А. И. Мальцев, Об элементарных теориях локально свободных универсальных алгебр, *Докл. АН СССР*, 1961, том 138, номер 5, 1009–1012

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 138, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик А. И. МАЛЬЦЕВ

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Множество A вместе с какой-либо последовательностью $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{r_i})$ $(i = 1, \ldots, s)$ определенных на нем операций называется алгеброй типа $\langle r_1, \ldots, r_s\rangle$. Этот тип мы будем считать далее произвольным, но фиксированным. Символы $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ будут обозначать основные операции произвольной алгебры данного типа. Предметные символы $x, y, \ldots$ будут называться термами длины 1. Если $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_i}$ — термы длины $n_1, \ldots, n_{r_i}$, то выражение $\varphi_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_i})$ называется термом длины $n_1 + \ldots + n_{r_i} + 1$. Пусть $\mathfrak{a}(a_1, \ldots, a_n)$ — терм, составленный из элементов $a_1, \ldots, a_n$ алгебры A и функциональных символов $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$. Выполняя над $a_1, \ldots, a_n$ обозначенные в записи терма операции, получим элемент $a \in A$, называемый значением терма $\mathfrak{a}$. Элементы $a_1, \ldots, a_n$ взаимно свободны в A, если значения произвольных термов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ от $a_1, \ldots, a_n$ равны только тогда, когда термы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ сами (графически) равны. Алгебра A называется свободной, если она имеет взаимно свободную систему порождающих. Алгебра A локально свободна, если каждая ее подалгебра, порожденная конечной системой элементов, является свободной. Свободная алгебра является и локально свободной, так как любая подалгебра свободной алгебры свободна ([4]).

Класс локально свободных алгебр вполне характеризуется аксиомами

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) \neq \varphi_j(y_1, \ldots, y_{r_j}) \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, s); \quad (1)$$

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) = \varphi_i(y_1, \ldots, y_{r_i}) \to x_1 = y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_{r_i} = y_{r_i} \quad (i = 1, \ldots, s). \quad (2)$$

Формулами далее будут называться формулы узкого исчисления предикатов (УИП), составленные из равенств вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, где f, g — термы, с помощью логических операций $\neg$, $\&$, $\vee$, $\forall$, $\exists$.

Цель настоящей заметки — указать алгоритм, позволяющий для каждой формулы $\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_n)$ построить формулу $\mathfrak{F}^*$ более простого вида, равносильную $\mathfrak{F}$ на любой локально свободной алгебре.

В качестве следствия получится, что множество замкнутых формул, истинных на локально свободных алгебрах, алгоритмически разрешимо.

Алгебра с одной бинарной операцией называется группоидом. В работах Пеписа ([2]) и Яськовского ([3]) показано, что вопрос о выполнимости любой формулы УИП сводится к вопросу о выполнимости подходящей формулы в классе всех свободных группоидов с дополнительным одночленным предикатом, и, таким образом, класс формул УИП, истинных на всех свободных группоидах с одночленным предикатом, алгоритмически неразрешим. Из общего результата настоящей заметки вытекает, что класс формул, истинных на свободном группоиде (без дополнительного предиката), разрешим.

Введем следующие постоянные обозначения:

$$N_i(x) \leftrightarrow (y_1 \ldots y_{r_i})\,(x \neq \varphi_i(y_1, \ldots, y_{r_i})) \qquad (i = 1, \ldots, s);$$

$$N_{\mathfrak{p}}(x) \leftrightarrow N_{i_1}(x) \,\&\ldots \&N_{i_k}(x) \qquad (\mathfrak{p} = \langle i_1, \ldots, i_k \langle;\ i_1 < \ldots \langle i_k);$$

$$E_{\mathfrak{p}}^m \leftrightarrow (\exists y_1 \ldots y_m)\,(N_{\mathfrak{p}}(y_1) \,\&\ldots \&N_{\mathfrak{p}}(y_m) \,\& \bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j) \qquad (m = 2, 3, \ldots);$$

$$E_{\mathfrak{p}}^1 \leftrightarrow (\exists y)\,N_{\mathfrak{p}}(y); \quad D_{\mathfrak{p}}^m \leftrightarrow \neg E_{\mathfrak{p}}^m \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Здесь $\wedge$, $\vee$ — символы, соответственно, конъюнкции и дизъюнкции.

Теорема. *Существует алгоритм, позволяющий для каждой формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ со свободными предметными переменными $x_1, \ldots, x_n$ построить формулу $\mathfrak{A}^*(x_1, \ldots, x_n)$, равносильную $\mathfrak{A}$ на каждой локально свободной алгебре и являющуюся конъюнкцией дизъюнкций формул вида $N_i(z)$, $D_{\mathfrak{p}}^m$, $E_{\mathfrak{p}}^m$ и формул вида*

$$(\exists y_1 \ldots y_m)\,(x_1 = f_1 \,\&\ldots \&x_p = f_p \,\& \bigwedge x_{\alpha_i} \neq g_i \,\& \bigwedge y_{\beta_j} \neq h_j \,\& \bigwedge N_{\gamma_k}(y_{\delta_k})), \qquad (3)$$

где f_l, g_i, h_j — термы от $x_{p+1}, \ldots x_n$, $y_1, \ldots, y_m$; $\alpha_i = p+1, \ldots, n$ $\beta, \delta = 1, \ldots, m$.

Если формула $\mathfrak{A}$ не содержит свободных предметных переменных, то, согласно теореме, она равносильна конъюнкции дизъюнкций формул $D_{\mathfrak{p}}^m$, $E_{\mathfrak{p}}^m$, утверждающих существование или несуществование в алгебре данного числа элементов фиксированного типа $N_{\mathfrak{p}}$. Число типов элементов равно $2^s - 1$, и если для каждого типа $N_{\mathfrak{p}}$ известно, сколько различных элементов этого типа есть в алгебре, то легко вычислить и значение стандартной формулы $\mathfrak{A}^*$.

Называя стандартным классом класс алгебр, характеризуемый одной из аксиом $D_{\mathfrak{p}}^m$ или $E_{\mathfrak{p}}^m$, приходим к заключению, что *каждый аксиоматизируемый класс локально свободных алгебр есть пересечение конечных объединений стандартных классов.*

Теперь мы опишем алгоритм приведения формулы $\mathfrak{A}$ к нормальному виду $\mathfrak{A}^*$, существование которого утверждает теорема.

Условимся $\exists$-формулой называть формулу, построенную из выражений вида $f = g$, $f \neq g$, $N_i(z)$, где f, g — термы, только с помощью знаков $\&$, $\vee$, $\exists$, т. е. без знаков $\neg$ и $\forall$.

Алгоритм приведения $\exists$-формул. Пусть пренексная форма для $\mathfrak{A}$ есть $(\exists y_1 \ldots y_m)\,\mathfrak{A}_0$, где $\mathfrak{A}_0$ — бескванторная часть ([1]). Приводя $\mathfrak{A}_0$ к дизъюнктивной форме и распределяя кванторы $\exists$, приведем дело к преобразованию формулы $(\exists y_1 \ldots y_m)\,\mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_1$ есть конъюнкция членов вида $D_{\mathfrak{p}}^i$, $E_{\mathfrak{p}}^i$, $N_i(x)$, $N_i(y)$, $f = g$, $f \neq g$. Все члены, не зависящие от $y_1, \ldots, y_m$, можно вынести и далее не рассматривать. В силу (1), (2) члены вида $\varphi_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_i}) = \varphi_j(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r_j})$ при $i \neq j$ ложны, а члены $\varphi_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_i}) = \varphi_i(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r_i})$ можно заменить равносильным выражением $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 \,\&\ldots \&\mathfrak{a}_{r_i} = \mathfrak{b}_{r_i}$. Если в $\mathfrak{A}_1$ есть член вида $x = f$, то в f x входить не может, так как иначе этот член будет иметь значение ложь. Оставляя такой член без изменения, мы во всех остальных членах, в которых встречается x, заменим x через f. Повторяя несколько раз преобразования указанных типов, мы через конечное число шагов придем к формуле требуемого вида.

Алгоритм приведения отрицания $\exists$-формулы. Так как $\exists$-формула приводится к конъюнкции дизъюнкций стандартных формул вида (3) и $E_{\mathfrak{p}}^m$, $D_{\mathfrak{p}}^m$, то для приведения отрицания $\exists$-формулы достаточно уметь приводить отрицания этих стандартных частей. Но

$\urcorner E_{\mathfrak{p}}^m \leftrightarrow D_{\mathfrak{p}}^m$ и $\urcorner D_{\mathfrak{p}}^m \leftrightarrow E_{\mathfrak{p}}^m$, а $\urcorner N_i(x)$ имеет вид (3). Поэтому нужно уметь приводить лишь отрицание формулы (3), т. е. формулу

$$(y_1, \ldots, y_m)\,(\bigwedge x_l = f_l \rightarrow \bigvee x_{\alpha_i} = g_i \vee \bigvee y_{\beta_j} = h_j \vee \bigvee \urcorner N_{\gamma_k}(y_{\delta_k})).$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$(y_{t+1} \ldots y_m)\,(\bigwedge x_l = f_l \rightarrow (y_1 \ldots y_t)\,\mathfrak{B}), \tag{4}$$

где $y_1, \ldots, y_t$ — все те y, которые не встречаются в термах $f_1, \ldots, f_p$. При заданных $x_1, \ldots, x_p$ система уравнений $x_1 = f_1, \ldots, x_p = f_p$ относительно $y_{t+1}, \ldots, y_m$ может иметь не более одного решения. Поэтому формула (4) равносильна формуле

$$(y_{t+1} \ldots y_m)\,(\bigvee x_l \neq f_l) \vee (\exists y_{t+1} \ldots y_m)\,(\bigwedge x_l = f_l \,\&\, (y_1 \ldots y_t)\,\mathfrak{B}). \tag{5}$$

Нам надо преобразовать в $\exists$-формулы первый член дизъюнкции (5) и выражение $(y_1 \ldots y_t)\,\mathfrak{B}$.

Приведение формулы вида $(y_1 \ldots y_\lambda)\,(x \neq f(x_1, \ldots, x_\mu, y_1, \ldots, y_\lambda))$ покажем на примере $(y)\,(x \neq x_1 y \cdot y)$, предполагая, что рассматривается группоид.

Так как при заданном x в локально свободном группоиде уравнение $x = uv \cdot w$ имеет не более одного решения для u, v, w, то указанная формула равносильна формуле

$$(\exists uv\,(x = x_1 u \cdot v \,\&\, u \neq v) \vee (\exists uv)\,(x = uv \,\&\, (w)\,(u \neq x_1 w)),$$

причем

$$(w)\,(u \neq x_1 w) \leftrightarrow (\exists yz)\,(u = yz \,\&\, y \neq x_1) \vee N(u).$$

Пусть для формулы $(y_1 \ldots y_\lambda)\,(x_1 \neq f_1 \vee \ldots \vee x_q \neq f_q)$ уже найдена эквивалентная $\exists$-форма. Более длинная формула $(y_1 \ldots y_\lambda)\,(x_1 \neq$ $\neq f_1 \vee \ldots \vee x_{q+1} \neq f_{q+1})$ по указанным выше причинам равносильна формуле

$$(y_1 \ldots y_\sigma)\,(x_1 \neq f_1 \vee \ldots \vee x_q \neq f_q) \vee (\exists y_1 \ldots y_\sigma)\,(x_1 = f_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_q = f_q \,\&$$
$$\&\, (y_{\sigma+1} \ldots y_\lambda)\,(x_{q+1} \neq f_{q+1})),$$

где $y_{\sigma+1}, \ldots, y_\lambda$ — все те связанные переменные, которые не входят явно в $f_1, \ldots, f_q$. Приведение обеих подформул, начинающихся с кванторов всеобщности, указано выше.

Теперь рассмотрим в (5) подформулу $(y_1 \ldots y_t)\,\mathfrak{B}$. Приведение ее основывается на следующей лемме.

Лемма. *Пусть $T_1, \ldots, T_t$ — фиксированные множества элементов локально свободной алгебры. Если каждое из этих множеств содержит более $u + v$ элементов, то выражение*

$$(\forall y_1 \in T_1) \ldots (\forall y_t \in T_t)\,(x_{\alpha_1} = g_1 \vee \ldots \vee x_{\alpha_u} = g_u \vee y_{\beta_1} = h_1 \vee \ldots \vee y_{\beta_v} = h_v) \tag{6}$$

ложно для любых $x_1, \ldots, x_n, y_{t+1}, \ldots, y_m$ при условии, что для любых i терм g_i отличен от x_{α_i} и терм h_i отличен от y_{β_i}. Если последнее условие не выполняется, то выражение (6) *тождественно истинно.*

В самом деле, каждое из уравнений $x_{\alpha_i} = g_i$ имеет для тех y-в, которые в него фактически входят, не более одного решения. Выбрасывая эти решения из соответствующих множеств $T_1, \ldots, T_t$, получим множества $T_1', \ldots, T_t'$, содержащие не менее v элементов каждое, причем для

$y_1 \in T'_1, \ldots, y_t \in T'_t$ все равенства $x_{\alpha_1} = g_1, \ldots, x_{\alpha_u} = g_u$ будут ложны. Теперь фиксируем y_{β_1} в T'_{β_1} и вместо (6) рассматриваем формулу

$$(\forall y_1 \in T'_1) \ldots (\forall y_t \in T'_t)\,(y_{\beta_1} = h_1 \vee \ldots \vee y_{\beta_v} = h_v) \quad (\forall y_{\beta_1} \text{ опускается}),$$

к которой применяем те же рассуждения, и т. д.

Локально свободная алгебра бесконечна. Поэтому, если в $\mathfrak{B}$ нет членов $\neg N_\gamma(y_\delta)$, то из леммы следует, что формула $(y_1 \ldots y_t)\,\mathfrak{B}$ будет или тождественно ложной, или тождественно истинной.

Пусть в $\mathfrak{B}$ есть члены $\neg N_\gamma(y_\delta)$. Если в этих членах содержатся не все y, то, преобразуя $(y_1 \ldots y_t)\,\mathfrak{B}$ к виду

$$(y_1 \ldots y_w)\,(\bigvee \neg N_{\gamma_k}(y_{\delta_k}) \vee (y_{w+1} \ldots y_t)\,(\bigvee x_{\alpha_i} = g_i \vee \bigvee y_{\beta_j} = h_j), \quad (7)$$

заключаем на основании леммы, что выражение $(y_{w+1} \ldots y_t)\,(\bigvee x_{\alpha_i} = g_i \vee \bigvee y_{\beta_j} = h_j)$ либо тождественно истинно, либо тождественно ложно. Во втором случае (7) будет эквивалентна дизъюнкции вида $D^1_{\mathfrak{p}_1} \vee \ldots \vee D^1_{\mathfrak{p}_\nu}$, а в первом случае (7) тождественно истинна.

Остается рассмотреть формулу (7) при условии, что $w = t$, т. е. что каждое $y_1, \ldots, y_t$ содержится в подходящем члене $\neg N_\gamma(y_\delta)$. Объединяя члены, относящиеся к одному и тому же y_i, преобразуем (7) к форме

$$(y_1 \ldots y_t)\,(N_{\mathfrak{p}_1}(y_1) \,\&\, \ldots \,\&\, N_{\mathfrak{p}_t}(y_t) \to \bigvee x_{\alpha_i} = g_i \vee \bigvee y_{\beta_j} = h_j). \quad (8)$$

Пусть M_i — совокупность всех $N_{\mathfrak{p}_i}$ элементов алгебры. Переписывая (8) в виде

$$(\forall y_1 \in M_1) \ldots (\forall y_t \in M_t)\,(x_{\alpha_1} = g_1 \vee \ldots \vee x_{\alpha_u} = g_u \vee y_{\beta_1} = h_1 \vee \ldots \\ \ldots \vee y_{\beta_v} = h_v), \quad (9)$$

заключаем на основании леммы, что (9) тождественно ложно, если каждое множество M_i содержит более $u + v$ элементов. Следовательно, формула (8) равносильна выражению

$$(D^{z+1}_{\mathfrak{p}_1} \,\&\, \mathfrak{F}) \vee \ldots \vee (D^{z+1}_{\mathfrak{p}_t} \,\&\, \mathfrak{F}) \quad (z = u + v),$$

где через $\mathfrak{F}$ обозначена сама формула (8). Но

$$D^{z+1}_{\mathfrak{p}} \leftrightarrow D^1_{\mathfrak{p}} \vee (D^2_{\mathfrak{p}} \,\&\, E^1_{\mathfrak{p}}) \vee \ldots \vee (D^{z+1}_{\mathfrak{p}} \,\&\, E^z_{\mathfrak{p}}),$$

поэтому формула (8) равносильна дизъюнкции формул $D^1_{\mathfrak{p}}$ и $D^{\sigma+1}_{\mathfrak{p}} \,\&\, E^\sigma_{\mathfrak{p}} \,\&\, \mathfrak{F}$ $(\sigma = 1, \ldots, z)$. Но

$$D^{\sigma+1}_{\mathfrak{p}_1} \,\&\, E^\sigma_{\mathfrak{p}_1} \,\&\, \mathfrak{F}\, D \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow D^{\sigma+1}_{\mathfrak{p}_1} \,\&\, (\exists w_1 \ldots w_\sigma)\,(N_{\mathfrak{p}_1}(w_1) \,\&\, \ldots \,\&\, N_{\mathfrak{p}_1}(w_\sigma) \,\&\, \bigwedge w_i \neq w_j \,\&\, \bigwedge \mathfrak{G}(u_i)),$$

где положено

$$\mathfrak{G}(u_i) \leftrightarrow (y_2 \ldots y_t)\,(N_{\mathfrak{p}_2}(y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, N_{\mathfrak{p}_t}(y_t) \to \mathfrak{H}(u_i, y_2, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)),$$

$$\mathfrak{H}(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \bigvee x_{\alpha_i} = g_i \vee \bigvee y_{\beta_j} = h_j.$$

Таким образом, дело свелось к приведению формул $\mathfrak{G}(u_i)$ вида (8), содержащих меньшее число кванторов всеобщности.

Поступило
9 III 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Новиков, Элементы математической логики, М., 1959. [2] J. Pepis, Fund. Math., **30**, 257 (1938). [3] S. Jaśkowski, Fund. Math., **43**, № 1, 36 (1956). [4] А. И. Мальцев, УМН, **16**, № 3 (1961).