Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Г. Петров, Асимптотические методы решения уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований,
Дифференц. уравнения, 2004, том 40, номер 5, 626–638

https://www.mathnet.ru/de11070

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
22 июня 2025 г., 05:58:54

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 5, с. 626–638

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.7

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

© 2004 г. **А. Г. Петров**

Предлагается новый метод построения асимптотического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона (ОДУГ) в предположении, что гамильтониан является периодической функцией времени и представляется рядом по малому параметру. Приведены алгоритмы решения прямой задачи – построение асимптотического ряда для отображения на фазовом потоке по данному гамильтониану и обратной задачи – построения гамильтониана по данному отображению.

Предлагаемые алгоритмы базируются на новом представлении канонической замены переменных в параметрическом виде. Общая зависящая от времени замена выражена через функцию параметров. Для не зависящей от времени канонической замены полный дифференциал введенной функции совпадает с дифференциалом производящей функции, введенной Пуанкаре [1]. Общий критерий параметризации канонической замены совпадает с условием однозначности функции Пуанкаре. Получен закон преобразования гамильтониана при произвольной канонической замене в параметрической форме, зависящей от времени.

Асимптотические решения строятся в виде разложения по степеням малого параметра для отображения Пуанкаре через период. В указанном методе нет необходимости определять замену переменных. Отображение, усредненный гамильтониан и инвариантные поверхности точек Пуанкаре через период находятся сразу в исходных переменных. Приведены примеры асимптотического решения и качественного анализа нелинейных ОДУГ, на которых демонстрируются преимущества новых алгоритмов перед известными [2, 3].

1. Параметрическая форма канонических преобразований. Рассмотрим общий вид уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ – N-мерные векторы, $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ – непрерывно дифференцируемая в открытой области переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ функция Гамильтона.

Будем рассматривать канонические преобразования переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$, т.е. такие преобразования, при которых любая система уравнений Гамильтона (1) преобразуется снова в уравнения Гамильтона. Общий результат параметризации канонической замены переменных в гамильтоновых системах сформулируем в виде теоремы [4].

Теорема 1. *Пусть преобразование переменных* $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ *записано в параметрической форме*

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{y} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{y} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}, \tag{2}$$

где $\Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. *Тогда*

1) якобианы двух преобразований $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ *и* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ *тождественно равны*

$$\frac{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = J(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}); \tag{3}$$

2) при $J(t_0, x_0, y_0) \neq 0$ *существует окрестность точки* $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, *в которой преобразование (2) переменных* $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ *переводит гамильтонову систему* $H = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ *в гамильтонову систему* $\tilde{H} = \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ *по закону*

$$\Psi_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}), \tag{4}$$

где аргументы $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ *и* $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ *в гамильтонианах* H *и* $\tilde{H}$ *выражены через параметры* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *по формулам (2).*

Доказательство. 1) Матрицы якобианов A_- и A_+ выражаются через симметричную матрицу гессиана $\mathbf{\Psi} = |\Psi_{ij}|$, $\Psi_{ij} = \partial^2\Psi/\partial z_i \partial z_j$, $i, j = \overline{1, 2N}$, $z_k = x_k$, $z_{N+k} = y_k$,

$$A_\pm = E \pm \frac{1}{2} I\mathbf{\Psi}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E_N \\ -E_N & 0 \end{pmatrix},$$

где E_N и E – единичные матрицы порядка N и $2N$, I – симплектическая матрица. Определитель матриц $\pm I$ равен единице. Матрицы $IA_- = (1/2)\mathbf{\Psi} + I$ и $I_-A_+ = (1/2)\mathbf{\Psi} - I$ транспонированные. Следовательно, их определители и определители матриц $A_\pm$ равны $\det A_- = \det A_+ = J$, что и требуется доказать.

2) Доказательство второго пункта теоремы проведем с помощью критерия каноничности, согласно которому дифференциальная форма $\delta F = \mathbf{P}\delta\mathbf{Q} - \mathbf{p}\delta\mathbf{q} - (\tilde{H} - H)\delta t$ является полным дифференциалом некоторой функции $\delta F(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_t\delta t + F_\mathbf{x}\delta\mathbf{x} + F_\mathbf{y}\delta\mathbf{y}$ [2, 3].

Подставляем в дифференциальную форму δF вместо $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ и $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ их выражения (2) через параметры $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и заменяем $\tilde{H} - H$ на Ψ_t согласно (4). После очевидных преобразований получаем

$$\delta F = \left(\mathbf{y} - \frac{1}{2}\Psi_\mathbf{x}\right)\left(\delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}t}\delta t + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{yx}}\delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{yy}}\delta\mathbf{y}\right) -$$

$$- \left(\mathbf{y} + \frac{1}{2}\Psi_\mathbf{x}\right)\left(\delta\mathbf{x} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}t}\delta t - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{yx}}\delta\mathbf{x} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{yy}}\delta\mathbf{y}\right) - \Psi_t\delta t =$$

$$= \mathbf{y}(\Psi_{\mathbf{y}t}\delta t + \Psi_{\mathbf{yx}}\delta\mathbf{x} + \Psi_{\mathbf{yy}}\delta\mathbf{y}) - \Psi_\mathbf{x}\delta\mathbf{x} - \Psi_t\delta t = \delta(\mathbf{y}\Psi_\mathbf{y} - \Psi),$$

что и требовалось доказать.

Описанный способ канонических замен относится к гамильтоновым системам произвольного порядка N. Цель работы – установить, для каких канонических преобразований существует параметризация.

2. Производящие функции. Каноническое преобразование можно представить также через производящие функции $S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$ и $S_2(t, \mathbf{Q}, \mathbf{p})$ [2, 3, 5, 6] такие, что $dS_1 = \mathbf{p}d\mathbf{q} + \mathbf{Q}d\mathbf{P} + (\tilde{H} - H)dt$, $\det S_{1\mathbf{qP}} \neq 0$, $dS_2 = -\mathbf{q}d\mathbf{p} - \mathbf{P}d\mathbf{Q} + (\tilde{H} - H)dt$, $\det S_{2\mathbf{pQ}} \neq 0$. Введем новую производящую функцию

$$\Phi = \frac{1}{2}[S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) - \mathbf{qP} + S_2(t, \mathbf{Q}, \mathbf{p}) + \mathbf{Qp}].$$

Ее дифференциальная форма такова:

$$d\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \begin{vmatrix} Q_i - q_i & P_i - p_i \\ dQ_i + dq_i & dP_i + dp_i \end{vmatrix} + (\tilde{H} - H)\,dt. \tag{5}$$

При $dt = 0$ дифференциальная форма $d\Phi$ введена Пуанкаре в 1889 г. (см. [1, с. 191]). Наблюдение Пуанкаре, что $d\Phi$ является полным дифференциалом для автономного канонического преобразования, изложено также в монографии [3, с. 337].

Разрешим уравнения (2) относительно $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и $\Psi_\mathbf{y}, \Psi_\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = (1/2)(\mathbf{q} + \mathbf{Q}), \quad \mathbf{y} = (1/2)(\mathbf{p} + \mathbf{P}), \quad \Psi_\mathbf{y} = \mathbf{Q} - \mathbf{q}, \quad \Psi_\mathbf{x} = -\mathbf{P} + \mathbf{p}. \tag{6}$$

Отсюда при условии, что якобиан замены (6) отличен от нуля, т.е. $\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \neq 0$, следует равенство $d\Phi = d\Psi$ и тождественность функций Φ и Ψ.

Таким образом, функция Ψ является параметризованной функцией Пуанкаре и обобщает ее для произвольной неавтономной канонической замены переменных. Из равенств (3) и (6) следует, что

$$\frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \frac{1}{J} = \frac{1}{2^{2N}}\det(E + A), \quad A = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})}, \tag{7}$$

и условие невырожденности замены (6) можно записать так: $\det(E+A) \neq 0$, где A и E – матрица Якоби и единичная матрица соответственно.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Если в открытой односвязной области* $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \Omega$ *преобразование* $\mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ *каноническое и ни одно из собственных значений матрицы Якоби* A *не равно* -1, *то в* Ω *существует параметризация (2).*

К этому условию пришел Пуанкаре, рассматривая преобразования $\mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ на фазовом потоке. Условие теоремы 2 получено им из требования однозначности функции $\Phi(\mathbf{q}+\mathbf{Q},\mathbf{p}+\mathbf{P})$ [1, с. 217].

3. Локальный критерий параметризуемости канонического преобразования. Введем $2N$-мерные векторы $\mathbf{r} = (\mathbf{q},\mathbf{p})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{R} = (\mathbf{Q},\mathbf{P})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathrm{T}}$ (т – знак транспонирования), якобиеву матрицу $A = \|A_{ij}\|$ и матрицу гессиана $\mathbf{\Psi} = \|\Psi_{ij}\|$,

$$A_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial r_j}, \quad \Psi_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i \partial z_j}, \quad i,j = \overline{1,2N}. \tag{8}$$

Будем использовать локальный критерий каноничности замены переменных $\mathbf{q},\mathbf{p} \to \mathbf{Q},\mathbf{P}$ [2, 3, 5, 6]

$$A^{\mathrm{T}} I A = I. \tag{9}$$

Следуя [3, 5, 6], будем называть матрицу A, удовлетворяющую критерию каноничности (9), симплектической матрицей, блочную матрицу I – симплектической единицей.

Пусть замена $\mathbf{q},\mathbf{p} \to \mathbf{Q},\mathbf{P}$ представлена в параметрическом виде (2). Это означает выполнение равенств $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{z} - (1/2)I\mathbf{\Psi}\delta\mathbf{z}$, $\delta\mathbf{R} = \delta\mathbf{z} + (1/2)I\mathbf{\Psi}\delta\mathbf{z}$. В матричном виде эти равенства таковы:

$$\delta\mathbf{R} = A\delta\mathbf{r}, \quad A = \left(E + \frac{1}{2}I\mathbf{\Psi}\right)\left(E - \frac{1}{2}I\mathbf{\Psi}\right)^{-1}. \tag{10}$$

На матричном языке каноничность отображения $\mathbf{q},\mathbf{p} \to \mathbf{Q},\mathbf{P}$ означает симплектичность матрицы A, а существование параметризации – существование представления (10) матрицы A через симметричную матрицу $\mathbf{\Psi}$. В связи со сказанным введем

Определение 1. Матрица A, представимая через симметричную матрицу $\mathbf{\Psi}$ по второй формуле (10) при $J = \det(E - (1/2)I\mathbf{\Psi}) \neq 0$, называется параметризуемой.

С учетом введенного определения можно привести следствия из теорем 1 и 2, являющиеся их переформулировкой на матричный язык.

Следствие 1. *Параметризуемая матрица симплектична.*

Следствие 2 (локальный критерий параметризуемости). *Симплектическая матрица параметризуема тогда и только тогда, когда* $\Delta = \det(E+A) \neq 0$.

Следствие 3. *Если матрицы* A *и* $\mathbf{\Psi}$ *связаны соотношением (10), то*

1) имеет место представление

$$\mathbf{\Psi} = 2I(E+A)^{-1}(E-A) \quad \textit{при} \quad \Delta = \det(E+A) \neq 0; \tag{11}$$

2) если $\mathbf{\Psi}$ *симметрична, то* A *симплектична, если* A *симплектична, то* $\mathbf{\Psi}$ *симметрична;*

3) если выполнено одно из условий: симметричность $\mathbf{\Psi}$ *или симплектичность* A, *то для определителей* $\det(E \pm (1/2)I\mathbf{\Psi})$ *и* Δ *справедливы тождества*

$$\det\left(E + \frac{1}{2}I\mathbf{\Psi}\right) = \det\left(E - \frac{1}{2}I\mathbf{\Psi}\right) = J, \quad \Delta = \frac{2^N}{J}. \tag{12}$$

Представление (10) выражает элементы матрицы A ($4N^2$ чисел), связанные между собой условием симплектичности (9), через элементы симметричной матрицы Ψ ($2N^2+N$ независимых чисел).

Формула (11) – результат разрешения уравнения (10) относительно матрицы $\mathbf{\Psi}$ с помощью вытекающего из уравнения (10) равенства $(E+A)I\mathbf{\Psi} = 2(A-E)$. Тождества (12) вытекают из равенства (7).

4. Инвариантность параметризуемости. На "неинвариантность производящих функций относительно выбора системы координат" неоднократно обращается внимание в монографии [3]. Покажем, что свойство параметризуемости канонического преобразования является инвариантным, в чем и состоит ее большое преимущество.

Рассмотрим, как меняются соотношения (10) при переходе к другому локальному базису. Новый базис назовем каноническим, если он получен из старого с помощью канонического преобразования. При переходе к новому каноническому базису векторы $\delta\mathbf{R}$ и $\delta\mathbf{r}$ преобразуются с помощью симплектической матрицы B

$$\delta\mathbf{R}' = B\delta\mathbf{R}, \quad \delta\mathbf{r}' = B\delta\mathbf{r}, \quad BIB^{\mathrm{T}} = I. \tag{13}$$

Докажем теорему.

Теорема 3. *Пусть симплектическая параметризуемая матрица A определяет отображение $\delta\mathbf{R} = A\delta\mathbf{r}$. Тогда в любом каноническом базисе (13) отображение (10) представится в виде*

$$\delta\mathbf{R}' = A'\delta\mathbf{r}', \quad A' = \left(E + \frac{1}{2}I\mathbf{\Psi}'\right)\left(E - \frac{1}{2}I\mathbf{\Psi}'\right)^{-1}, \tag{14}$$

в котором матрицы A' и Ψ' преобразуются так:

$$A' = BAB^{-1}, \quad \mathbf{\Psi}' = (B^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{\Psi}B^{-1}. \tag{15}$$

При этом матрица A' останется симплектической, а матрица $\mathbf{\Psi}'$ – симметричной.

Теорема 3 согласуется с результатом Ванштейна об инвариантности функции Пуанкаре относительно канонического преобразования [3, с. 337].

Доказательство закона преобразования для A и представления A через симметричную матрицу $\mathbf{\Psi}'$ проводится с помощью следующих очевидных равенств:

$$\delta\mathbf{R}' = B\delta\mathbf{R} = BA\delta\mathbf{r} = A'B\delta\mathbf{r} \Rightarrow A' = BAB^{-1},$$

$$E + A' = B(E+A)B^{-1} \Rightarrow \det(E+A') = \det(E+A).$$

Из полученного закона преобразования матрицы A и симплектичности матрицы B следует симплектичность матрицы A'. Из равенства определителей следует, что локальный критерий параметризуемости (следствие 2) матрицы A' сохраняется во всех симплектических базисах.

Закон преобразования матрицы $\mathbf{\Psi}$ устанавливается так. Из равенства (11) для матрицы $\mathbf{\Psi}'$ следует, что

$$\mathbf{\Psi}' = 2I(E+A')^{-1}(E-A') = 2I(B(E+A)B^{-1})^{-1}B(E-A)B^{-1} =$$

$$= 2IB(E+A)^{-1}B^{-1}B(E-A)B^{-1} = 2IB(E+A)^{-1}(E-A)B^{-1}.$$

Из равенства (11) для матрицы $\mathbf{\Psi}$ находим комплекс $(E+A)^{-1}(E-A) = -(1/2)I\mathbf{\Psi}$ и, подставляя его в предыдущее равенство, получаем $\mathbf{\Psi}' = -IBI\mathbf{\Psi}B^{-1}$. Заменяя BI равным, согласно критерию симплектичности матрицы B, выражением $I(B^{\mathrm{T}})^{-1}$, получим требуемый закон преобразования (15).

Из теоремы 3 следует, что свойства симплектичности и параметризуемости матрицы инвариантны по отношению ко всем каноническим преобразованиям базиса. Рассмотрим более полно это преимущество параметризации перед классическим методом производящих функций [3] для систем с одной степенью свободы.

5. Системы с одной степенью свободы. Как известно, для одной степени свободы преобразование будет каноническим тогда и только тогда, когда преобразование сохраняет площадь. Таким образом, будем рассматривать преобразования, у которых определитель

(2×2)-матрицы Якоби A равен единице. Матрица, подчиненная такому условию, симплектическая. Условие ее параметризуемости (следствие 2) упростится так:

$$\det(E + A) = 2(1 + i_1) \neq 0, \quad i_1 = (1/2)(A_{11} + A_{22}), \tag{16}$$

а параметрическое представление (10) через симметричную матрицу примет вид

$$A = (1/J)[(2 - J)E + I\Psi], \quad J = 1 + (1/4)(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2) \neq 0. \tag{17}$$

Из группы симплектических матриц $\{B\}$ выделим подгруппу ортогональных матриц

$$C(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Они задают ортогональные базисы, в которых будем рассматривать канонические преобразования. Учитывая эти упрощения, из теоремы 3 получим

Следствие 4. *Пусть матрица A с $\det A = 1$ удовлетворяет условию (16). Тогда в любом ортогональном базисе*

$$\begin{pmatrix} \delta Q' \\ \delta P' \end{pmatrix} = C(-\alpha)\begin{pmatrix} \delta Q \\ \delta P \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta p' \end{pmatrix} = C(-\alpha)\begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix}$$

каноническое преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} \delta Q' \\ \delta P' \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta p' \end{pmatrix}, \quad A' = \frac{1}{J}((2 - J)E + I\Psi'),$$

в котором матрицы A' и Ψ' преобразуются по одному закону: $A' = C(-\alpha)AC(\alpha)$, $\Psi' = C(-\alpha)\Psi C(\alpha)$.

Если условие $i_1 + 1 \neq 0$, то элементы матрицы Ψ' можно выразить через элементы матрицы A':

$$\Psi'_{xx} = -\frac{2A'_{21}}{1 + i_1}, \quad \Psi'_{yy} = \frac{2A'_{12}}{1 + i_1}, \quad \Psi'_{xy} = \frac{(A'_{11} - A'_{22})}{1 + i_1}, \quad i_1 = \frac{1}{2}(A'_{11} + A'_{22}).$$

Поскольку i_1 и $J = 2/(i_1 + 1)$ – инварианты, то условие параметризуемости (16) выполняется или не выполняется во всех ортогональных базисах.

Совсем не так обстоит дело, если воспользоваться классическим методом производящих функций. Например, каноническое преобразование $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$ выражается через производящую функцию $S(q, P)$ с помощью соотношений $Q = S_P(q, P)$, $p = S_q(q, P)$ при условии $\partial^2 S/\partial q \partial P \neq 0$, которое существенно зависит от выбора базиса. При неудачном выборе базиса представление преобразования через $S(q, P)$ может не существовать.

Пример 1. Построим параметрическое представление однопараметрического семейства канонических преобразований Чирикова [7] $Q = q + K\sin p$, $P = q + K\sin p + p$.

Из неравенства (16) получим, что параметризация существует на всей бесконечной плоскости переменных q, p при $i_1 + 1 = (1/2)(\partial Q/\partial q + \partial P/\partial p) + 1 = 2 + (1/2)K\cos p > 0$, т.е. при $|K| < 4$. Функция Ψ определяется из уравнения (5):

$$\Psi = -\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}Kq\sin p - K\cos p, \quad x = q + \frac{1}{2}K\sin p, \quad y = \frac{1}{2}q + p + \frac{1}{2}K\sin p.$$

Ее можно представить как функцию x, y сходящимся при $|K| < 4$ рядом

$$\Psi(x,y,K) = -\frac{1}{2}x^2 - K\cos\left(y - \frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{8}K^2\sin^2\left(y - \frac{1}{2}x\right) +$$

$$+\frac{1}{32}K^3\cos\left(y - \frac{1}{2}x\right)\sin^2\left(y - \frac{1}{2}x\right)\ldots \tag{18}$$

Диапазон параметра K, при котором существует производящая функция, зависит от системы координат, в которой она вычисляется. Так, функция $S(P,q)$ существует при всех значениях параметра K. При замене $q' = p$, $p' = -q$ производящая функция будет существовать лишь при $|K| < 1$.

В примерах 4, 5 будет показано еще одно замечательное свойство функции $\Psi(x,y)$. Она приближает инвариантные кривые для последовательности точек отображения Пуанкаре.

Пример 2. Найдем параметризацию преобразования поворота $Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$, $P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$.

Параметризация существует при $1+i_1 = 1+\cos\alpha \neq 0$. Отсюда следует, что на окружности $[0,2\pi)$ исключается только одна точка $\alpha = \pi$. При $\alpha \neq \pi$ параметризация определяется функцией $\Psi = -(q^2+p^2)\operatorname{tg}(\alpha/2)$. Как известно [2, 3], производящие функции не существуют в двух точках на окружности $\pi/2, 3\pi/2$ или $0, \pi$.

Гидродинамическая интерпретация канонических преобразований при $N = 1$. Система уравнений Гамильтона определяет движение частиц несжимаемой жидкости с гамильтонианом системы, равным функции тока. Каноническое преобразование заменяет одно течение на другое. Каноническим преобразованием можно достичь существенного упрощения гамильтониана. В этом смысле метод канонических преобразований аналогичен методу конформных отображений для решения задач потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости. Отмеченные выше преимущества позволяют использовать параметризацию для изучения поведения частиц несжимаемой жидкости в нестационарном течении [8–11].

6. Параметризация отображений на фазовом потоке. Поставим задачу: найти отображение $\mathbf{X}(t_0), \mathbf{Y}(t_0) \to \mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)$ на фазовом потоке гамильтоновой системы (решение ОДУГ (1)). Согласно теории гамильтоновых систем [2, 3], такую задачу можно решить методом производящих функций или методом генератора Ли. Можно предложить третий весьма эффективный параметрический метод. Поставленная задача эквивалентна определению канонического преобразования, переводящего гамильтониан $H = 0$ в гамильтониан $H(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Применяя формулы (2), (4), получим искомое отображение [13]

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{x} - (1/2)\Psi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{y} + (1/2)\Psi_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} + (1/2)\Psi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{y} - (1/2)\Psi_{\mathbf{x}}, \tag{19}$$

$$\Psi_t(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = H(t,\mathbf{x} + (1/2)\Psi_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} - (1/2)\Psi_{\mathbf{x}}), \quad \Psi(t_0,\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{20}$$

Таким образом, задача Коши для ОДУГ (1) свелась к решению задачи (20). Отсюда вытекает следующий алгоритм построения асимптотического решения ОДУГ.

Определение 2. Пусть гамильтониан периодичен по времени $H(t+T,\mathbf{X},\mathbf{Y}) = H(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ и $\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)$ – решение ОДУГ с начальными условиями $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$. Тогда точки $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(t_0+Tn)$, $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}(t_0+Tn)$, $n = 0,1,2,\ldots$, называются точками последования Пуанкаре (ТПП).

Определение 3. Система ОДУГ с гамильтонианом, представимым в виде сходящегося на интервале $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ряда

$$H(t,\mathbf{X},\mathbf{Y},\varepsilon) = \varepsilon H_1(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \varepsilon^2 H_2(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \varepsilon^3 H_3(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \ldots, \tag{21}$$

называется системой стандартного вида.

Алгоритм 1. Пусть гамильтониан с периодом по времени T имеет стандартный вид (21), где все коэффициенты $H_1, H_2, H_3, \ldots$ дважды непрерывно дифференцируемы в открытой области. Тогда решение ОДУГ на периоде $t \in (t_0, t_0+T)$ определяется в параметрическом виде (19), в котором функция Ψ имеет разложение

$$\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon) = \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + \varepsilon^3\Psi_3 + O(\varepsilon^4),$$

$$\Psi_1(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int\limits_{t_0}^{t} H_1 dt, \quad \Psi_2(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int\limits_{t_0}^{t}\left[H_2 - \frac{1}{2}\{H_1,\Psi_1\}\right] dt,$$

$$\Psi_3(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int\limits_{t_0}^{t}\left[H_3 - \frac{1}{2}(\{H_2,\Psi_1\} + \{H_1,\Psi_2\}) + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \frac{1}{8}(H_{1\mathbf{xx}}\Psi_{1\mathbf{y}}\Psi_{1\mathbf{y}} - 2H_{1\mathbf{xy}}\Psi_{1\mathbf{x}}\Psi_{1\mathbf{y}} + H_{1\mathbf{yy}}\Psi_{1\mathbf{x}}\Psi_{1\mathbf{x}})\right] dt, \ldots,$$

ТПП вычисляются по рекуррентным формулам

$$\mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x} - (1/2)\Psi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{Y}_{n-1} = \mathbf{y} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{X}_n = \mathbf{x} + (1/2)\Psi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{Y}_n = \mathbf{y} - (1/2)\Psi_{\mathbf{x}}, \tag{23}$$

где функция Ψ имеет аргументы $\Psi(t_0 + T, \mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Фигурными скобками здесь и далее обозначены скобки Пуассона $\{g, f\} = g_{\mathbf{y}} f_{\mathbf{x}} - g_{\mathbf{x}} f_{\mathbf{y}}$.

Коэффициенты Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 находятся из разложения уравнения (20) по степеням ε в виде $\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots = 0$ и равенств $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$ Разложение (22) можно продолжать неограниченно.

7. Параметризация отображений на фазовом потоке автономной системы. Построение параметрического отображения на фазовом потоке автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $\bar{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ сводится к решению задачи Коши

$$\Psi_\tau(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar{H}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} - \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{\mathbf{x}}\right), \quad \bar{\Psi}(0,\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0, \quad \tau = t - t_0, \tag{24}$$

которая отличается от (20) тем, что функция $\bar{H}$ явно не зависит от времени. В этом случае решение обладает симметрией и формулы (22) для коэффициентов ряда существенно упростятся. Этот результат сформулируем в виде теоремы [12].

Теорема 4. *Пусть гамильтониан $\bar{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ явно не зависит от времени. Тогда если существует решение задачи (24) $\bar{\Psi}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})$ на полуинтервале $0 \le \tau < \tau_0$, то существует и решение на всем интервале $|\tau| \le \tau_0$, нечетное по аргументу τ, т.е. $\bar{\Psi}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\bar{\Psi}(-\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})$.*

Доказательство. Для автономной гамильтоновой системы имеет место интеграл $\bar{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \bar{H}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)$. Пусть $\bar{\Psi}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})$ – решение задачи (20). Тогда, определяя решение ОДУГ в параметрическом виде (19) и подставляя его в интеграл, получим

$$\bar{H}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{y}}, \mathbf{y} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}}\right) = \bar{H}\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{y}}, \mathbf{y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}}\right)$$

при $0 \le \tau < \tau_0$. С учетом этого равенства после замены $\tau = -\tilde{\tau}$, $\bar{\Psi} = -\tilde{\Psi}$ задача Коши (24) не изменится $\tilde{\Psi}_{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau},\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar{H}(\tilde{\tau},\mathbf{x} + (1/2)\tilde{\Psi}_{\mathbf{y},\mathbf{y}} - (1/2)\tilde{\Psi}_{\mathbf{x}},\varepsilon)$, $\tilde{\Psi}(0,\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Следовательно, существует решение $\bar{\Psi}(\tilde{\tau},\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\bar{\Psi}(-\tau,x,y)$ на отрицательном полуинтервале и функция $\Psi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})$ нечетная, что и требовалось доказать.

Следствие 5. *Решение задачи Коши (24) представляется рядом по нечетным степеням τ. С точностью до τ^5 функция Ψ имеет вид*

$$\bar{\Psi} = \tau\bar{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \frac{\tau^3}{24}[\bar{H}_{\mathbf{xx}}\bar{H}_{\mathbf{y}}^2 - 2\bar{H}_{\mathbf{xy}}\bar{H}_{\mathbf{x}}\bar{H}_{\mathbf{y}} + \bar{H}_{\mathbf{yy}}\bar{H}_{\mathbf{x}}^2] + O(\tau)^5. \tag{25}$$

Разложение (25) связывает автономный гамильтониан $\bar{H}$ и функцию Ψ, определяющую решение ОДУГ в виде параметрического отображения (24). Отсюда вытекают алгоритмы

асимптотического построения ОДУГ по данному автономному гамильтониану (прямая задача) и автономного гамильтониана по данному отображению (23) (обратная задача).

Алгоритм 2 решения прямой задачи. Пусть гамильтониан $\bar{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\varepsilon)$ явно не зависит от времени и имеет стандартный вид (21), где все коэффициенты $\bar{H}_1,\bar{H}_2,\bar{H}_3,\ldots$ дважды непрерывно дифференцируемы в открытой области. Тогда ТПП вычисляются по рекуррентным формулам (23), где функция $\bar{\Psi}$ имеет разложение

$$\bar{\Psi}(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon)=\varepsilon T\bar{H}_1(\mathbf{x},\mathbf{y})+\varepsilon^2T\bar{H}_2(\mathbf{x},\mathbf{y})+\varepsilon^3T\bar{H}_3(\mathbf{x},\mathbf{y})+$$

$$+(1/24)\varepsilon^3T^3[\bar{H}_{1\mathbf{xx}}\bar{H}_{1\mathbf{y}}^2-2\bar{H}_{1\mathbf{xy}}\bar{H}_{1\mathbf{x}}\bar{H}_{1\mathbf{y}}+\bar{H}_{1\mathbf{yy}}\bar{H}_{1\mathbf{x}}^2]+O(\varepsilon^4). \tag{26}$$

Для вывода разложения (26) используем метод "замораживания" параметра. Запишем гамильтониан (21) в виде $\bar{H}=\varepsilon\tilde{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\varepsilon_1)$, $\tilde{H}=\bar{H}_1+\varepsilon_1\bar{H}_2+\varepsilon_1^2\bar{H}_3+\ldots$ При $\varepsilon_1=\varepsilon$ ("замороженный" параметр) гамильтониан $\bar{H}$ совпадает с исходным. При $\varepsilon=\varepsilon_1$ из (25) для $\bar{\Psi}$ вытекает разложение

$$\bar{\Psi}=\varepsilon\tau\tilde{H}(\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon_1)+(1/24)(\varepsilon\tau)^3[\tilde{H}_{\mathbf{xx}}\tilde{H}_{\mathbf{y}}^2-2\tilde{H}_{\mathbf{xy}}\tilde{H}_{\mathbf{x}}\tilde{H}_{\mathbf{y}}+\tilde{H}_{\mathbf{yy}}\tilde{H}_{\mathbf{x}}^2]+O(\tau)^5.$$

Отсюда, "размораживая" параметр $\varepsilon_1=\varepsilon$, получим разложение (26), что и требовалось.

Алгоритм решения обратной задачи будет описан в п. 9.

8. Процедура усреднения. С помощью производящих функций процедура усреднения ОДУГ стандартного вида (21) описана в [3, 14]. Параметрический метод позволяет построить усредненный гамильтониан не менее эффективно. Усредненным гамильтонианом k-го приближения для системы ОДУГ (1) будем называть не зависящий от времени гамильтониан $\bar{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\varepsilon)$ такой, что его ТПП $\bar{\mathbf{X}}_n,\bar{\mathbf{Y}}_n$ связаны с ТПП исходной неавтономной системы (1) $\mathbf{X}_n,\mathbf{Y}_n$, $n=0,1,\ldots$, асимптотическими соотношениями $\bar{\mathbf{X}}_0=\mathbf{X}_0$, $\bar{\mathbf{Y}}_0=\mathbf{Y}_0$, $\bar{\mathbf{X}}_1=\mathbf{X}_1+O(\varepsilon^{k+1})$, $\bar{\mathbf{Y}}_1=\mathbf{Y}_1+O(\varepsilon^{k+1})$. Это соотношение будет выполнено, если приравнять k-е приближения

$$\Psi(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y})=\bar{\Psi}(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{27}$$

Итак, процедура усреднения системы ОДУГ с гамильтонианом (21) состоит в определении функции Ψ (она дается рядом (22)), функции $\bar{\Psi}$ и $\bar{H}$ из двух соотношений (26) и (27).

Приведем результат усреднения до второго приближения. Из (22), (26) и (27) находим

$$\Psi(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y})=\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\left[H(t,\mathbf{x},\mathbf{y})-\frac{1}{2}\left\{H(t,\mathbf{x},\mathbf{y}),\int\limits_0^t H(t',\mathbf{x},\mathbf{y})\,dt'\right\}\right]dt+O(\varepsilon^3),$$

$$\Psi(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y})=\bar{\Psi}(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y})=T\bar{H}+O(\varepsilon^3). \tag{28}$$

Таким образом, во втором приближении достаточно найти одну функцию $\Psi(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y})$, чтобы получить рекуррентные формулы для ТПП (23), усредненный гамильтониан $\bar{H}=\Psi/T$ и инвариантную кривую для ТПП $\bar{H}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)=\mathrm{const}$. Формула усреднения гамильтониана (28) согласуется с полученной в [14] до второго приближения.

В третьем приближении усредненный гамильтониан и функция Ψ связаны более сложным соотношением

$$\Psi(t_0+T,\mathbf{x},\mathbf{y})=T\bar{H}(\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon)+(1/24)T^3[\bar{H}_{\mathbf{xx}}\bar{H}_{\mathbf{y}}^2-2\bar{H}_{\mathbf{xy}}\bar{H}_{\mathbf{x}}\bar{H}_{\mathbf{y}}+\bar{H}_{\mathbf{yy}}\bar{H}_{\mathbf{x}}^2]+\ldots \tag{29}$$

В [12, 13] приведены примеры, в которых функции Ψ и $\bar{H}$, а также производящая функция S вычислены точно. На этих примерах показано, что радиус сходимости ряда для Ψ по степеням ε в два раза длиннее радиусов сходимости рядов для S. Коэффициенты рядов Ψ_n примерно в 2^n меньше коэффициента S_n, соответственно сходимость ряда для Ψ существенно быстрее, чем для S.

Рассмотрим пример решения нелинейного дифференциального уравнения, в котором для проведения качественного анализа необходимо выполнить по крайней мере три приближения в процедуре усреднения.

Пример 3. Найдем с точностью до ε^4 и ε^6 ТПП в моменты времени $t_n = 2\pi n$ для неавтономного нелинейного уравнения второго порядка $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t \cos q$.

1. К этому уравнению сводится ОДУГ $\dot{q} = \varepsilon p$, $\dot{p} = \varepsilon \cos t \cos q$ с функцией Гамильтона $H = \varepsilon((1/2)p^2 - \cos t \sin q)$. Решение поставленной задачи проведем параметрическим методом. Функция Ψ и усредненный гамильтониан $\bar{H}$ в третьем приближении находятся непосредственно из формул (22) и (29)

$$\Psi(2\pi, x, y, \varepsilon) = 2\pi[(1/2)\varepsilon y^2 + \varepsilon^3((1/4)\cos^2 x + y^2 \sin x)] + O(\varepsilon^4), \quad \bar{H}(x, y, \varepsilon) = (2\pi)^{-1}\Psi(2\pi, x, y, \varepsilon).$$

Параметризацией уравнение инвариантных кривых для ТПП получается сразу в исходных переменных $\Psi(2\pi, q_n, p_n, \varepsilon) = \text{const}$, а положения q_n, p_n находятся из рекуррентных формул (23), и не надо решать ОДУГ. Классическим же методом производящих функций мы сможем получить усредненный гамильтониан в новых переменных и в них проинтегрировать систему. Для топологической картины инвариантных кривых этого достаточно. Записать же инвариантные кривые в исходных переменных можно только после решения нелинейных алгебраических уравнений, что потребует дополнительных выкладок.

2. Решение этой же задачи с точностью до ε^6 удобнее получить исходя из иной функции Гамильтона $H = (1/2)p^2 - \delta \cos t \sin q$. Уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{q} = p$, $\dot{p} = \delta \cos t \cos q \Rightarrow \ddot{q} = \delta \cos t \cos q$. При $\delta = \varepsilon^2$ получаем исходное уравнение примера 3. Для достижения заданной точности достаточно найти два приближения.

Канонической заменой $q = u + v(t - \pi)$, $p = v$ приводим гамильтониан к стандартной форме $H = -\delta \cos t \sin(u + vt - v\pi)$. С помощью (22) и (23) получим решение для Ψ в моменты времени, кратные периоду $t = 2\pi n$:

$$\Psi = \varepsilon^2 \Psi_1(x, y) + \varepsilon^4 \Psi_2(x, y) + O(\varepsilon^6), \quad \Psi_1(x, y) = \frac{2y}{1 - y^2} \sin x \sin \pi y,$$

$$\Psi_2(x, y) = \frac{\pi(1 + y^2)}{4(1 - y^2)^2} + \frac{y(1 + y^2)\sin 2y\pi}{2(1 - y^2)^3} + \frac{\pi y^2(\cos 2y\pi - \cos 2x)}{2(1 - y^2)^2} + \frac{1 - 3y^2 - 2y^4}{8y(1 - y^2)^3} \sin(2y\pi)\cos 2x$$

и рекуррентные соотношения для ТПП

$$q_{n-1} = -\pi p_{n-1} + x - \frac{1}{2}\Psi_y, \quad p_{n-1} = y + \frac{1}{2}\Psi_x, \quad q_n = \pi p_n + x + \frac{1}{2}\Psi_y, \quad p_n = y - \frac{1}{2}\Psi_x.$$

Решения 1 и 2 позволяют легко провести качественный анализ ТПП: найти неподвижные точки, исследовать характер их устойчивости, найти сепаратрисы. На рис. 1 приведены ТПП при $\varepsilon = 0.4$, а – найденные численным расчетом и б – построенные по аналитическим формулам. Крестиками обозначены положения точки в момент времени $t = 0$, точками – в моменты времени $t = 2\pi n$, $n = \overline{1, 500}$. При небольшом увеличении ε наблюдается хаотизация. Картины хаотического расположения ТПП, найденные численно и аналитически, близки друг к другу.

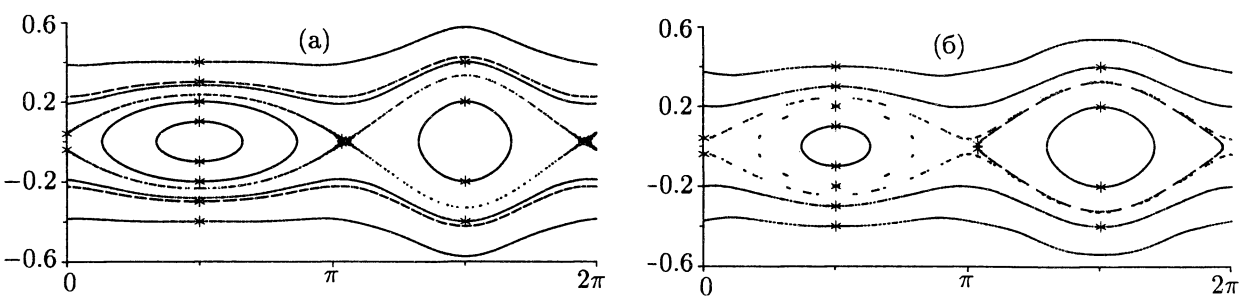

Рис. 1. Точки ТПП: а – численный расчет и б – аналитическое решение.

9. Инвариантные кривые для последовательности точек Пуанкаре. Если функция $\Psi(x,y)$ содержит малый множитель, она по крайней мере с точностью до четвертого порядка приближает инвариантные кривые для точек $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_n$. Для соответствующей оценки докажем лемму.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка, когда $-a \le x \le a$. Тогда*

$$f(a) - f(-a) = 2(af'(0) + R_3), \quad R_3 = (a^3/6)f'''(\theta a), \quad -1 \le \theta \le 1. \tag{30}$$

Доказательство проведем с помощью тождества Коши

$$\frac{d}{dt}\left(a(1-t)f'(ta) + \frac{a^2(1-t)^2}{2}f''(ta)\right) = -af'(ta) + \frac{a^3(1-t)^2}{2}f'''(ta).$$

Интегрируя его в пределах от 0 до 1:

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^2 f'''(ta)\,dt$$

и полагая в этой формуле $a \to -a$, $t \to -t$, получим

$$f(-a) = f(0) - af'(0) + \frac{(a)^2}{2}f''(0) - \frac{(a)^3}{2}\int\limits_{-1}^0 (1-|t|)^2 f'''(ta')\,dt.$$

Из этих двух формул получим формулу (30), в которой остаточный член представляется интегралом

$$R_3 = \frac{a^3}{4}\int\limits_{-1}^1 (1-|t|)^2 f'''(ta)\,dt.$$

Отсюда по теореме о среднем получим

$$R_3 = \frac{a^3}{4}f'''(\theta a)\int\limits_{-1}^1 (1-|t|)^2\,dt = \frac{a^3}{6}f'''(\theta a),$$

что и требовалось доказать.

Теперь легко установить теорему.

Теорема 5. *Пусть $2N$-мерные векторы $\begin{pmatrix}\mathbf{X}_{n-1}\\ \mathbf{Y}_{n-1}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\mathbf{X}_n\\ \mathbf{Y}_n\end{pmatrix}$ определяются параметрическими соотношениями*

$$\mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x} - \frac{a}{2}\Phi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{Y}_{n-1} = \mathbf{y} + \frac{a}{2}\Phi_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{X}_n = \mathbf{x} + \frac{a}{2}\Phi_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{Y}_n = \mathbf{y} - \frac{a}{2}\Phi_{\mathbf{x}}, \tag{31}$$

где $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ трижды непрерывно дифференцируема в области Ω. Тогда в этой области

$$\Phi(\mathbf{X}_n,\mathbf{Y}_n,K) - \Phi(\mathbf{X}_{n-1},\mathbf{Y}_{n-1},K) = \frac{a^3}{3}f'''(\theta a), \quad f(a) = \Phi\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\Phi_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} - \frac{a}{2}\Phi_{\mathbf{x}}\right). \tag{32}$$

Теорема 5 непосредственно вытекает из леммы, так как левая часть равенства равна $f(a) - f(-a)$ и $f'(0) = 0$. Оценка теоремы 4 неулучшаема, что видно из следующего примера.

Пример 4. Построим инвариантные кривые последовательности точек Чирикова при $q_n < \sqrt{K}$ с точностью до малых порядка K^2

$$q_n = q_{n-1} + K\sin p_{n-1}, \quad p_n = q_{n-1} + K\sin p_{n-1} + p_{n-1}. \tag{33}$$

Сделаем замены $q_n = \sqrt{K}X_n$, $p_n = Y_n$. Тогда рекуррентные соотношения Чирикова преобразуются в соотношения (31) теоремы 4, где параметр $a = \sqrt{K}$, а функция Φ выражается через функцию (18) $\Phi(x,y,K) = \Psi(\sqrt{K}x,y,K)/K$. Ее разложение по малому параметру K таково:

$$\Phi(x,y,K) = -\left(\frac{1}{2}x^2 + \cos y\right) - \frac{1}{2}(x\sin y)\sqrt{K} + \frac{1}{8}(x^2\cos y - \sin^2 y)K + O(K^{3/2}). \tag{34}$$

Находим функцию $f(a)$ и ее третью производную

$$f(a) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}a\sin y\right)^2 - \cos\left(y + \frac{1}{2}ax\right) + \ldots, \quad \frac{d^3f}{da^3} = -\left(\frac{1}{2}x\right)^3 \sin\left(y + \frac{1}{2}ax\right) + \ldots$$

По теореме 4 получим оценку

$$|\Phi(X_n,Y_n,K) - \Phi(X_{n-1},Y_{n-1},K)| \le K^{3/2}X_n^3/24 + O(K^2).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим уравнение инвариантной кривой $\Psi(q_n,p_n) = \mathrm{const}$ с асимптотической по малому K оценкой

$$|\Psi(q_n,p_n,K) - \Psi(q_{n-1},p_{n-1},K)| \sim \frac{K}{24}q_n^3, \tag{35}$$

где функция Ψ определяется формулой (18). Из оценки следует, что при небольших значениях K и q_n точки последования Чирикова лежат на кривых, близких к $\Psi(q_n,p_n) = \mathrm{const}$. Это видно также из рис. 2. На нем слева приведены точки (q_n,p_n) при $n = \overline{0,500}$, рассчитанные по точным рекуррентным формулам. Начальные положения точек (q_0,p_0) отмечены крестиками. Справа приведены соответствующие им аналитические кривые $\Psi(q_n,p_n) = \mathrm{const}$.

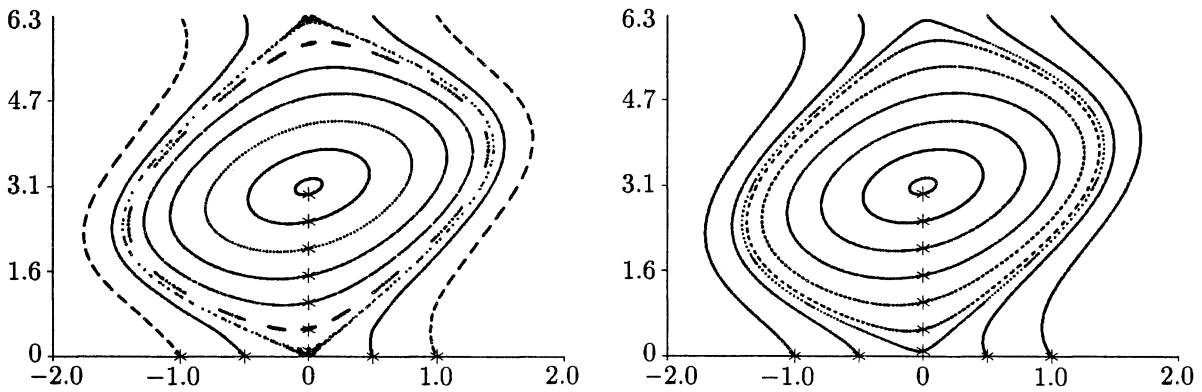

Рис. 2. Инвариантные кривые последовательности Чирикова при $K = 1/2$. Точный расчет (слева) и асимптотическое выражение (справа).

Оценку (35), полученную из теоремы 4, можно проверить непосредственно, подставив в левую часть выражение функции Ψ (18):

$$\Psi(q_n,p_n,K) - \Psi(q_{n-1},p_{n-1},K) = \Psi\left(x + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, y - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}, K\right) - \Psi\left(x - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, y + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}, K\right) =$$

$$= \sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\left(2\sin\frac{x}{2} - x\right)K + \frac{1}{8}\sin(2y - x)(x - \sin x)K^2.$$

Отсюда с помощью неравенств $|x - 2\sin(x/2)| < x^3/24$ и $|x - \sin x| < x^3/6$, где $x = (1/2)(q_n + q_{n-1})$, получаем оценку

$$|\Psi(q_n, p_n, K) - \Psi(q_{n-1}, p_{n-1}, K)| < (2|K| + K^2)(\max|q|)^3/48,$$

которая для малых K согласуется с оценкой (35), полученной из теоремы 5.

Перейдем к изложению алгоритма построения автономного гамильтониана по данному отображению. Это обратная задача к задаче, решение которой дается алгоритмом 2.

Алгоритм 3 решения обратной задачи. Пусть $\begin{pmatrix}\mathbf{X}_n\\ \mathbf{Y}_n\end{pmatrix}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, – последовательность точек, определяемых с помощью рекуррентных соотношений (31). Тогда асимптотическое разложение

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, a) = \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \frac{a^2}{24}[\Phi_{\mathbf{xx}}\Phi_{\mathbf{y}}^2 - 2\Phi_{\mathbf{xy}}\Phi_{\mathbf{x}}\Phi_{\mathbf{y}} + \Phi_{\mathbf{yy}}\Phi_{\mathbf{x}}^2] + O(a^3) \tag{36}$$

определяет инвариантную поверхность для этой последовательности точек, так что

$$F(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n, a) - F(\mathbf{X}_{n-1}, \mathbf{Y}_{n-1}, a) = O(a^4).$$

Так же как и при решении прямой задачи, будем исходить из уравнения (25). Полагая в нем $\tau = a$, $\bar{\Psi} = a\Phi$ и разрешая это уравнение относительно $\bar{H}$ с точностью до $O(a^3)$, получим для $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, a) = \bar{H}/a$ требуемое разложение (36). Инвариантные кривые будут асимптотически приближены интегралом автономной гамильтоновой системы $\bar{F}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n, a) = \mathrm{const}$. Первый член этого ряда – функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, для которой приведена оценка порядка a^3 (32). С учетом следующего члена ряда эта оценка будет иметь порядок a^4 и т.д.

Пример 5. Найдем инвариантную кривую для последовательности точек Чирикова (33) в более высоком приближении по сравнению с найденным в примере 4.

Эту задачу можно решать, выделяя малый параметр $a = \sqrt{K}$, с помощью замены переменных примера 4. Мы представим решение сразу в исходных переменных, не выделяя малого параметра. Из (36) получим $H(x, y, K) = H^{(1)} + H^{(3)} + \ldots$, $H^{(1)} = \Psi(x, y, K)$,

$$H^{(3)} = -\frac{1}{24}x^2\cos\left(y - \frac{1}{2}x\right)K + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}x^2\cos(2y - x) + \sin^2\left(y - \frac{1}{2}x\right)\right)K^2 -$$

$$-\frac{1}{8\cdot 24}\left(\cos\left(y - \frac{1}{2}x\right) - \cos\left(3y - \frac{3}{2}x\right)\right)K^3.$$

Здесь $\Psi(x, y, K)$ определена формулой (18).

Автор благодарит В.Ф. Журавлева, Я.В. Татаринова и Е.А. Кудрявцеву за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00567).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А.* Избр. труды в 3 т. Т. 2. М., 1972.
2. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М., 1997.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М., 2000.

4. *Петров А.Г.* // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 4. С. 482–486.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М., 1966.
6. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. М., 1984.
7. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. Череповец, 2000.
8. *Петров А.Г.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 2000. № 4. С. 12–17.
9. *Петров А.Г.* // Журн. прикл. механики и теор. физики. 2002. № 6. С. 3–21.
10. *Петров А.Г.* // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 356–365.
11. *Петров А.Г.* // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 1. С. 15–19.
12. *Петров А.Г.* // Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 19–32.
13. *Петров А.Г.* // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 483–488.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.

Институт проблем механики РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
10.04.2003 г.