

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Многочисленные практически важные задачи приводят к некорректно поставленным задачам, как, например, уравнениям Фредгольма первого рода, задаче Коши для уравнения эллиптического типа, задаче аналитического продолжения и т. д. Некорректно поставленные задачи в последнее время привлекают к себе большое внимание (см., например, (1), где приводится литература по этому вопросу).

Задача R определения функции $z(s) \in Z$ по данной функции $u(x) \in U$: $z(s) = R[s, u(x)]$ (где Z и U — соответствующие функциональные пространства) называется корректно поставленной, если:

- 1°. Всякой функции $u(x) \in U$ соответствует решение задачи $z(s)$.
- 2°. Решение $z(s)$ заданием $u(x)$ определяется однозначно.
- 3°. Решение задачи $z(s)$ непрерывно зависит от $u(x)$ в метриках Z и U .

Пусть дана некорректная задача $z = R[s, u]$. В качестве иллюстрирующего примера будем брать уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, z(s)] = \int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (1)$$

Не всякой функции $\bar{u}(x)$ соответствует решение задачи $\bar{z}(s)$.

Рассмотрим следующий вопрос о решении некорректно поставленных задач.

Известно, что некоторой функции $\bar{u}(x)$ соответствует решение задачи $\bar{z}(s) = R[s, \bar{u}(x)]$; пусть задана функция $\tilde{u}(x)$, приближение $\bar{u}(x)$ с известной точностью δ : $\|\tilde{u}(x) - \bar{u}(x)\| < \delta$. Определить $\tilde{z}(s)$ — приближенное значение $\bar{z}(s)$ с заданной точностью $\|\tilde{z}(s) - \bar{z}(s)\|_Z \leq \varepsilon$, если δ — точность задания $\tilde{u}(x)$ — достаточно мала. При этом $\tilde{z}(s)$ совсем не обязательно равно $R[s, \tilde{u}(x)]$, которое вообще может не существовать.

Будем называть оператор (или алгоритм) $R_\delta[s, u(x)]$ регуляризирующим, если:

- 1°. $R_\delta[s, \tilde{u}(x)]$ определен для всех $\tilde{u} \in U$ и $\delta > 0$.
- 2°. Если для $\bar{u}(x)$ существует $\bar{z}(s) = R[s, \bar{u}(x)]$, то для любого ε существует такое $\delta(\varepsilon, \bar{z})$, что если $\|\tilde{u}(x) - \bar{u}(x)\|_U < \delta$, то $\|\tilde{z}_\delta(s) - \bar{z}(s)\|_Z \leq \varepsilon$, где $\tilde{z}_\delta(s) = R_\delta[s, \tilde{u}]$.

Будем называть задачу $z(s) = R[s, u(x)]$ регуляризуемой, если она допускает хотя один регуляризирующий алгоритм.

Очевидно, что если задача $z = R[s, u]$ корректна, то она регуляризуема, так как, полагая $R_\delta[s, u] = R[s, u]$ для любых δ , получим регуляризирующий алгоритм.

В зависимости от нормы z мы можем различать слабую регуляризацию, равномерную регуляризацию и регуляризацию n -го порядка гладкости.

Регуляризирующие алгоритмы представляют практический способ решения некорректных задач.

В (2) дан равномерно регуляризирующий алгоритм для уравнений первого рода. В настоящей статье для этого же класса задач приводятся регуляризирующие алгоритмы n -го порядка гладкости.

1. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода (1) и будем для простоты предполагать, что ядро непрерывно и при $\bar{u}(x) = 0$ имеется лишь единственное решение $\bar{z}(\delta) \equiv 0$. Рассмотрим сглаживающий функционал

$$M_n^\alpha [z(s); \bar{u}(x)] = N [z(s); \bar{u}(x)] + \alpha \Omega^{(n)} [z], \quad (2)$$

где

$$N [z(s); \bar{u}(x)] = \int_c^d [A [x, z(s)] - \bar{u}(x)]^2 dx$$

и регуляризующий функционал:

$$\Omega^{(n)} [z] = \int_a^b \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} K_i(s) (z^{(i)}(s))^2 \right\} ds,$$

где $K_i(s)$ — непрерывные функции, $K_i(s) > 0$.

Теорема 1. Для любой функции $\bar{u}(x) \in L_2$ и любого $\alpha > 0$ существует единственная $2(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция $z_n^\alpha(s)$, реализующая минимум сглаживающего функционала $M_n^\alpha [z, \bar{u}(x)]$.

Функция $z_n^\alpha(s)$ определяется уравнением Эйлера

$$L_n^\alpha [z] = \alpha \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+1} \frac{d^i}{ds^i} \left(K_i(s) \frac{d^i z}{ds^i} \right) \right\} - \left\{ \int_a^b \bar{K}(s, \zeta) z(\zeta) d\zeta - \bar{b}(s) \right\} = 0 \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$\pi^l(s) = \left\{ \sum_{i=l+1}^{n+1} (-1)^{i-l-1} [K_i(s) z^{(i)}(s)]^{(i-l-1)} \right\} \Big|_{a,b} = 0 \quad (l = 1, \dots, n+1), \quad (4)$$

где

$$\bar{K}(s, \zeta) = \int_a^b K(\xi, s) K(\xi, \zeta) d\xi, \quad \bar{b}(s) = \int_c^d K(\xi, s) \bar{u}(\xi) d\xi.$$

С помощью функции Грина для краевой задачи

$$\tilde{L}_n [z] = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+1} \frac{d^i}{ds^i} [K_i z^{(i)}] = f, \quad \pi^l(a) = \pi^l(b) = 0, \quad l = 1, \dots, n+1,$$

уравнение (3) преобразуется в уравнение Фредгольма второго рода, имеющее при $\alpha > 0$ лишь тривиальное решение, что и доказывает существование функции $z_n^\alpha(s)$.

Теорема 1'. Для любой функции $\bar{u}(x) \in L_2$ и любого $\alpha > 0$ существует функция $z_{(-1)}^\alpha(s) \in L_2$, реализующая минимум функционала $M_{(-1)}^\alpha [z, \bar{u}]$.

Эта функция определяется как решение уравнения

$$\alpha K_0(z) z(s) = \int_a^b \bar{K}(s, \xi) z(\xi) d\xi - \bar{b}(s), \quad (3')$$

для которого соответствующее однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2. Если $\bar{u}(x) = A [x, \bar{z}(s)]$, $\bar{z} \in \bar{C}^{(n+1)}$, то для любого $\varepsilon > 0$ и вспомогательных чисел $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ существуют такое $\delta(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$, что если: 1) $\|\bar{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\|_{L_2} \leq \delta$, где $\bar{u}_\delta(x) \in L_2$; 2) $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ имеет по-

рядок $\delta^2: \gamma_1 \leq \delta^2/\bar{\alpha}(\delta) \leq \gamma_2$, то $\tilde{z}_{\delta,n}^{\bar{\alpha}}$ (s), реализующие минимум функционала $M_n^{\bar{\alpha}}[z, \tilde{u}_\delta(x)]$, таковы, что

$$|\tilde{z}_{\delta,n}^{\bar{\alpha}}(s)^{(i)} - \bar{z}(s)^{(i)}| \leq \varepsilon, \quad a \leq s \leq b, \quad i = 0, \dots, n,$$

при $\delta < \delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$.

Теорема 2'. Если $\bar{u}(x) = A[x, \bar{z}(s)]$, $\bar{z} \in L_2$, то для любого ε и вспомогательных чисел $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$ существует такое $\delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$, что если: 1) $\|\tilde{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\|_{L_2} \leq \delta$, где $\tilde{u}_\delta(x) \in L_2$; 2) $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ имеет порядок δ^2 : $\gamma_1 \leq \delta^2/\bar{\alpha}(\delta) \leq \gamma_2$, то $\tilde{z}_{\delta,n}^{\bar{\alpha}(\delta)}$ (s), реализующая минимум функционала $M_n^{\bar{\alpha}(\delta)}[z, \tilde{u}_\delta(x)]$, сходится слабо к $\bar{z}(s)$.

Из теорем 1, 2 и 1', 2' следует, что решение краевой задачи (3), (4) представляет регуляризирующий алгоритм n -го порядка гладкости, если $\bar{z} \in C^{n+1}$ и решение уравнения (3*) представляет алгоритм слабой регуляризации для $\bar{z} \in L_2$.

Аналогично (2) все эти результаты переносятся на многомерные задачи и на операторные уравнения первого рода

$$A[x, z(s)] = \bar{u}(x),$$

где $A[x, z]$ — оператор, действующий из C в L_2 , ограниченный в том смысле, что почти для всякого x

$$|A[x, z(s)]| \leq A(x) \|z\|_C, \quad \int_c^d A^2(x) dx = A_0 < +\infty.$$

✓ Конечноразностная аппроксимация рассматриваемой задачи трактуется аналогично (2):

2. Рассмотрим весьма важный специальный случай рассматриваемой задачи, когда

$$\int_a^b K(x, s) z(s) ds = \bar{u}(x), \quad a \leq x \leq b$$

(т. е. когда $a = c$, $b = d$) и когда для $K(x, s)$ существует ядро половинного порядка, т. е.

$$K(x, s) = \int_{c'}^d \hat{K}(\xi, x) \hat{K}(\xi, s) d\xi.$$

В этом случае алгоритм для получения $z^x(s)$ упрощается. Уравнение для определения $z^x(s)$ можно писать в виде

$$L_n^{(\alpha)}[z] = \alpha \tilde{L}_n[z] - \left\{ \int_a^b K(s, \zeta) z(\zeta) d\zeta - \bar{u}(s) \right\} = 0 \quad (3')$$

с условиями

$$\pi^l(a) = \pi^l(b) = 0 \quad (l = 1, \dots, n+1). \quad (4')$$

В самом деле, рассмотрим функцию

$$v(\xi) = \int_a^b K(\xi, s) z(s) ds, \quad c' \leq \xi \leq d'.$$

Поставим задачу: считая $v(\xi)$ заданной функцией, найти $z(s)$. Эта задача эквивалентна исходной и определяет ту же функцию $z(s)$. Применяя к этой

задаче изложенный выше основной алгоритм, получим для определения $z^z(s)$ задачу (3*), (4*), непосредственно определяемую заданием $K(x, s), \bar{u}(x)$.

3. К рассматриваемому специальному случаю (п. 2) относится задача о продолжении потенциала в сторону возмущающих масс, определяемая уравнением Пуассона

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{(x-s)^2 + h^2} z(s) ds = \bar{u}(x), \quad c \leq x \leq d.$$

Если $z(s)$ отлична от нуля только для $a \leq s \leq b$ и (c, d) — область задания $\bar{u}(x)$ — содержит (a, b) , то можно пользоваться специальным алгоритмом (3'), (4'). Если же (c, d) не содержит (a, b) , то надо пользоваться общим алгоритмом (3), (4).

Аналогичные соображения относятся как к обратной задаче теплопроводности обычного типа

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-(x-s)^2/4a^2 t} z(s) ds = u(x),$$

так и к обратной задаче второго типа, соответствующей задаче определения исторического климата (3).

Задача об аналитическом продолжении с дуги L_1 на контур L_2 , определяемая уравнением

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in L_1, \zeta \in L_2)$$

решается при помощи основного алгоритма.

Задачи оптимального регулирования приводят к некорректно поставленным вариационным задачам, и метод регуляризации находит применение также и при решении этих задач.

Изложенные методы испытаны на электронных вычислительных машинах и дали весьма эффективные результаты.

Поступило
15 VIII 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. М. Лаврентьев, О решении некоторых некорректно поставленных задач, Новосибирск, 1963. ² А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3, 501 (1963). ³ А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 42, 199 (1935).