A. I. Kalinin, L. I. Lavrinovich, Small parameter method in optimization problems of singularly perturbed dynamical systems,
Tr. Inst. Mat., 2021, Volume 29, Number 1, 85–93

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2021. Том 29. № 1-2. С. 85–93

УДК 517.977

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет
e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by
Поступила 15.10.2021

Приводится обзор результатов, полученных для задач оптимизации сингулярно возмущенных систем в Минской школе по оптимальному управлению.

1. Введение. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. В математической теории оптимальных процессов [1] задачам оптимизации таких систем уделяется значительное внимание,что вызвано эффективностью асимптотических методов их решения. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В задачах с сингулярными возмущениями эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Применение асимптотических методов позволяет не только избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, но и свести исходную задачу оптимального управления к решению задач меньшей размерности.

Наиболее распространенный подход к исследованию сингулярно возмущенных задач оптимального управления состоит в применении методов асимптотического разложения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений к краевой задаче принципа максимума (см., например, [2]–[7]). На таком пути можно строить асимптотику решения задач с открытой областью управления и гладкими управляющими воздействиями, т.е. задач вариационного типа. В случае наличия прямых ограничений на значения управляющих воздействий в виде замкнутых неравенств этот подход встречает серьезные трудности, поскольку динамические уравнения краевой задачи принципа максимума не обладают необходимой для применения асимптотических методов гладкостью. Наверное, поэтому в данном случае исследования, в основном, сводились лишь к выяснению вопроса о предельной задаче, к решению которой в той или иной топологии сходится решение сингулярно возмущенной задачипри стремлении малого параметра к нулю [8]–[12].

Настоящая статья представляет обзор результатов, полученных для задач оптимизации сингулярно возмущенных систем в Минской школе по оптимальному управлению. Как правило, были рассмотрены задачи с ограничениями на правый конец траекторий. Прежде чем перейти к изложению полученных результатов, уточним, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решениям задач оптимизации сингулярно возмущенных систем с малым параметром $\mu > 0$ при части производных.

Определение. Допустимое управление (со значениями удовлетворяющими прямым ограничениям) назовем асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N = 0, 1, ...)$, если оно отклоняется от оптимального управления по критерию качества на величину $O(\mu^{N+1})$, а траектория динамической системы, им порожденная, удовлетворяет терминальным ограничениям с точностью того же порядка малости.

2. Методика исследования. В основе применяемой методики исследования лежит идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Для многих задач оптимизации динамических систем можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума и условий допустимости управлений для определяющих элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно составить систему уравнений

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) = 0, i = \overline{1, k}, \tag{1}$$

где μ – малый параметр. Назовем эти уравнения, как и их корни, определяющими. Формируются уравнения (1) путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя метод пограничных функций [13], можно разложить функции $F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu)$, $i = \overline{1, k}$, по степеням малого параметра

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) \sim F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \mu F_{i1}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \ldots, i = \overline{1, k},$$

а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения системы (1). Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы $a_i(\mu)$, $i = \overline{1, k}$, их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации описанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложения определяющих элементов, т.е. корней системы нулевого приближения

$$F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, i = \overline{1, k}. \tag{2}$$

Оказывается, что если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то корнями системы (2), как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности. Одной из них является вырожденная задача, а вторая подбирается в результате анализа системы (2), что представляет собой неформальный этап исследования.

Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов.

3. Задачи со скалярным управлением. Впервые описанная в предыдущем разделе методика была применена к задаче оптимального быстродействия для линейной стационарной системы со скалярным управлением

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + A_2 z + b_1 u, y(0) = y_*, y(T) = 0, \\ \mu \dot{z} &= A_3 y + A_4 z + b_2 u, z(0) = z_*, z(T) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in [0, T], J(u) = T \to min,$$

где $0 < \mu \ll 1$, $y \in R^n$, $z \in R^m$. Предполагается, что матрица A_4 устойчивая, т.е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

В [14] предложен алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений любого порядка в задаче (3). Определяющими элементами в данном случае являются точки переключения оптимального управления и момент оптимального быстродействия. Точки переключения делятся на две группы. К первой группе относятся точки, близкие к соответствующим точкам переключения в первой базовой задаче

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u, y(0) = y_*, y(T) = 0,$$
$$|u(t)| \le 1, t \in [0,T], J_0(u) = T \to \min, \tag{4}$$

$$A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, b_0 = b_1 - A_2 A_4^{-1} b_2.$$

Вторая группа содержит точки, отстоящие от момента оптимального быстродействия на величину порядка μ. Число этих точек равно числу точек переключения решения второй базовой задачи

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + b_2 u, z(-\infty) = A_4^{-1} b_2, |u(s)| \le 1, s \le 0,$$
$$z(0) = 0, J_1(u) = \int_{-\infty}^{0} (u(s)+1) ds \to \min.$$

Момент оптимального быстродействия в исходной сингулярно возмущенной задаче близок к конечному моменту в задаче (4).

Вычислительная процедура алгоритма помимо решения базовых задач включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений и нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Впрочем асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быть сформировано непосредственно после решения этих задач.

В [15] разработан алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений в задаче терминального управления линейной стационарной сингулярно возмущенной системой с фиксированной длительностью процесса и подвижным правым концом траекторий

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, y(0) = y_*,$$
$$\mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u, z(0) = z_*,$$
$$\tag{5}$$
$$|u(t)| \le 1, t \in T = [0, t^*], H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2,$$
$$c_1^T y(t^*) + \mu c_2^T z(t^*) \to \max,$$

где $0 < \mu \ll 1$, $y \in R^n$, $z \in R^m$, $g_1 \in R^{n_1}$, $g_2 \in R^{m_1}$. Как в предыдущей задаче матрица A_4 является устойчивой.

Определяющими элементами в задаче (5) являются точки переключения оптимального управления. Как и в задаче (3) они делятся на две группы. Исходная задача в данном случае распадается на две базовые задачи, первая из которых имеет вид

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u, y(0) = y_*, |u(t)| \le 1, t \in T,$$
$$H_1 y(t^*) = g_1, c_1^T y(t^*) \to \max.$$

Вторая базовая задача представима в виде

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z - u^0(t^*) b_2 u, z(-\infty) = -u^0(t^*) A_4^{-1} b_2,$$

$$|u(s)| \le 1, s \le 0, H_2 z(0) = H_2 A_4^{-1} A_3 y^0(t^*) + g_2,$$

$$c^T z(0) - |b_0^T \psi^0(t^*)| \int_{-\infty}^{0} (u(s)+1) ds \to \max .$$

где $c = c_2 + (A_2 A_4^{-1})^T \psi^0(t^*)$, $u^0(t)$ – оптимальное управление в первой базовой задаче, а $y^0(t)$, $\psi^0(t)$ – соответствующие ему решения прямой и сопряженных систем. Как и в предыдущем случае асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быть построено непосредственно после решения базовых задач.

Обобщению полученных в [14,15] результатов на нелинейные сингулярно возмущенные системы вида

$$\dot{y} = a_1(y,t) + A_1(y,t)z + b_1(y,t)u,$$

$$\mu \dot{z} = a_2(y,t) + A_2(y,t)z + b_2(y,t)u$$

посвящены работы [16,17].

Асимптотической оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости посвящены работы [18,19]. Предложенные в этих работах алгоритмы развивают результаты, полученные в [14,15].

В [20] разработан алгоритм, позволяющий строить асимптотически субоптимальное управление заданного порядка в задаче об управлении минимальной силой для линейной сингулярно возмущенной системы

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, \mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u,$$

$$y(0) = y_* \ne 0, z(0) = z_*, y(t^*) = 0, z(t^*) = 0, \tag{6}$$

$$J(u) = \sup_{t \in [0,t^*]} |u(t)| \to min$$

со скалярным управлением и устойчивой матрицей A_4. Определяющими элементами в этой задаче являются точки переключения оптимального управления и оптимальная интенсивность (оптимальное значение критерия качества). Базовые задачи в данном случае имеют вид

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u, y(0) = y^0, y(t^*) = 0,$$

$$J_1(u) = \sup_{t \in [0,t^*]} |u(t)| \to min.$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + b_2 u, s \le 0, z(-\infty) = A_4^{-1} b_2, z(0) = 0, |u(s)| \le 1,$$

$$|u(s)| \le 1, J_2(u) = \int_{-\infty}^{0} (u(s)+1) ds \to \min .$$

Статья [21] посвящена построению асимптотически субоптимальных управлений в линейно-квадратичной задаче

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, y(0) = y_* \ne 0, y(t^*) = 0,$$

$$\mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u, z(0) = z_*, z(t^*) = 0, \tag{7}$$

$$|u(t)| \le 1, t \in [0,t^*], J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} u^2(t) dt \to min,$$

где $0 < \mu \ll 1$, $y \in R^n$, $z \in R^m$, со скалярным управлением и устойчивой матрицей A_4. Определяющими элементами в этой задаче являются моменты насыщения оптимального управления и начальные значения (в момент t^*) сопряженных переменных. Под моментами насыщения понимаются крайние точки промежутков, на которых оптимальное управление по модулю равно 1. Задача (7) распадается на две базовые задачи вида

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u, y(0) = y_* \neq 0, y(t^*) = 0,$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in [0, t^*], J_1(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t^*} u^2(t)dt \to min.$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + b_2 u, z(0) = 0, z(-\infty) = -u^0(t^*)A_4^{-1}b_2,$$

$$|u(s)| \leq 1, s \leq 0, J_2(u) = \int_{-\infty}^{0}((u(s) - b_0^T\psi^0(t^*))^2 - c^2)ds \to \min.$$

Здесь $c = u^0(t_*) - b_0^T\psi^0(t_*)$, $u^0(t)$ – оптимальное управление в первой базовой задаче, $\psi^0(t)$ – соответствующее ему решение сопряженной системы.

4. Задачи с многомерным управлением. В рассмотренных в предыдущем разделе задачах управляющие воздействия считались скалярными, однако полученные результаты могут быть легко перенесены на системы с многомерными управлениями $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, если на значения последних наложены ограничения

$$a_i \leq u_i(t) \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, r.$$

Вместе с тем во многих прикладных задачах с многомерными управлениями прямые ограничения на их значения имеют вид

$$||u(t)|| \leq a,$$

где $||u|| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_r^2}$ – евклидова норма вектора u. В первую очередь, это относится к задаче управления механическими системами, в которых управляющие воздействия, как правило, являются ограниченные по величине силы.

В [22] предложен алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка в задаче оптимального быстродействия

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + B_1 u, y(0) = y_*, y(T) = 0,$$

$$\mu\dot{z} = A_3 y + A_4 z + B_2 u, z(0) = z_*, z(T) = 0, \tag{8}$$

$$||u(t)|| \leq 1, t \in [0, T], J(u) = T \to min,$$

где $0 < \mu \ll 1$, $u \in R^r$, $y \in R^n$, $z \in R^m$. Предполагается, что матрица A_4 устойчива, т.е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны. Определяющими элементами в задаче (8) являются момент оптимального быстродействия и значения вектора сопряженных переменных в этот момент. Исходная задача в данном случае распадается на две базовые задачи. Первой из них является вырожденная задача

$$\dot{y} = A_0 y + B_0 u, y(0) = y_*, y(T) = 0,$$

$$||u(t)|| \leq 1, t \in [0, T], J_0(u) = T \to \min,$$

$$A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2,$$

а вторая базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + B_2 u, z(-\infty) = -A_4^{-1} B_2 \Delta^0(T_0)/||\Delta^0(T_0)||, ||u(s)|| \le 1, s \le 0,$$

$$z(0) = 0, J_1(u) = \int_{-\infty}^{0} (u^T(s)\Delta^0(T_0) - ||\Delta^0(T_0)||) ds \to \max,$$

где $\Delta^0(t) = B_0^T \psi^0(t)$, а $\psi^0(t)$, T_0 – вектор сопряженных переменных, соответствующий оптимальному управлению, и время быстродействия в первой базовой задаче. Вычислительная процедура алгоритма помимо решения базовых задач включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений и нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Впрочем асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быть сформировано непосредственно после решения этих базовых задач.

В [23] разработан алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений в задаче терминального управления линейной стационарной сингулярно возмущенной системой с фиксированной длительностью процесса и подвижным правым концом траекторий

$$\begin{gathered} \dot{y} = A_1 y + A_2 z + B_1 u, y(0) = y_*, \\ \mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + B_2 u, z(0) = z_*, \\ ||u(t)|| \le 1, t \in [0, t^*], H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2, \\ c_1^T y(t^*) + \mu c_2^T z(t^*) \to \max, \end{gathered} \tag{9}$$

где $0 < \mu \ll 1$, $u \in R^r$, $y \in R^n$, $z \in R^m$, $g_1 \in R^{n_1}$, $g_2 \in R^{m_1}$. Как в предыдущей задаче матрица A_4 является устойчивой. Определяющими элементам в задаче (9) являются множители Лагранжа. Базовые задачи в этом случае имеют вид

$$\dot{y} = A_0 y + B_0 u, y(0) = y_*, ||u(t)|| \le 1, t \in [0, t^*]$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, J_0(u) = c_1^T y(t^*) \to \max.$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + B_2 u, z(-\infty) = -A_4^{-1} B_2 u^0(t^*), ||u(s)|| \le 1, s \le 0,$$

$$H_2 z(0) = H_2 A_4^{-1} A_3 y^0(t^*) + g_2, J_1(u) = c_0^T z(0) + \int_{-\infty}^{0} (u^T(s)\Delta^0(t^*) - ||\Delta^0(t^*)||) ds \to \max,$$

где $c_0 = c_2 + (A_2 A_4^{-1})^T \psi^0(t^*)$, $u^0(t)$ – оптимальное управление в первой базовой задаче, $y^0(t)$, $\psi^0(t)$ – соответствующее ему решения прямой и сопряженной систем.

Обобщению полученных в [22,23] результатов на нелинейные сингулярно возмущенные системы вида

$$\dot{y} = a_1(y,t) + A_1(y,t) z + B_1(y,t) u,$$

$$\mu \dot{z} = a_2(y,t) + A_2(y,t) z + B_2(y,t) u$$

посвящены работы [24,25].

В статье [26] результаты, полученные в [20], перенесены на системы с многомерными управлениями.

В [27] исследована задача оптимизации линейной сингулярно возмущенной системы с интегральным квадратичным критерием качества

$$\dot{y} = A_1(t) y + A_2(t) z + B_1(t) u, y(t_*) = y_*,$$

$$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, \tag{10}$$

$$y(t^*) = 0, z(t^*) = 0, J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (y^T M(t)y + \mu z^T L(t)z + u^T P(t)u)dt \to \min,$$

где $0 < \mu \ll 1$, $u \in R^r$, $y \in R^n$, $z \in R^m$, $M(t), L(t)$ – неотрицательно определенные, а $P(t)$ – положительно определенная симметрические матрицы для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что собственные значения матрицы $A_4(t)$ отрицательны в каждый момент времени $t \in [t_*, t^*]$. Определяющими элементами в задаче (10) являются начальные значения (в момент времени t^*) сопряженных переменных. Базовые задачи в этом случае принимают вид

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, y(t_*) = y_*, y(t^*) = 0,$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (y^T M(t)y + u^T P(t)u)dt \to \min,$$

$$A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t);$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, z(0) = A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*),$$

$$z(-\infty) = 0, J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (u^T(s)P(t^*)u(s))ds \to \min,$$

где $u^0(t), t \in [t_*, t^*]$, – оптимальное управление в первой базовой задаче.

Помимо асимптотических приближений к оптимальным программным управлениям в [27] построены асимптотические приближения нулевого и первого порядка в оптимальной обратной связи.

Вектор-функцию $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$ будем называть асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (t_*, y_*, z_*), $t_* < t^*$, имеет место

$$u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, – асимптотически субоптимальное программное управление N-го порядка.

В [28] результаты, полученные в [27] были обобщены на задачи с подвижным концом траекторий вида

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*,$$
$$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, \tag{11}$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2, J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^T P(t)u dt \to \min,$$

где $0 < \mu \ll 1$, $u \in R^r$, $y \in R^n$, $z \in R^m$, $g_1 \in R^{n_1}$, $g_2 \in R^{m_1}$. Как в предыдущей задаче предполагается, что все собственные значения матрицы $A_4(t)$ отрицательны в каждый момент времени $t \in [t_*, t^*]$. Определяющими элементам в задаче (11) являются множители Лагранжа. Базовые задачи в этом случае имеют вид

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, y(t_*) = y_*, H_1 y(t^*) = g_1,$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (y^T M(t)y + u^T P(t)u)dt \to \min,$$

$$A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t);$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, z(0) = H_2A_4^{-1}(t^*)(A_3(t^*)y^0(t^*) + B_2(t^*)u^0(t^*)) + g_2,$$

$$z(-\infty) = 0, J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}(u^T(s)P(t^*)u(s))ds \to \min,$$

где $u^0(t)$, $y^0(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, – соответственно оптимальные управление и траектория в первой базовой задаче. Как и в [27] для данной задачи также построены асимптотические субоптимальные обратные связи нулевого и первого порядка.

5. Заключение. Статья содержит обзор асимптотических методов решения широкого класса задач оптимизации сингулярно возмущенный систем, разработанных в Минской школе по оптимальному управлению. Эти методы разработаны с помощью единой методики, в основу которой положена идея конечномерной параметризации оптимального управления. Основное достоинство предложенных алгоритмов состоит в том, что при их применении исходные сингулярно возмущенные задачи распадаются на две задачи оптимального управления меньшей размерности. Такая декомпозиция дает дает возможность эффективно решать задачи с большим числом фазовых переменных.

Литература

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Определение структуры обобщенного решения нелинейных задач оптимального управления // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 3. С. 525–528.
3. *Дмитриев М.Г.* Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. №. 10. С. 1693–1698.
4. *Курина Г.А.* Асимптотическое решение одного класса сингулярно возмущенных задач оптимального управления // Прикл. мат. и мех. 1983. Т. 47. вып. 3. С. 363–371.
5. *Ardema M.D.* Singular perturbations and asymptotic expansions in nonlinear optimal control // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. 1987. V. 95. P. 3-–18.
6. *O'Malley R.E.Jr.* Singular perturbations and optimal control // Lect. Notes Math. 1978. V. 680. P. 171-–218.
7. *Sannuti P.* Asymptotic expansions of singularly perturbed quasi-linear optimal systems // SIAM J. Control and Optimiz. 1975. V. 13, № 3. P. 572-–592.
8. *Гичев Т.Р., Дончев А.Л.* Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. мат. и мех. 1979. Т. 43, вып. 3. С. 466-–474.
9. *Гичев Т.Р.* Сингулярные возмущения в одном классе задач с оптимального управления с интегральным выпуклым критерием // Прикл. мат. и мех. 1984. Т. 48, вып. 6. С. 898-–903.
10. *Дмитриев М.Г.* О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1972. Т. 12. № 3. С. 788–791.
11. *Binding P.* Singularly perturbed optimal control problems. 1: Convergence // SIAM J. Control and Optimiz. 1976. V. 14, № 4. P. 591-–612.
12. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20, № 1. P. 111-–113.
13. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
14. *Калинин А.И.* Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия // Прикл. мат. и мех. 1989. Т. 53. вып. 6. С. 880–889.
15. *Калинин А.И.* Метод асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи терминального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1990. Т. 30. № 3. С. 266–378.
16. *Калинин А.И.* Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной нелинейной задачи быстродействия // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. №. 4. С. 585–596.

17. *Калинин А.И.* Алгоритм асимптотического решения задачи терминального управления нелинейной сингулярно возмущенной системой // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1993. Т. 33. №. 12. С. 1762–1775.
18. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотическое решение задачи быстродействия для линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №. 8. С. 1275–1284.
19. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотическая оптимизация линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1995. Т. 35. №. 9. С. 1299–1312.
20. *Kalinin A. I., Polevikov S.V.* Asymptotic Solution Jf the Minimum Forse Problem for Linear Singularly Perturbed Systems// Automatica. 1998. V. 34. №. 5. P. 625–630.
21. *Калинин А.И.* Асимптотический метод решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38. №. 9. С. 1473–1483.
22. *Калинин А.И., Семенов К.В.* Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2004. Т. 44. №. 3. С. 432–443.
23. *Калинин А.И., Семенов К.В.* Асимптотический метод решения сингулярно возмущенной линейной задачи терминального управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. №. 5. С. 32–39.
24. *Грудо Я.О., Калинин А.И.* Асимптотический метод решения задачи оптимального быстродействия для нелинейной сингулярно возмущенной системы // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48. №. 11. С. 1942–1951.
25. *Грудо Я.О., Калинин А.И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных сингулярно возмущенных систем при ограничении управления гиперсферой // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. №. 11. С. 1472–1481.
26. *Калинин А.И.* Асимптотический метод решения задачи об управлением минимальной силой для линейной сингулярно возмущенной системы // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2011. Т. 51. №. 12. С. 1–12.
27. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2015. Т. 55. №. 2. С. 194–206.
28. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с терминальными ограничениями на траектории // Автомат. и телемех. 2020. вып. 6. С. 988–1002.

A. I. Kalinin, L. I. Lavrinovich

Small parameter method in optimization problems of singularly perturbed dynamical systems

Summary

An overview of the results obtained for optimization problems of singularly perturbed systems in the Minsk School of Optimal Control is given.