оператор продолжения*

$$\Pi_1 : C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}}) \to C^{1+\gamma}(\overline{Q}),$$

где $Q = \{(x', x_n; t) : x_n \in]0; R[, |x'| < R - x_n, t \in]0; T[\}$ такой, что:

функция $\widetilde{u} = \Pi_1 u$ — бесконечно дифференцируема на Q;

$$\|\widetilde{u}\|_{C^{1+\gamma}(\overline{Q})} \leqslant \widehat{N}_2 \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}, \tag{6.2}$$

$$|\widetilde{u}_t(x;t)| + |D(D\widetilde{u})(x;t)| \leqslant \widehat{N}_2 \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})} \cdot x_n^{\gamma-1}, \tag{6.3}$$

где $\widehat{N}_2$ — абсолютная константа.

Если вдобавок $u|_{t=0} = 0$, то $\widetilde{u}|_{t=0} = 0$.

Замечание. Идея построения оператора взята из леммы 1.1 [24]. Однако в [24] лишь указано на возможность построения продолжения, фактически же строится только барьер для функции u.

Доказательство. Введем усредняющие ядра:

$\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\zeta \geqslant 0$, $\zeta(\tau) \equiv 0$ при $|\tau| \geqslant 1$, $\zeta(-\tau) = \zeta(\tau)$, $\int_{\mathbb{R}^1} \zeta(\tau)d\tau = 1$,

$\xi(\tau) = 2\zeta(2\tau - 1)$ (заметим, что $\int_{\mathbb{R}^1} \xi(\tau)d\tau = 1$ и $\xi(\tau) \equiv 0$ при $\tau \notin]0; 1[$),

$\eta(x') = \zeta(x_1)\zeta(x_2)\dots\zeta(x_{n-1})$.

Продолжим функцию u на множество $\overline{\Gamma Q^+_{\mathbb{R}}(0;0))}$ по формуле

$$u(x;t) = u(x;0), \quad t < 0$$

(заметим, что $\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T+R^2}(0;T)})} = \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}$) и положим при $(x;t) \in \overline{Q}\setminus\Gamma(Q)$

$$\begin{aligned}(\Pi_1 u)(x;t) &= \widetilde{u}(x;t)\\ &= x_n^{-n-1} \int\limits_{\Gamma_{R,T+R^2}(0;T)} u(y';\tau)\eta((x'-y')/x_n)\xi((t-\tau)/x_n^2)dy'd\tau.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Здесь произведение $\eta((x'-y')/x_n)\xi((t-\tau)/x_n^2)$ обращается в нуль при $(y';\tau) \notin \overline{\Gamma_{R,T+R^2}(0;T)}$. Поэтому интегрирование можно распространить на всю гиперплоскость $\mathbb{R}_t^n$.

Имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x',x_n;t) &= x_n^{-n-1}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n} u(y';\tau)\eta((x'-y')/x_n)\xi((t-\tau)/x_n^2)dy'd\tau\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_t^n} u(x'-x_n z;t-x_n^2\theta)\eta(z)\xi(\theta)dzd\theta.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\widetilde{u} \in C^\infty(Q)$, $\lim\limits_{x_n\to 0}\widetilde{u}(x',x_n;t) = u(x';t)$ и

$$|\widetilde{u}(x;t)| \leqslant \|u\|_{\Gamma_{R,T}}. \tag{6.5}$$

Дифференцирование по компонентам вектора x' показывает, что

$$|D'\widetilde{u}(x;t)| \leqslant \|D'u\|_{\Gamma_{R,T}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}D_k(D_m\widetilde{u})(x;t) &= x_n^{-n-3}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n} u(y';\tau)D_k(D_m\eta)((x'-y')/x_n)\xi((t-\tau)/x_n^2)dy'd\tau\\ &= x_n^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n}(x'-x_n z;t-x_n^2\theta)D_k(D_m\eta)(z)\xi(\theta)dzd\theta\\ &= x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n} D_k u(x'-x_n z;t-x_n^2\theta)D_m\eta(z)\xi(\theta)dzd\theta.\end{aligned}$$

Заметим, что $\int_{\mathbb{R}_t^n} D_m\eta(z)dz = 0$. Поэтому

$$D_k(D_m\widetilde{u})(x;t) = x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n}[D_k u(x'-x_n z;t-x_n^2\theta) - D_k u(x';t-x_n^2\theta)]D_m\eta(z)\xi(\theta)dzd\theta.$$

Следовательно,

$$|D_k(D_m\widetilde{u})(x;t)| \leqslant x_n^{-1}\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})} \cdot x_n^\gamma \cdot \int\limits_{\mathbb{R}_t^n} |z|^\gamma |D_m\eta(z)|\xi(\theta)dzd\theta$$
$$\leqslant \widehat{N}_2\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})} \cdot x_n^{\gamma-1}.$$

Аналогично оценивается $|\widetilde{u}_t(x;t)|$.

Займемся теперь оценкой производных функции $\widetilde{u}$ по x_n. Имеем

$$D_n\widetilde{u}(x;t) = D_n[\widetilde{u}(x',x_n;t) - u(x';t)]$$
$$= D_n[x_n^{-n-1}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n}[u(y';\tau) - u(x';t)]\eta((x'-y')/x_n)\xi((t-\tau)/x_n^2)dy'd\tau].$$

Продифференцировав под знаком интеграла и произведя замену переменных, получим

$$D_n\widetilde{u}(x;t) = -x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n}[u(x'-x_nz;t-x_n^2\theta) - u(x';t)]$$
$$\cdot\{(n+1)\eta(z)\xi(\theta) + D_k\eta(z)z_k\xi(\theta) + \eta(z)\xi'(\theta)\theta\}dz\,d\theta.$$

Обозначим $K(z;\theta)$ функцию, стоящую в фигурных скобках, и преобразуем интеграл:

$$D_n\widetilde{u}(x;t) = -x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n}[u(x'-x_nz;t-x_n^2\theta) - u(x'-x_nz;t)]\cdot K(z;\theta)dz\,d\theta$$
$$-x_i^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_t^n}[u(x'-x_nz;t) - u(x';t)]K(z;\theta)dz\,d\theta. \tag{6.6}$$

Заметим, что $K(z;\theta)$ — функция, четная по всем переменным z_k. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}_t^n} z_kK(z;\theta)dz\,d\theta = 0, \quad k=1,\dots,n-1$$

и, следовательно, второй интеграл в (6.6) можно преобразовать так:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_t^n}[u(x'-x_nz;t) - u(x';t)]K(z;\theta)dz\,d\theta$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}_t^n}[u(x'-x_nz;t) - u(x';t) + D_ku(x';t)x_nz_k]K(z;\theta)dz\,d\theta.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
|D_n\widetilde{u}(x;t)| &\leqslant x_n^{-1}\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}(x_n^2)^{(1+\gamma)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_t}|\theta|^{(1+\gamma)/2}|K(z;\theta)|dz\,d\theta\\
&+x_n^{-1}\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}\cdot x_n^{1+\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n_t}|z|^{1+\gamma}|K(z;\theta)|dz\,d\theta\\
&\leqslant \widehat{N}_2\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}\cdot x_n^{\gamma}\leqslant \widehat{N}_2\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}.
\end{aligned}
$$

Для второй производной аналогично получаем

$$
\begin{aligned}
D_n(D_n\widetilde{u})(x;t) = x_n^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_t}&[u(x'-x_nz;t-x_n^2\theta)-u(x';t)]\\
&\cdot\{(n+1)(n+2)\eta(z)\xi(\theta)+4(n+1)\eta(z)\xi'(\theta)\theta\\
&+2(n+2)D_k\eta(z)z_k\xi(\theta)+D_m(D_k\eta)(z)z_kz_m\xi(\theta)\\
&+4D_k\eta(z)z_k\xi'(\theta)\theta+4\eta(z)\xi''(\theta)\theta^2+6\eta(z)\xi'(\theta)\theta\}dz\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Обозначим $K_1(z;\theta)$ функцию, стоящую в фигурных скобках, и преобразуем интеграл:

$$
\begin{aligned}
D_n(D_n\widetilde{u})(x;t) &= x_n^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_t}[u(x'-x_nz;t-x_n^2\theta)-u(x'-x_nz;t)]\cdot K_1(z;\theta)dz\,d\theta\\
&+x_n^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_t}[u(x'-x_nz;t)-u(x';t)]K_1(z;\theta)dz\,d\theta.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Воспользовавшись тем, что

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n_t} z_kK_1(z;\theta)dz\,d\theta=0\quad k=1,\dots,n-1,
$$

преобразуем второй интеграл в (6.7) так же, как в (6.6).

Таким образом приходим к оценке

$$
\begin{aligned}
|D_n(D_n\widetilde{u})(x;t)| &\leqslant x_n^{-2}\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}(x_n^2)^{(1+\gamma)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_t}|\theta|^{(1+\gamma)/2}|K_1(z;\theta)|dz\,d\theta\\
&+x_n^{-2}\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}\cdot x_n^{1+\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n_t}|z|^{1+\gamma}|K_1(z;\theta)|dz\,d\theta\\
&\leqslant \widehat{N}_2\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}\cdot x_n^{\gamma-1}.
\end{aligned}
$$

Для смешанных производных оценка получается проще:

$$D_n(D_k\widetilde{u})(x;t) = D_n[D_k\widetilde{u}(x',x;t) - D_k u(x';t)]$$
$$= -x_n^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_t^n} [D_k u(x' - x_n z; t - x_n^2\theta) - D_k u(x';t)]K(z;\theta)dz\,d\theta.$$

Отсюда

$$|D_n(D_k\widetilde{u})(x;t)| \leqslant x_n^{-1}[D_k u]_{\gamma,\Gamma_{R,T}} \cdot x_n^{\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}_t^n} (|z|^{\gamma} + |\theta|^{\gamma/2})|K(z;\theta)|dz\,d\theta$$
$$\leqslant \widehat{N}_2 \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})} \cdot x_n^{\gamma-1}.$$

Теперь, имея оценки первых и вторых производных, уже легко получить гёльдеровские константы функции u и ее градиента. Оценим для примера одну из них.

Пусть $x_n^{(1)} > x_n^{(2)} > 0$. Рассмотрим разность

$$D_k\widetilde{u}(x', x_n^{(1)}; t) - D_k\widetilde{u}(x', x_n^{(2)}; t).$$

Если $x_n^{(1)} - x_n^{(2)} < x_n^{(2)}$, то по формуле конечных приращений

$$|D_k\widetilde{u}(x', x_n^{(1)}; t) - D_k\widetilde{u}(x', x_n^{(2)}; t)| \leqslant |D_n(D_k\widetilde{u}(x', \widetilde{x}_n; t))||x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|$$
$$\leqslant \widehat{N}_2\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})} \cdot \widetilde{x}_n^{\gamma-1}|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| \leqslant \widehat{N}_2\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|^{\gamma}$$

(здесь $\widetilde{x}_n \in]x_n^{(2)}; x_n^{(1)}[$).

В противном случае

$$|D_k\widetilde{u}(x', x_n^{(1)}; t) - D_k\widetilde{u}(x', x_n^{(2)}; t)|$$
$$= \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}_t^n} [D_k u(x' - x_n^{(1)} z; t - (x_n^{(1)})^2\theta) - D_k u(x';t) + D_k u(x';t)$$
$$- D_k u(x' - x_n^{(2)} z;' t - (x_n^{(2)})^2\theta)]\eta(z)\xi(\theta)dz\,d\theta \Bigg|$$
$$\leqslant [D_k u]_{\gamma,\Gamma_{R,T}}[(x_n^{(1)})^{\gamma} + (x_n^{(2)})^{\gamma}]2^{\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}_t^n} \eta(z)\xi(\theta)dz\,d\theta$$
$$\leqslant \widehat{N}_2\|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})}|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|^{\gamma}.$$

Последнее утверждение леммы следует из того, что $\xi(\tau) = 0$ при $\tau = 0$. •

Теорема 6.2. *Пусть* $\partial\Omega \in W^2_q$, $\gamma \in]0; 1 - n/q]$, $Q = \Omega \times]0; T[$.

Тогда существует оператор продолжения

$$\Pi_2 \colon C^{1+\gamma}(\overline{\partial' Q}) \to C^{1+\gamma}(\overline{Q(r_0)})$$

(*здесь* $Q(r_0) = \{ (x; t) \in Q : d(x) < r_0 \}$, r_0 *зависит только от свойств* $\partial\Omega$), *такой, что*

$$\|\Pi_2 u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{Q(r_0)})} \leqslant \widehat{N}_3 \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\partial' Q})}; \tag{6.8}$$

в $Q(r_0)$ *существуют обобщенные производные* $(\Pi_2 u)_t$, $D(D(\Pi_2 u))$;

$$|(\Pi_2 u)_t(x; t)| \leqslant \widehat{N}_3 \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\partial'' Q})} (d(x))^{\gamma-1}; \tag{6.9}$$

$$|D(D(\Pi_2 u))(x; t)| \leqslant \widehat{N}_3 \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\partial'' Q})} (d(x))^{\gamma-1} + \widehat{\Phi}(x; t), \tag{6.10}$$

где $\widehat{\Phi} \in L_q(Q(r_0))$

$$\|\widehat{\Phi}\|_{q,Q(r_0)} \leqslant \widehat{N}_3 \|u\|_{C^{1+\gamma}(\overline{\partial' Q})}, \tag{6.11}$$

а константа $\widehat{N}_3$ *определяется свойствами* $\partial\Omega$.

Более того, если $u|_{t=0} = 0$, *то* $(\Pi_2 u)|_{t=0} = 0$.

Доказательство. В силу условия $\gamma \leqslant 1 - n/q$ оператор „пересадки“, описанный в п. 2 доказательства теоремы 6.1, ограниченно действует из $C^{1+\gamma}((\overline{\partial\Omega \cap U_R}) \times [0; T])$ в $C^{1+\gamma}(\overline{\Gamma_{R,T}})$, где R зависит только от свойств $\partial\Omega$. Положим $r_0 = R/2$.

Согласно лемме 6.1, функция u продолжима с $\overline{\Gamma_{R,T}}$ на множество $\overline{Q}$, а, следовательно, и на множество $\overline{\Gamma_{r_0,T}} \times [0; r_0] \subset \overline{Q}$, с выполнением неравенств (6.2), (6.3).

При „склеивании“ оператора Π_2 из локальных операторов продолжения эти неравенства перейдут в (6.8)–(6.11). Последнее свойство оператора Π_2 следует из аналогичного свойства оператора Π_1. •

Авторы глубоко признательны В. П. Ильину за консультации по вопросам построения операторов продолжения и Н. Н. Уральцевой за внимание к работе.

Список литературы

[1] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности*, Успехи мат. наук **41** (251) (1986), № 5, 59–83.

[2] Надирашвили Н. С., *К задаче с наклонной производной*, Мат. сб. **127** (169) (1985), № 3 (7), 398–416.

[3] Lieberman G. M., Trudinger N. S., *Nonlinear oblique boundary value problem for nonlinear elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), no. 2, 509–546.

[4] Назаров А. И., *Гёльдеровские оценки для ограниченных решений задач с наклонной производной для параболических уравнений недивергентной структуры*, Проблемы мат. анализа (1990), № 11, 65–75.

[5] Uraltseva N. N., *Gradient estimates for solutions of nonlinear parabolic oblique boundary problem*, Contemp. Math. **127** (1992), 119–130.

[6] Уральцева Н. Н., *Нелинейная задача с косой производной для параболических уравнений*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **188** (1991), 143–158.

[7] Назаров А. И., Уральцева Н. Н., *Задача с наклонной производной для квазилинейных параболических уравнений*, Зап. науч. семинаров ПОМИ **200** (1992), 118–131.

[8] Palagachev D. K., *The tangential oblique derivative problem for second order quasilinear parabolic operators*, Com. in P. D. E. **17** (1992), no. 5-6, 867–904.

[9] Luo Y., Trudinger N. S., *Linear second order elliptic equations with Venttsel boundary conditions*, Research rep., Austral. nat. univ., Centre for math. analysis, 1989, CMA-R44-89.

[10] Luo Y., *An Aleksandrov–Bakel'man type maximum principle and applications*, Research rep., Austral. nat. univ., Centre for math. analysis, 1989, CMA-R45-89.

[11] Luo Y., *On the quasilinear elliptic Venttsel boundary value problem*, Research rep., Austral. nat. univ., Centre for math. analysis, 1990, CMA-R1-90.

[12] Luo Y., *Quasilinear second order elliptic equations with Venttsel boundary condition*, Research rep., Austral. nat. univ., Centre for math. analysis, 1990, CMA-R17-90.

[13] Вентцель А. Д., *О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов*, Теор. вероят. и ее прим. **4** (1959), № 2, 172–185.

[14] Ikeda N., Watanabe S., *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland Publishing Company, Amsterdam etc., 1981.

[15] Watanabe S., *Construction of diffusion processes with Venttsel boundary conditions by means of Poisson point processes of Brownian excursions*, Probability Theory, Banach Center Publications **5** (1979), 255–271.

[16] Апушкинская Д. Е., *Оценка максимума решений параболических уравнений с граничным условием Вентцеля*, Вест. Ленингр. ун-та, сер. 1 (1991), № 2 (8), 3–12.

[17] Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., *Holder estimates for solutions of the initial-boundary value problems to parabolic equations of nondivergent form with Venttsel boundary condition*, Adv. Sov. Math..

[18] Апушкинская Д. Е., Назаров А. И., *Об оценках на границе области норм Гёльдера производных решений линейных параболических уравнений с сингулярностями специального вида*, Вест. С.-Петерб. ун-та, сер. 1 (1993), № 3 (15), 134–136.

[19] Назаров А. И., Уральцева Н. Н., *Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **147** (1985), 95–109.

[20] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

[21] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

[22] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Об оценках* $\max|u_x|$ *для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **138** (1984), 90–107.

[23] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, изд. 2, Наука, М., 1973.

[24] Lieberman G. M., *The first initial-boundary value problem for quasilinear second order parabolic equations*, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa Cl. Sci. **13** (1986), no. 3, 347–387.

Поступило 26 августа 1993 г.