УДК 517.987.4

О ВТОРОМ ЧЛЕНЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В. П. Маслов, А. М. Чеботарев

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Решение ряда задач, возникающих в теории управления и устойчивости, предполагает изучение поведения систем под влиянием малых случайных возмущений. Основные вероятностные характеристики таких систем выражаются через условные математические ожидания и являются интегралами в функциональных пространствах относительно мер, зависящих от малого параметра ε, которые вырождаются при $\varepsilon=0$ (см. [11, 12, 19, 23, 24]). Аналогичные задачи связаны с изучением законов больших чисел и оценками вероятностей больших уклонений от среднего (см. [4, 8, 9, 10, 18, 20]).

Точное вычисление функциональных интегралов связано со значительными трудностями. Поэтому представляются полезными асимптотические разложения мер по степеням малого параметра. Основной метод, который используется для этой цели, с формальной точки зрения является бесконечномерным обобщением асимптотического метода Лапласа. Отличие состоит, во-первых, в том, что от малого параметра ε зависит не только интегрируемая функция, но и сама мера, сингулярная при $\varepsilon=0$. Во-вторых, в бесконечномерном случае мера множеств, на которых конечен показатель экспоненты, содержащийся под знаком интеграла, равна нулю, хотя именно такие множества и определяют асимптотику интеграла.

Асимптотическое разложение функциональных интегралов и соответствующих им математических ожиданий может быть обосновано различными способами. В [7, 8] использовались асимптотические оценки конечномерных аппроксимаций функционального интеграла, равномерные относительно размерности аппроксимирующего интеграла. В [11, 12, 19] сингулярная часть интеграла выделялась с помощью абсолютно непрерывных преобразований меры. В работах [26—27], посвященных методу стационарной фазы для фейнмановского функционального интеграла, регулярная и сингулярная по ε составляющие разделяются с помощью функционального преобразования Фурье и равенства Парсеваля. Эта методика может применяться и к винеровским интегралам. Весьма перспективной представляется техника вычисления сингулярной части интеграла в терминах функций, образующих базис ядра второй вариации действия [29, 31].

Техника, разработанная в [4, 7, 32, 33], позволяет вычислять главный член логарифмической асимптотики математических ожиданий с точностью до логарифмической эквивалентности:

$$\ln F^{\text{точн}}(\varepsilon) = \ln F^{\text{прибл}}(\varepsilon) + O(\ln \varepsilon). \tag{1.1}$$

Поясним смысл разложения (1.1) на примере конечномерных интегралов. Пусть $S(x)$ и $\varphi(x)$ — гладкие вещественные функции, $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, а $S(x)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную окрестность изолированного минимума

$$x^* = \arg\min_{x \in \operatorname{supp}\varphi} S(x), \quad \varphi(x^*) \neq 0.$$

Тогда при $\varepsilon \downarrow 0$ для интеграла Лапласа

$$\begin{gathered} F(\varepsilon) = \int \exp(-S(x)/\varepsilon)\, m_\varphi(dx), \\ m_\varphi(A) = \int_A \varphi(x)\, dx \end{gathered} \tag{1.2}$$

справедливо следующее асимптотическое разложение (см. [22])

$$F(\varepsilon) \cong \exp(-S(x^*)/\varepsilon) \left\{ \sum_k \varepsilon^{r_k} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} (\ln \varepsilon)^l \right\},$$

где n — целое положительное число, не зависящее от k, $\{r_k\}_0^\infty$ — неограниченная возрастающая последовательность рациональных чисел $0 < r_0 \leqslant n/2$. Поэтому главный член логарифмической асимптотики интеграла (1.2) равен $-S(x^*)/\varepsilon$ и

$$\ln F(\varepsilon) = -S(x^*)/\varepsilon + r_0 \ln \varepsilon + o(\ln \varepsilon).$$

Величины $-S(x^*)/\varepsilon$ и $r_0 \ln \varepsilon$ называются соответственно первым и вторым членами логарифмической асимптотики интеграла (1.2). С точностью до второго члена имеем:

$$F^{\text{прибл}}(\varepsilon) = \varepsilon^{r_0 + o(1)} \exp - S(x^*)/\varepsilon.$$

Если $\varphi(x^*) \neq 0$, то величину $r_0 - n/2$ будем называть инвариантом вырождения экстремума функции $S(x)$ и обозначать

$$\operatorname{inv} S = \operatorname{inv} S(x^*) = r_0 - n/2.$$

В работе [16] показано, что если $\varphi(x^*) > 0$, то

$$r_0 = \lim_{c \downarrow 0} \ln m_S(c)/\ln c; \quad m_S(c) = \mathrm{mes}\,\{x: S(x) - S(x^*) < c\}. \quad (1.3)$$

Из (1.3) немедленно следует, что r_0 не изменяется при любых преобразованиях координат, невырожденных в окрестности точки минимума. Если x^* — невырожденный экстремум, т. е. $\det S^{(2)}(x^*) \neq 0$, то $r_0 = n/2$. Таким образом, для невырожденных точек $\mathrm{inv}\, S = 0$, а для вырожденных точек $\mathrm{inv}\, S \leqslant 0$, если S — гладкая функция, и $\mathrm{inv}\, S \geqslant 0$, если S — негладкая функция (см. рис. 1.1).

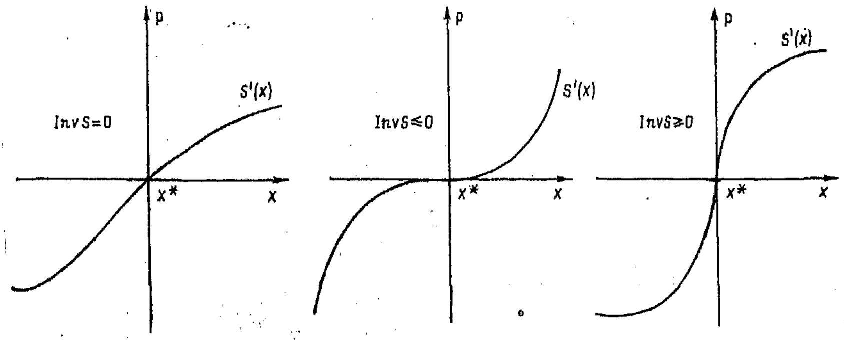

Рис. 1.1

Аналогичные результаты переносятся и на функциональные интегралы (см. [19]), допускающие конечномерную аппроксимацию

$$F(\varepsilon) = F_N(\varepsilon)(1 + o(1)),$$

где $F_N(\varepsilon)$ — интеграл вида (1.2) кратности $N \cdot n$. Если при всех достаточно больших N первый и второй члены логарифмической асимптотики интеграла $F_N(\varepsilon)$ не зависят от N, а величина $o(1)$ допускает равномерную по N оценку, то

$$\ln F(\varepsilon) = -S(x_\tau^*)/\varepsilon + r_0 \ln \varepsilon + o(\ln \varepsilon). \quad (1.4)$$

В бесконечномерном случае S является функционалом, а x_τ^* — его экстремалью. Поэтому величина r_0 называется инвариантом вырождения экстремали функционала S. Обоснование разложения (1.4) для винеровского функционального интеграла составляет основное содержание заключительной части настоящей статьи.

Во второй части показано, как с помощью первых двух членов логарифмической асимптотики, полученных вероятностными методами, можно получить асимптотический ряд и оценку остатка в том случае, если экстремаль действия невырождена.

В третьей части вводится определение инварианта вырождения экстремали с помощью конечномерных аппроксимаций функционала S, определяющего асимптотику интегралов в вырожденном случае. В четвертой части инвариант вырождения определяется в терминах базиса ядра второй вариации действия

$$\operatorname{Inv} S(x_\tau^*)=\lim_{c\downarrow 0}\ln \operatorname{mes}\left\{\alpha: S\left(x_\tau^*+\sum_1^m \alpha_i\xi_i(\tau)\right)-\right.$$

$$\left.-S(x_\tau^*)<c\right\}\Big/\ln c-m/2,$$

$$S^{(2)}(x_\tau^*)\xi_i=0 \quad (1\leqslant i\leqslant m)$$

и доказывается эквивалентность двух определений inv и Inv в частном случае $S(x_\tau)=\int L(\dot{x}_\tau x_\tau)\,d\tau$ для аналитических лагранжианов вида

$$L(\dot{x}x)=1/2(\dot{x}-B(x),\ A(x)(\dot{x}-B(x))).$$

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В МАЛОМ

Асимптотические разложения решений уравнений, описывающих переходные плотности вероятностных процессов, являются основой для оценок математических ожиданий и вероятностей различных событий. Термин «в малом» обычно означает отсутствие особенностей у геометрических объектов, возникающих при описании асимптотики решения в достаточно малых пространственно-временных областях. Достижения последних лет были связаны, в основном, с обоснованием известных в физике асимптотических формул. Но даже важнейший, хотя и просто формулируемый, результат о первом члене логарифмической асимптотики предполагает использование сложного математического аппарата [4, 32—33] и находит применения практически во всех исследованиях асимптотических разложений плотностей вероятности [6—7]. На этом пути были получены оценки главного члена асимптотики плотности переходной вероятности, описываемой уравнением Колмогорова за малое время [19] и с малой диффузией [12]. Вероятностные методы вычисления главного и, тем более, последующих членов оказываются весьма громоздкими по сравнению со стандартной техникой асимптотических разложений (см. [13—15, 30]) и приводят к эквивалентным результатам. Важно заметить, что для оценки остатка асимптотического разложения переходной плотности в малом достаточно получить только два первых члена ее логарифмической асимптотики (см. [12]). Остальные члены асимптотического ряда вычисляются по рекуррентным формулам стандартной квазиклассической теории [13—15], которые «в малом» одинаковы для вероятностных и квантовомеханических уравнений.

Покажем сначала, как с помощью двух первых членов логарифмической асимптотики плотности переходной вероятности можно убедиться в том, что асимптотическое решение задачи

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - L_\varepsilon\right) G_\varepsilon = 0; \quad G_\varepsilon|_{t=0} = \delta(x-y), \quad x,\ y \in R^n, \tag{2.1}$$

является также асимптотикой ее решения.

Предположим, что решение задачи (2.1) неотрицательно и $G_{\varepsilon,N}$ — ее асимптотическое решение, т. е.

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - L_\varepsilon\right) G_{\varepsilon,N} = O(\varepsilon^N); \quad G_{\varepsilon,N}|_{t=0} = \delta(x-y), \tag{2.2}$$

причем

$$O(\varepsilon^N) = \varepsilon^M O(1)\, G_\varepsilon, \tag{2.3}$$

где $O(1)$ — функция, ограниченная равномерно по x, y, t.

Лемма 2.1. Пусть выполнены сформулированные выше предположения. Тогда. $G_{\varepsilon,N}$ является мультипликативной асимптотикой решения G_ε.

Доказательство. В силу принципа Дюамеля разность $G_\varepsilon - G_{\varepsilon,N}$ удовлетворяет соотношению:

$$(G_\varepsilon - G_{\varepsilon,N})(y0\,|\,xt) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} d\xi\, \varepsilon^M O(1)\, G_\varepsilon(y0\,|\,\xi t)\, G_\varepsilon(\xi\tau\,|\,xt) =$$

$$= O(\varepsilon^M t)\, G_\varepsilon(y0\,|\,xt).$$

Поэтому $G_{\varepsilon,N} = (1 + O(\varepsilon^M))\, G_\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Для обоснования оценки (2.3) достаточно двух первых членов логарифмической асимптотики функции G_ε и оценки (2.3), обеспечиваемой при стандартной процедуре асимптотического разложения. Поясним более подробно, каким образом устанавливается оценка (2.3).

Пусть L_ε — равномерно эллиптический оператор второго порядка с ограниченными гладкими коэффициентами, все производные которых также ограничены

$$L_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2}\,(A(x)\nabla,\ \nabla) + \varepsilon\,(B(x),\ \nabla) + \varepsilon^2 (C(x),\ \nabla);$$

$$A(x) = A^T(x) > 0, \tag{2.4}$$

для которого, по крайней мере, в малом известны два первых члена логарифмической асимптотики функции Грина задачи Коши (2.1) (см. [5, 7, 12, 19])

$$\ln G_\varepsilon(y0\,|\,xt) = -S(y0\,|\,xt)/\varepsilon - \frac{n}{2}\ln \varepsilon t + o(\ln \varepsilon t) \tag{2.5}$$

и ее асимптотическое решение $G_{\varepsilon,N}$, удовлетворяющее неоднородному уравнению:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - L_\varepsilon\right) G_{\varepsilon,N} = O(1)\, \varepsilon^2 (\varepsilon t)^{N-n/2} \exp - S/\varepsilon;$$

$$G_{\varepsilon,N}|_{t=0} = \delta(x-y), \tag{2.6}$$

где $O(1)$ — функция, равномерно ограниченная по y, x, t. Как мы увидим ниже, именно такое асимптотическое решение дает квазиклассическая теория [13—15]. Следовательно, правая часть уравнения (2.6) может быть выражена через функцию Грина:

$$O(1)\varepsilon^2(\varepsilon t)^{N-n/2}\exp(-S/\varepsilon)=O(1)\varepsilon^2(\varepsilon t)^{N+o(1)}G_\varepsilon.$$

Таким образом, для оператора (2.4) соотношение (2.3) выполнено. Поэтому при $\varepsilon\downarrow 0$ для любого сколь угодно малого $\delta>0$

$$G_{\varepsilon,N}=(1+O(\varepsilon^2)(\varepsilon t)^{N-\delta})G_\varepsilon.$$

Приведенные здесь рассуждения применимы как для построения асимптотики решения уравнения теплопроводности за малое время ($B=0$, см. [19]), так и для разложений решений задач с малой диффузией ($C=0$, см. [12]). С учетом результатов [28], разложение $G_{\varepsilon,N}$, полученное таким образом, эквивалентно разложениям, вычисленным в [12, 19].

Обратимся теперь к технике построения асимптотических решений [13—15]. Будем искать асимптотическое решение в виде ряда

$$G_{\varepsilon,N}=(2\pi\varepsilon)^{-n/2}\exp(-S/\varepsilon)(K_0+\varepsilon K_1+\ldots+\varepsilon^N K_N),$$

подстановка которого в уравнение (2.1) приводит к следующим соотношениям*:

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}-L_\varepsilon\right)G_{\varepsilon,N}=(2\pi\varepsilon)^{-n/2}\exp(-S/\varepsilon)\Big\{\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}-S_t\right)-$$
$$-\frac{1}{2}(A(x)(\varepsilon\nabla-S_x),\ \varepsilon\nabla-S_x)-(B(x),\ \varepsilon\nabla-S_x)-$$
$$-\varepsilon(C(x),\ \varepsilon\nabla-S_x)\Big\}(K_0+\varepsilon K_1+\ldots+\varepsilon^N K_N)=$$
$$=(2\pi\varepsilon)^{-n/2}\exp(-S/\varepsilon)\Big\{-\left[S_t+\frac{1}{2}(AS_x,\ S_x)-(B,\ S_x)\right]+$$
$$+\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}+(AS_x-B,\ \nabla)+\frac{1}{2}(A\nabla,\ S_x)+(C,\ S_x)\right]-$$
$$-\varepsilon^2\left[\frac{1}{2}(A\nabla,\ \nabla)+(C,\ \nabla)\right]\Big\}(K_0+\varepsilon K_1+\ldots+\varepsilon^N K_N).$$

Обозначим через $H(px)=1/2(A(x)p,\ p)-(\overset{2}{B}(x),\ \underset{1}{p})$ функцию Гамильтона, отвечающую оператору $H(-\varepsilon\nabla,\ x)$ (цифры 1, 2 указывают порядок действия операторов). Таким образом,

$$S_t+\frac{1}{2}(AS_x,\ S_x)-(B,\ S_x)=S_t+H(S_x,\ x),$$

*Напомним, что $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в R^n, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $S_t=\partial S/\partial t$, $S_x=\operatorname{grad}S=\nabla S$, $\operatorname{Sp}(a_{ij})=\sum_i a_{ii}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}+(AS_x-B,\ \nabla)+\frac{1}{2}(A\nabla,\ S_x)+(C,\ S_x)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}+(H_p,\ \nabla)+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}H_{pp}S_{xx}+(C,\ S_x). \qquad (2.7)$$

Обозначим далее через $X_\tau=X_\tau(y,\ p)$ и $P_\tau=P_\tau(y,\ p)$ — решения системы Гамильтона:

$$\dot X_\tau=H_p(P_\tau,\ X_\tau),\quad X_0=y,$$
$$\dot P_\tau=-H_x(P_\tau,\ X_\tau),\quad P_0=p \qquad (2.8)$$

и, следуя [25], будем считать, что при $t\in(0,\ T]$ существует единственное значение $p=p(x,\ t)$ такое, что

$$X_t(y,\ p(x,\ t))=x. \qquad (2.9)$$

Тогда функция

$$S(y0\,|\,xt)=\int_0^t[(P_\tau,\ \dot X_\tau)-H(P_\tau,X_\tau)]\,d\tau\,|_{p=p(xt)} \qquad (2.10)$$

удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби $S_t+H(S_x,\ x)=0$ и доставляет минимум функционалу действия

$$S(x_\tau)=\int_0^t L(\dot x_\tau x_\tau)\,d\tau=1/2\int_0^t(\dot x_\tau-B(x_\tau),\ A(x_\tau)(\dot x_\tau-B(x_\tau))\,d\tau$$

в классе абсолютно непрерывных функций x_τ таких, что $x_0=y$, $x_t=x$, причем, $S_x(y0\,|\,xt)=P_t$ (см. [12]).

Обозначим через $d/dt=\partial/\partial t+(H_p,\ \nabla)$ оператор дифференцирования вдоль траекторий гамильтоновой системы, $\hat\pi(x)=$ $=\frac{1}{2}(A(x)\nabla,\ \nabla)+(C(x),\ \nabla)$ и положим $K_{-1}=0$. Тогда, с учетом (2.10)

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}-L_\varepsilon\right)G_{\varepsilon,N}=(2\pi\varepsilon)^{-n/2}\exp(-S/\varepsilon)\times$$
$$\times\left\{\sum_{l=0}^N\varepsilon^{l+1}\left[\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}H_{pp}S_{xx}+(C,\ S_x)\right)K_l-\hat\pi K_{l-1}\right]-\right.$$
$$\left.-\varepsilon^{N+2}\hat\pi K_N\right\}. \qquad (2.11)$$

Если функции $K_0\ldots K_N$ выбрать так, чтобы выполнялась рекуррентная система неоднородных уравнений переноса

$$\left[\frac{d}{dt}+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}H_{pp}S_{xx}+(C,\ S_x)\right]K_l=\hat\pi K_{l-1},\quad l=0,\ 1,\ldots,N, \qquad (2.12)$$

то в правой части (2.11) сохранится лишь один член

$$w_{\varepsilon,N}=\varepsilon^{N+2}(\hat\pi K_N)(2\pi\varepsilon)^{-n/2}\exp(-S/\varepsilon),$$

для которого ниже будет получена оценка

$$w_{\varepsilon, N}=\varepsilon^2 O(\varepsilon t)^N G_\varepsilon. \qquad (2.13)$$

Построим решение уравнения (2.12) при $l=1$, сингулярное при $t\downarrow 0$, учитывая, что при достаточно малых t отображение $p\to X_t(y, p)$ взаимно однозначно и якобиан DX_t/Dp отличен от нуля. Выведем уравнение для DX_t/Dp.

Поскольку $S_x=P_t$, то $H_p(P_t X_t)=H_p(S_x(y0\,|\,X_t t), X_t)= =f(X_t, t)$. Следовательно, уравнение $\dot{X}_t=H_p$ можно переписать в виде $\dot{X}_t=f(X_t, t)$. В силу леммы Соболева (см. [13]), якобиан DX_t/Dp удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{DX_t}{Dp}=\operatorname{div} f(X_t, t),$$

где $\operatorname{div} f(x, t)=\operatorname{div}_x H_p(S_x(y0\,|\,xt), x)=\operatorname{Sp}(H_{pp}S_{xx}+H_{px})$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\ln\left|\frac{DX_t}{Dp}\right|^{-1/2}=\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(H_{pp}S_{xx}+H_{px}). \qquad (2.14)$$

Для того, чтобы получить решение уравнения (2.12) при $l=1$, остается исключить из первой части (2.14) лишний член $\operatorname{Sp}H_{px}$ и включить недостающий (S_x, C):

$$\frac{d}{dt}\ln\left\{\left|\frac{DX_t}{Dp}\right|^{-1/2}\exp-\int_0^t[\operatorname{Sp}H_{px}/2+(S_x, C)]\,d\tau\right\}_{p=p(x,t)}+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}H_{pp}S_{xx}+(S_x, C)=0.$$

Таким образом, функция

$$k_0(y0\,|\,xt)=\left|\frac{DX_t}{Dp}\right|^{-1/2}\exp-\int_0^t(\operatorname{Sp}H_{px}/2+(S_x, C))\,d\tau\bigg|_{p=p(x,t)} \qquad (2.15)$$

удовлетворяет (2.12) при $l=1$. Остается убедиться, что

$$(2\pi\varepsilon)^{-n/2}k_0(y0\,|\,xt)\exp(-S(y0\,|\,xt)/\varepsilon)\to\delta(x-y) \qquad (2.16)$$

при $t\downarrow 0$. Для этого мы исключим из (2.15) члены, не влияющие на предельное соотношение (2.16).

Прежде всего заметим, что $S_x=P_t=A^{-1}(\dot{X}_t)(\dot{X}_t+B(X_t))$ и поэтому

$$\int_0^t(S_x, C)\,d\tau=\int_y^x(CA^{-1})(X_\tau)\,dX_\tau+\int_0^t(CA^{-1}B)(X_\tau)\,d\tau. \qquad (2.17)$$

Оба члена в правой части (2.17) обращаются в нуль при $x=y$, $t\downarrow 0$. Поэтому член $\int(S_x, C)\,d\tau$ в (2.15) можно не учитывать. Займемся членом $\int\operatorname{Sp}H_{px}\,d\tau$.

Пусть $P_t - P_t(y, p)$ — решение системы Гамильтона (2.8) и $Q_t = Q_t(q)$ — функция, являющаяся решением уравнения

$$\dot{Q}_t = H_p(P_t Q_t), \quad Q_0 = q,$$

в частности, $Q_\tau(y) = X_\tau(y, p)$.

При $t \downarrow 0$ якобиан DQ_t/Dq стремится к единице и поэтому при достаточно малых t он отличен от нуля.

В силу леммы Соболева

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{DQ_t}{Dq} = \operatorname{div} H_p(P_t Q_t) = \operatorname{Sp} H_{px}(P_t Q_t).$$

Отличие от (2.14) состоит в том, что P_t — фиксированная траектория, не зависящая от начального значения Q_0. Поэтому

$$\left| \frac{DQ_t(y)}{Dy} \right|^{-1/2} = \exp - \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{Sp} H_{px}(P_\tau Q_\tau)\, d\tau \,\Big|_{Q_0 = y} =$$

$$= \exp - \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{Sp} H_{px}(P_\tau X_\tau)\, d\tau. \tag{2.18}$$

Отсюда мы заключаем, что $\int \operatorname{Sp} H_{px} d\tau \to 0$ при $t \to 0$. Это означает, что член $\exp \int \operatorname{Sp} H_{px} d\tau$ также не влияет на предельное соотношение (2.16). Теперь достаточно убедиться, что

$$(2\pi\varepsilon)^{-n/2} \left| \frac{DX_t(yp)}{Dp} \right|^{-1/2}_{p = p(xt)} \exp(-S(y0 \mid xt)/\varepsilon) \to \delta(x - y). \tag{2.19}$$

В работе [28] доказано, что $S(y0 \mid xt) = \rho^2(y, x)/2t + O(y - x) + O(t)$, где $\rho(y, x)$ — расстояние между точками x и y в метрике, задаваемой квадратичной формой

$$dr^2 = \sum_{i,j} a^{ij}(x)\, dx_i dx_j, \quad (a^{ij}(x))^{-1} = A(x).$$

Поэтому при $t \downarrow 0$ минимум $S(y0 \mid xt)$ достигается при $\rho(yx) = O(t)$, следовательно, $\min\limits_x S(y0 \mid xt) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Для доказательства (2.19) можно воспользоваться асимптотическим методом Лапласа, учитывая, что

$$\left| \frac{DX_t}{Dp} \right|^{-1/2}_{p = p(xt)} = \left| \frac{DP_t}{Dp} \right|^{-1/2} \left| \frac{DX_t}{DP_t} \right|^{-1/2}_{p = p(xt)} =$$

$$= (1 + O(t)) \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|^{1/2}. \tag{2.20}$$

Теперь из теоремы 4.1 работы [22] следует, что при малых t левая часть (2.19) эквивалентна функции

$$(2\pi\varepsilon)^{-n/2} \left| \det \left(\frac{\partial^2 S(y0 \mid xt)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right|^{1/2} \exp - S(y0 \mid xt)/\varepsilon,$$

слабо сходящейся к $\delta(y - x)$ при $t \downarrow 0$.

Займемся теперь уравнением переноса (2.12) при $l=2, 3, \ldots$. Нас интересуют его решения, обращающиеся в нуль при $t=0$. Нетрудно убедиться, что $\frac{d}{dt} K_0^{-1}(y0 \mid X_t t) = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sp} H_{pp} S_{xx} + (S_x, C)\right] K_0^{-1}(y0 \mid X_t t)$. Поэтому из (2.12) следует

$$\frac{d}{dt}(K_0^{-1} K_l)(y0 \mid X_t t) = K_0^{-1} \hat{\pi}(X_t) K_{l-1}(y0 \mid X_t t).$$

Отсюда можно вывести рекуррентную формулу для решений (2.12):

$$K_l(y0 \mid xt) = K_0(y0 \mid xt) \int_0^t K_0^{-1}(y0 \mid X_\tau \tau) \times$$
$$\times \hat{\pi}(X_\tau) K_{l-1}(y0 \mid X_\tau \tau)\, d\tau \Big|_{\substack{X_\tau = X_\tau(y, p), \\ p = p(x, t)}} \qquad (2.21)$$

Обозначим через $\hat{p}(x, \tau)$ дифференциальный оператор второго порядка с гладкими ограниченными коэффициентами:

$$\hat{p}(x, \tau) = K_0^{-1}(y0 \mid x\tau)\, \hat{\pi}(x) K_0(y0 \mid x\tau).$$

Тогда из (2.21) следует

$$K_l(y0 \mid xt) = K_0(y0 \mid xt) \int_0^t \hat{p}(X_{\tau_1} \tau_1)\, d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{l-1}} \hat{p}(X_{\tau_l} \tau_l) 1\, d\tau_l. \quad (2.22)$$

Теперь очевидно, что выполнена оценка о $K_l = O(t^l) K$ и оценка (2.13)

$$w_{\varepsilon, N} = \varepsilon^{N+2} (\hat{\pi} K_N)(2\pi\varepsilon)^{-n/2} \exp - S/\varepsilon = \varepsilon^2 O(\varepsilon t)^N G_\varepsilon.$$

Итак, доказана

Теорема 2.1. Пусть L_ε — равномерно эллиптический оператор второго порядка (2.4) с гладкими ограниченными коэффициентами, все производные которых ограничены. Тогда при $t \in (0, T]$ асимптотика функции Грина задачи Коши (2.1) может быть вычислена по формуле

$$G_{\varepsilon, N}(y0 \mid xt) = (2\pi\varepsilon)^{-n/2} \exp(-S(y0 \mid xt)/\varepsilon)\{K_0 + \varepsilon K_1 + \ldots + \varepsilon^N K_N\},$$

где S — действие (2.10); $X_\tau = X_\tau(y, p)$, $P_\tau = P_\tau(y, p)$ — решение системы Гамильтона (2.8);

$$K_0(y0 \mid xt) = \left|\frac{DX_t}{Dp}\right|^{-1/2} \left|\frac{DQ_t}{Dy}\right|^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left\{\int_y^x (CA^{-1})(X_\tau)\, dX_\tau + \int_0^t (CA^{-1}B)(X_\tau)\, d\tau\right\}_{\substack{X_\tau = X_\tau(yp), \\ p = p(xt)}}$$

и функции K_l вычисляются по формулам (2.22). При этом для любого сколь угодно малого $\delta > 0$

$$G_\varepsilon - G_{\varepsilon, N} = O(\varepsilon^2 t)(\varepsilon t)^{N-\delta} G_\varepsilon.$$

Теорема 2.1 позволяет вычислить асимптотику функции Грина при $\varepsilon\downarrow 0$ на отрезках времени, бо́льших, чем это необходимо для сохранения знаков якобианов DX_t/Dp и DQ_t/Dy. Для построения асимптотики на больших отрезках времени функция Грина записывается в виде свертки (см. [12, 13, 19, 30])

$$G_\varepsilon(y0\,|\,xt)=(2\pi\varepsilon)^{-\frac{n(N+1)}{2}}\int\overset{(N)}{\ldots}\int dx^1\ldots$$

$$\ldots dx^N\prod_{i=0}^{N}K_0(i,\ i+1)\,e^{-\frac{S(i,\ i+1)}{\varepsilon}}(1+O(\varepsilon)),\qquad(2.23)$$

где $K_0(i,\ i+1)=K(x^it_i\,|\,x^{i+1}t_{i+1})$; $x^0=y$, $t_0=0$, $x^{N+1}=x$, $t_{N+1}=t$, причем область интегрирования в (2.23) может быть сужена на объединение конечного числа открытых множеств $M=\bigcup_j M_j$, каждое из которых содержит точку

$$(X^*_{t_1}\ldots X^*_{t_N})\in M_j\subset R^{nN},$$

отвечающую j-й экстремали действия X^*_τ, приходящей из $(y,0)$ в $(x,\ t)$:

$$G_\varepsilon=(2\pi\varepsilon)^{-\frac{n(N+1)}{2}}\sum_j\int\overset{(N)}{\ldots}\int dx^1\ldots$$

$$\ldots dx^N\prod_{0}^{N}K_0(i,\ i+1)\,e^{-\frac{S(i,\ i+1)}{\varepsilon}}(1+O(\varepsilon)).\qquad(2.24)$$

Интегралы по переменным $x^i=(x_1^i\ldots x_n^i)\in R^n$ в (2.24), для которых

$$\det\left(\frac{\partial^2(S(i-1,\ i)+S(i,\ i+1))}{\partial x_k^i\partial x_l^i}\right)\Big|_{x^i=X^*_{t_i}}\neq 0\qquad(2.25)$$

для некоторой экстремали действия, могут быть приближенно вычислены по методу Лапласа. При этом оценка (2.24) и вид подынтегрального выражения не изменяется, а число точек разбиения и кратность интеграла в соответствующем члене суммы уменьшается. Поэтому можно считать, что интегралы в сумме (2.24) отвечают таким разбиениям $t_1\ldots t_N$, $N=N(j)$ (j — номер экстремали), во всех точках которых неравенства (2.25) не выполняются.

Аналогично, из правой части (2.24) исключаются интегралы по всем тем компонентам x_k^i переменных $x^i\in R^n$, для которых

$$\frac{\partial^2}{\partial(x_k^i)^2}(S(i-1,\ i)+S(i,\ i+1))|_{x_k^i=(x^*_{t_i})_k}\neq 0,\qquad(2.26)$$

а соответствующие компоненты x_k^i заменяются значениями k-й компоненты экстремали в момент t_i.

Из остальных компонент образуется новая переменная $\xi^i \in R^{n_i}$. Таким образом,

$$G_\varepsilon(y0\,|\,xt) = \sum_j (2\pi\varepsilon)^{-I_j/2} \int\limits_{\tilde{M}_j} d\xi^1 \dots$$

$$\dots d\xi^{N_j} \prod_{i=0}^{N_j} \tilde{K}_0(i, i+1)\, e^{-\frac{\tilde{S}(i,\, i+1)}{\varepsilon}} (1+o(\varepsilon)), \tag{2.27}$$

где ξ^i — векторы из пространства R^{n_i}, $n_i = n_i(j) \leqslant n$, а j — номер экстремали и $\sum\limits_i n_i(j) = I_j$. В соответствии с теорией Морса [17] число параметров интегрирования в j-м интеграле (2.27) не превосходит n и равно размерности ядра второй вариации действия вдоль j-й экстремали или, что то же самое, числу сопряженных точек вдоль j-й экстремали с учетом их кратности. В последующих разделах логарифмическая асимптотика интегралов (2.27) будет выражена в терминах базисных функций ядра второй вариации действия.

§ 3. ИНВАРИАНТ ВЫРОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛИ ДЕЙСТВИЯ

Используя аналогию с конечномерным случаем (см. [16]), введем определение инварианта вырождения экстремали аддитивного функционала действия $S = S[x_\tau] = S(x_\tau\,|\,t_1 t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}_\tau x_\tau)\, d\tau$, где $L(\dot{x}x)$ — функция Лагранжа, двойственная функции Гамильтона $H(px)$: $L(\dot{x}x) = \sup\limits_p (p\dot{x} - H(px))$, $H(px) = \sup\limits_{\dot{x}} (p\dot{x} - L(\dot{x}x))$ (см. [21]). Будем предполагать, что функционал S обладает следующими тремя свойствами:

(1) Аналитичность $S\left[x_\tau + \sum\limits_i z_i \xi_\tau^i\right]$ по переменным z_i для любых абсолютно непрерывных функций x_τ, $\xi_\tau^i : [t_1, t_2] \to R^n$.

(2) Невырожденность и аналитичность в малом экстремалей функционала $S(x_\tau\,|\,t_1 t_2)$ при всех $t_2 \in (t_1, t_1 + \delta]$ для достаточно малого $\delta > 0$. В частности, предполагается, что аналитическая функция

$$\det\left(\frac{\partial^2 S(yt_1\,|\,xt_2)}{\partial x_i \partial y_j}\right) \neq 0$$

при всех $0 \leqslant t_2 - t_1 \leqslant \delta$, где $S(yt_1\,|\,xt_2) = \inf\limits_{x_{t_1} = y,\, x_{t_2} = x} S(x_\tau\,|\,t_1 t_2)$.

(3) Конечность числа экстремалей действия на произвольных отрезках времени*.

В соответствии с предположениями (2)—(3) выберем произвольную экстремаль, изолированную в метрике $C[0, t]$, приходящую из $(y, 0)$ в (x, t), и разбиение отрезка $[0, t]$ точками $\{t_i\}_1^N$ такое, что на каждом отрезке $t_i t_{i+1}$ существует единственная экстремаль $X_\tau(i, i+1) = X_\tau(\xi^i, \xi^{i+1})$ функционала $S(x_\tau \mid t_i t_{i+1})$, которая приходит из $(X^*_{t_i} + \xi^i, t_i)$ в $(X^*_{t_{i+1}} + \xi^{i+1}, t_{i+1})$ и невырождена при всех ξ^i, ξ^{i+1}, принадлежащих некоторой открытой окрестности начала координат. Существование такой окрестности гарантируется предположением (3). Переменные ξ^i имеют смысл уклонения в момент t_i «ломаной» траектории $X_\tau^{(N)} = X_\tau(i, i+1)$, $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$ от экстремали $X^*_\tau(y0 \mid xt)$.

Обозначим через $S_N(\xi)$ аналитическую функцию

$$S_N(\xi^1 \ldots \xi^N) = \sum_0^N S(\xi^i t_i \mid \xi^{i+1} t_{i+1}) \overset{\text{def}}{=} \sum_0^N S(i, i+1),$$

где $\xi^0 = 0$, $t_0' = 0$, $\xi^{N+1} = 0$, $t_{N+1} = t$. Таким образом, $S(X^*_\tau \mid 0, t) = S_N(0)$ и $X^*_\tau = X_\tau(0, 0)$. Пусть $m_S(c, N)$ — лебегова мера в R^{nN} множества точек $M_S(c) = \{\xi : S_N(\xi) - S_N(0) < c\}$. Ниже будет доказана

Теорема 3.1. Пусть выполнены предположения (1)—(3). Тогда для любого разбиения $\{t_i\}_1^N$ такого, что $t_{i+1} - t_i \leqslant \delta$ $(0 \leqslant i \leqslant N)$ существует предел

$$\rho_N = \lim_{c \downarrow 0} \frac{\ln m_S(c, N)}{\ln c}. \qquad (3.1)$$

Величина $r = \rho_N - Nn/2$ не зависит от N и от выбора точек разбиения $\{t_i\}$.

Теорема 3.1 является основой для следующего определения.

Определение 3.1. Величина r называется инвариантом вырождения экстремали $x_\tau{}^*$ и обозначается $\operatorname{Inv} S(x_\tau{}^*)$.

Существование инварианта $\operatorname{Inv} S$ следует из теоремы Гельфанда—Бернштейна для аналитической функции $S_N(\xi)$ (см. [22], гл. II, [3]). Для доказательства остальных утверждений теоремы 3.1 об инварианте вырождения действия нам потребуется несколько лемм об инварианте вырождения функций в R^n.

Определение 3.2. Пусть $f(x)$ — измеримая вещественная функция в R^n, достигающая нижней грани f^* в изолированной точке x^*. Предел

$$\lim_{c \downarrow 0} \ln m_f(c) / \ln c \overset{\text{def}}{=} \operatorname{inv} f(x^*), \quad m_f(c) = \operatorname{mes}\{x : f(x) - f^* < c\}, \quad (3.2)$$

* Существуют вариационные задачи, решения которых образуют многообразия (см. [19]).

если он существует, называется инвариантом вырождения $f(x)$ в точке экстремума.

Лемма 3.1. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, достигающая минимума в изолированной точке x^* и $\varphi(x)$ — непрерывная функция, равная $o(f(x)-f^*)$. Если существует $\operatorname{inv} f$, то существует $\operatorname{inv}(f+\varphi)$, и обратно, причем $\operatorname{inv} f=\operatorname{inv}(f+\varphi)$.

Доказательство. Обозначим через $M_f(c)$ компактное множество $\{x: f(x)-f^*=c\}$. Если нарушено одно из условий

$$\max_{x\in M_f(c)}(f(x)-f^*+\varphi(c))=c+o_1(c),$$

$$\min_{x\in M_f(c)}(f(x)-f^*+\varphi(x))=c+o_2(c),$$

то нарушается и условие $\varphi(x)=o(f(x)-f^*)$, что противоречит предположению леммы. Поэтому существуют такие функции $o_1(c)$ и $o_2(c)$, что

$$m_f(c+o_1(c))\leqslant m_{f+\varphi}(c)\leqslant m_f(c+o_2(c)).$$

Теперь утверждение леммы следует из очевидных соотношений

$$\frac{\ln(c+o_2(c))}{\ln c}\cdot\frac{\ln m_f(c+o_2(c))}{\ln(c+o_2(c))}\leqslant\frac{\ln m_{f+\varphi}(c)}{\ln c}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\ln(c+o_1(c))}{\ln c}\cdot\frac{\ln m_f(c+o_1(c))}{\ln(c+o_1(c))},$$

$$\frac{\ln(c+o(c))}{\ln c}=1+o(1).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $f(y)$ — измеримая функция, достигающая нижней грани в точке y^*, и $x\to y(x)$ — замена переменных класса C^1, невырожденная в открытой окрестности точки $x^*=x^{-1}(y^*)$ и $\varphi(x)=f(y(x))$. Если существует $\operatorname{inv} f(y^*)$, то существует и $\operatorname{inv}\varphi(x^*)$, причем $\operatorname{inv} f=\operatorname{inv}\varphi$.

Доказательство. Мера $m_f(c)$ допускает следующую оценку

$$m_f(c)=\int\limits_{y:f(y)\leqslant c}dy=\int\limits_{x:f(y(x))\leqslant c}\frac{Dy}{Dx}\,dx=$$

$$=\int\limits_{x:\varphi(x)\leqslant c}\left(\frac{Dy}{Dx}(x^*)+o(1)\right)dx=m_\varphi(c)\,\frac{Dy(x^*)}{Dx}\,(1+o(1)).$$

Поэтому

$$\ln m_f(c)=\ln m_\varphi(c)+\ln(Dy/Dx)(1+o(1))=\ln m_\varphi(c)+O(1).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3.3. Пусть x^* и y^* — точки, в которых измеримые функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ достигают нижней грани и $\Phi(\xi)=\varphi(y)+$

$+f(x)$, $\xi=(xy)\in R^{n+m}$, $x\in R^n$, $y\in R^m$. Если существуют $\operatorname{inv} f(x^*)$ и $\operatorname{inv}\varphi(y^*)$, то $\operatorname{inv}\Phi=\operatorname{inv} f+\operatorname{inv}\varphi$.

Доказательство. Обозначим через $L_\Phi(c)$ прямоугольник в R^{m+n}

$$L_\Phi(c)=\{(xy):(x\in M_f(c))\wedge(y\in M_\varphi(c))\},$$

где $M_f(c)=\{x:f(x)-f^*\leqslant c\}$, $M_\varphi(c)=\{y:\varphi(y)-\varphi^*\leqslant c\}$, и пусть $M_\Phi(c)=\{\xi:\Phi(\xi)-\Phi^*\leqslant c\}$. Лебегова мера в R^{m+n} множества $L_\Phi(c)$ равна произведению лебеговых мер множеств $M_f(c)$ и $M_\varphi(c)$ в R^n и R^m соответственно. Поэтому $\operatorname{mes} L_\Phi(c)=m_f(c)\cdot m_\varphi(c)$ для любого $c\geqslant 0$. С другой стороны, очевидно, что $L_\Phi(c/2)\subseteq M_\Phi(c)\subseteq L_\Phi(c)$, так как из неравенств $f(x)-f^*\leqslant c/2$ и $\varphi(y)-\varphi^*\leqslant c/2$ следует, что $\xi=(xy)\in M_\Phi(c)$, а для любых $(xy)\in M_\Phi(c)$ выполнено: $f(x)-f^*\leqslant c$ и $\varphi(y)-\varphi^*\leqslant c$. Отсюда мы заключаем, что

$$\frac{\ln m_f(c/2)+\ln m_\varphi(c/2)}{\ln c/2+\ln 2}\leqslant\frac{\ln m_\Phi(c)}{\ln c}\leqslant\frac{\ln m_f(c)+\ln m_\varphi(c)}{\ln c}.$$

Правая и левая части неравенства сходятся при $c\downarrow 0$ к $\operatorname{inv} f+\operatorname{inv}\varphi$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3 и $\psi(x, y)$ — непрерывная функция такая, что $\psi(x, y)=o(\varphi(y)-\varphi^*)$ при $y\to y^*$ равномерно по x в некоторой открытой окрестности точки x^*. Тогда

$$\operatorname{inv}(f+\varphi+\psi)(\xi^*)=\operatorname{inv} f(x^*)+\operatorname{inv}\varphi(y^*).$$

Доказательство. Пусть $\overline{\psi}(y)=\sup\limits_{x\in K}|\psi(x, y)|$, где K — произвольное открытое множество, содержащее точку x^*. При достатоно малом c множество $M_f(c)$, определенное выше, содержится в K. Поэтому $\overline{\psi}(y)=o(\varphi(y)-\varphi^*)$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 3.3, примененной к функциям $f+\varphi-\overline{\psi}$ и $f+\varphi+\overline{\psi}$, и неравенства

$$f+\varphi-\overline{\psi}\leqslant f+\varphi+\psi\leqslant f+\varphi+\overline{\psi}.$$

Лемма 3.5. Пусть $\Phi(\xi_1\ldots\xi_{m+n})$ — функция класса $C^2(R^{n+m})$, имеющая изолированный минимум в точке $\xi^*=(\xi_1^*\ldots\xi_{n+m}^*)$, такая, что матрица $A_m=\left(\frac{\partial^2\Phi(\xi^*)}{\partial\xi_{n+i}\partial\xi_{n+j}}\right)$, $1\leqslant i$, $j\leqslant m$, невырождена и $f(x_1\ldots x_n)=\Phi(x_1\ldots x_n y_1(x)\ldots y_m(x))$, где $y(x):R^n\to R^m$ — функция, определяемая из уравнения $\operatorname{grad}_y\Phi(x, y)=0$. Тогда $\operatorname{inv}\Phi(\xi^*)=\operatorname{inv} f(x^*)+m/2$, где $x^*=(\xi_1^*\ldots\xi_n^*)$.

Замечание. Если определенная выше матрица A_m — симметричная невырожденная матрица максимального ранга, составленная из вторых производных функции $\Phi(\xi^*)$, то можно показать, что

$$y(x)-y^*=-(A_m)^{-1}\mathrm{grad}_y\Phi(x, y^*)+O(\mathrm{grad}_y\Phi(x, y^*))^2,$$

где $y^*=(\xi^*_{n+1}\ldots\xi^*_{n+m})$. При этом $y(x)-y^*=O(x-x^{*2})$.

Перечисленные леммы позволяют установить независимость инварианта вырождения экстремали действия относительно малых шевелений точек разбиения $\{t_i\}_1^n$ и изменения их числа, при условии, что на новых отрезках разбиения концы экстремалей действия не сопряжены.

Предложение 3.6. Если для любых ξ^{i-1} и ξ^{i+1} из открытых окрестностей начала координат существует единственная невырожденная экстремаль действия (2.10), приходящая из $x^*_{t_{i-1}}+\xi^{i-1}$ в $x^*_{t_{i+1}}+\xi^{i+1}$, то $\mathrm{inv}\, S_N-nN/2=\mathrm{inv}\, S_{N-1}-$ $-n(N-1)/2$, где $S_N=\sum\limits_0^N S(j, j+1)$, $S_{N-1}=\sum\limits_1^{i-1} S(j-1, j)+$ $+S(i-1, i+1)+\sum\limits_{i+1}^N S(j, j+1)$.

Доказательство. $S_N=S_{N-1}-S(i-1, i+1)+S(i-1, i)+$ $+S(i, i+1)$, причем минимум суммы $S(i-1, i)+S(i, i+1)=$ $=S(\xi^{i-1}t_{i-1}\,|\,\xi^i t_i)+S(\xi^i t_i\,|\,\xi^{i+1}t_{i+1})$ достигается при

$$\xi^i=x_{t_i}(\xi^{i-1}t_{i-1}\,|\,\xi^{i+1}t_{i+1})=x_{t_i}(i-1, i+1)$$

и

$$S_N(\xi^1\ldots\xi^N)\,|_{\xi^i=x_{t_i}(i-1,i+1)}=S_{N-1}(\xi^1\ldots\xi^{i-1}\xi^{i+1}\ldots\xi^N).$$

Из невырожденности экстремали $X_\tau(i-1, i+1)$ следует невырожденность экстремалей $X_\tau(i-1, i)$ и $X_\tau(i, i+1)$, а также знакоопределенность определителей следующих матриц размера $n\times n$:

$$D=\left(\frac{\partial^2 S(i-1, i+1)}{\partial\xi_k^{i-1}\partial\xi_l^{i+1}}\right),\quad D^-=\left(\frac{\partial^2 S(i-1, i)}{\partial\xi_k^{i-1}\partial\xi_l^{i}}\right),\quad D^+=\left(\frac{\partial^2 S(i, i+1)}{\partial\xi_k^{i}\partial\xi_l^{i+1}}\right);$$

С другой стороны, из известного равенства

$$\det\left(\frac{\partial^2 S_N(\xi)}{\partial\xi_k^i\partial\xi_l^i}\right)_{\xi=0}=\det\left(\frac{\partial^2(S(i-1, i)+S(i, i+1))}{\partial\xi_k^i\partial\xi_l^i}\right)_{\xi=0}=\frac{\det D^-D^+}{\det D}\bigg|_{\xi=0}.$$

(см. [13]), следует, что $\det\left(\dfrac{\partial^2 S_N(0)}{\partial\xi_k^i\partial\xi_l^i}\right)\neq 0$. Таким образом, для функции $\Phi(\xi)=S_N(\xi)$, $\xi=(\xi^1\ldots\xi^N)\in R^{nN}$, $\xi^*=(0,\ldots, 0)$, $y=\xi^i$ выполнены условия леммы 3.5. Поэтому $\mathrm{inv}\, S_N=\mathrm{inv}\ S_{N-1}+$ $+n/2$ или $\mathrm{inv}\, S_N-Nn/2=\mathrm{inv}\, S_{N-1}-(N-1)n/2$. Что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что $\mathrm{inv}\, S_N$ не зависит от шевелений точек разбиения $\{t_i\}$, не приводящих к появлению сопряженных точек на экстремалях, приходящих из (ξ^i, t_i) в (ξ^{i+1}, t_{i+1}) и из

(ξ^{i-1}, t_{i-1}) в (ξ^i, t_i) для всех ξ^{i-1}, ξ^i, ξ^{i+1} из некоторой открытой окрестности нуля.

Зафиксируем все точки разбиения, кроме t_i, а также точки ξ^{i-1}, ξ^{i+1} и рассмотрим функцию

$$S_\tau(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} S(\xi^{i-1}t_{i-1} \mid \eta\tau) + S(\eta\tau \mid \xi^{i+1}t_{i+1}) - S(i-1, i+1). \quad (3.3)$$

Далее будем считать $\xi^i = \eta$ и $t_i = \tau$. Ясно, что минимальное значение функции (3.3) достигается при $\eta = X_\tau(i-1, i+1)$ и оно равно нулю.

Предложение 3.7. Если для некоторого $\alpha > 0$ при всех $\tau \in (t_{i-1}+\alpha, t_{i+1}-\alpha)$ и всех η, принадлежащих открытой окрестности точки $\eta^* = X_\tau(i-1, i+1)$, экстремали $X_\tau(i-1, i)$ и $X_\tau(i, i+1)$ невырождены, то инвариант вырождения $\operatorname{inv} S_\tau(\eta^*)$ не зависит от τ.

Доказательство. Пусть $\tau_{1,2} \in (t_{i-1}+\alpha, t_{i+1}-\alpha)$, $\tau_1 < \tau_2$. Рассмотрим разность

$$\operatorname{inv} S_{\tau_2} - \operatorname{inv} S_{\tau_1} = (\ln m_{\tau_2}(c) - \ln m_{\tau_1}(c))/\ln c + o(1) =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{\partial}{\partial\tau} m_\tau(c)\right) \Big/ (m_\tau(c)\ln c) + o(1), \quad (3.4)$$

где c — сколь угодно мало, а $m_\tau(c) = \operatorname{mes}\{\eta : S_\tau(\eta) \leqslant c\}$. Производная $\partial/\partial\tau m_\tau(c)$ может быть выражена через интеграл по поверхности уровня функции $S_\tau(c)$ (см. [22]):

$$\frac{\partial}{\partial\tau} m_\tau(c) = -\int_{S_\tau(\eta)=c} \frac{\partial}{\partial\tau} S_\tau(\eta)\, \omega_S(\eta) =$$

$$= \int_{S_\tau(\eta)=c} (H(p_\tau(i-1, i), \eta) - H(p_\tau(i, i+1), \eta))\, \omega_S(\eta), \quad (3.5)$$

где $\omega_S(\eta)$ — дифференциальная форма Лере — Гельфанда, отвечающая функции $S_\tau(\eta)$ и удовлетворяющая уравнению $dS_\tau(\eta) \wedge \omega_S(\eta) = d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n$, а $H(p, x)$ — произвольная гладкая функция Гамильтона, входящая в уравнение Гамильтона — Якоби для функций $S(i, i+1)$. В частности,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} S(i-1, i) + H(p_\tau(i-1, i), \eta) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} S(i, i+1) - H(p_\tau(i, i+1), \eta) = 0,$$

где

$$p_\tau(i-1, i) = \frac{\partial}{\partial\eta} S(i-1, i) \stackrel{\text{def}}{=} p^-; \quad p_\tau(i, i+1) = -\frac{\partial}{\partial\eta} S(i, i+1) \stackrel{\text{def}}{=} p^+.$$

Через p^- и p^+ обозначены импульсы вдоль экстремалей, приходящих из (ξ^{i-1}, t_{i-1}) в (η, τ) и из (η, τ) в (ξ^{i+1}, t_{i+1}) соответственно. Условие невырожденности экстремалей $X_\tau(i-1, i)$ и

$X_\tau(i, i+1)$ обеспечивает знакоопределенность определителей матриц $\frac{\partial p_\tau(i-1, i)}{\partial \eta}$ и $\frac{\partial p_\tau(i, i+1)}{\partial \eta}$, существование соответствующих обратных матриц и оценку $p^*_\tau - p\pm = O(\eta-\eta^*)$.

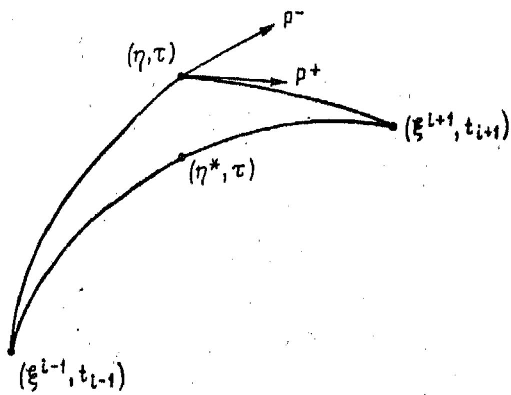

Рис. 3.1

Отсюда следует, что в окрестности точки $p_\tau = p_\tau(i-1, i+1)$ $X_\tau = X_\tau(i-1, i+1)$ разность $H(p^-, \eta) - H(p^+, \eta)$ допускает разложение по степеням $\eta-\eta^*$

$$H(p^-, \eta) - H(p^+, \eta) = (\nabla S(\eta), \dot{X}_\tau(i-1, i+1)) + \\ + O(\eta-\eta^*)\, O(\nabla S_\tau(\eta)). \qquad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.4) и учитывая, что поверхностный интеграл от первого члена равен нулю, получим:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} m_\tau(c) = \int\limits_{S_\tau(\eta)=c} \frac{\partial}{\partial\tau} S_\tau(\eta)\, \omega_S(\eta) = \int\limits_{S_\tau(\eta)=c} O(\eta-\eta^*)\, O(\nabla S_\tau(\eta) \wedge \omega_\tau(\eta)) = \\ = \int\limits_{S_\tau(\eta)=c} O(1)\, d\eta = O(m_\tau(c)). \qquad (3.7)$$

Собирая оценки (3.4) и (3.7), мы заключаем, что при сколь угодно малом $c>0$

$$\operatorname{inv} S_{\tau_2} - \operatorname{inv} S_{\tau_1} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau O(\ln c)^{-1} + o(1) = o(1).$$

Поэтому $\operatorname{inv} S_{\tau_2} = \operatorname{inv} S_{\tau_1}$. Что и требовалось доказать.

Следствие. $\operatorname{Inv} S(X_\tau{}^*)$ не зависит от малых шевелений точек разбиения $\{t_i\}$.

В следующем разделе мы приведем определение инварианта вырождения экстремали, не использующее разбиения $\{t_i\}$.

§ 4. ВТОРОЙ ЧЛЕН ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКИ И ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ

Второй член логарифмической асимптотики конечномерного интеграла Лапласа

$$I(\varepsilon)=\int \exp(-S(\xi)/\varepsilon)\,\varphi(\xi)\,d\xi,\quad \varphi(\xi)\in C_0^\infty(R^N),\quad S(\xi)\in C^\infty(R^N)$$

можно выразить через базис ядра матрицы $S^{(2)}(\xi^*)$, если ξ^* — изолированная точка минимума функции S и $\varphi(\xi^*)\neq 0$. Для этого достаточно произвести невырожденную замену переменных $\xi\to(\rho,\eta)$, так чтобы среди новых переменных содержались все базисные векторы ядра матрицы $S^{(2)}(\xi^*)$:

$$S^{(2)}(\xi^*)X_i=0,\ 1\leqslant i\leqslant n;\ S^{(2)}(\xi^*)Y_j=\lambda_j Y_j,\ 1\leqslant j\leqslant m,$$
$$\lambda_j>0;\quad m+n=N.$$

Согласно леммам 3.2 и 3.5, невырожденность замены переменных $\xi=\sum\limits_i X_i\rho_i+\sum Y_j\eta_j$ обеспечивает равенство

$$\operatorname{inv} S(\xi^*)=\operatorname{inv}\tilde S(\rho^*)+m/2,\tag{4.1}$$

где $\xi^*=\sum X_i\rho_i^*+\sum Y_j\eta_j^*,\quad \tilde S(\rho)=S\left(\sum X_i\rho_i+\sum Y_j\eta_j(\rho)\right)$, а функции $\eta_j(\rho)$ определяются из условия:

$$\operatorname{grad}_\eta S\left(\sum_i X_i\rho_i+\sum_j Y_j\eta_j\right)=0.$$

Поскольку ядро второй вариации функционала действия $S^{(2)}[x_\tau^*]$ конечномерно, то по аналогии с (4.1), второй член логарифмической асимптотики интеграла (2.27) можно выразить в терминах базисных функций ядра второй вариации действия:

$$\operatorname{Inv} S[x_\tau^*]\overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=}\lim_{c\downarrow 0}\ln\operatorname{mes}\left\{\eta: S\left[x_\tau^*+\sum_1^N x_\tau\ (\eta^l t_l\,|\,\eta^{l+1}t_{l+1})\right]-\right.$$

$$\left.-S[x_\tau]\leqslant c\right\}\Big/\ln c-Nn/2=$$

$$=\lim_{c\downarrow 0}\ln\operatorname{mes}\left\{\xi: S\left[x_\tau^*+\sum_1^m y_\tau^j\xi_j\right]-S[x_\tau^*]\leqslant c\right\}\Big/\ln c-m/2,\tag{4.2}$$

где $x=(x^1\ldots x^N)\in R^m,\ x^l\in R^{n_l},\quad \sum\limits_1^N n_l=m;\quad \xi=(\xi_1\ldots\xi_m)\in R^m,$

$\{y_\tau^j\}_1^m$ — базис ядра второй вариации действия $S^{(2)}[x_\tau^*]$:

$$S^{(2)}[x_\tau^*] = -\frac{d}{d\tau}\,\alpha(\tau)\,\frac{d}{d\tau} + 2\beta(\tau)\,\frac{d}{d\tau} + \gamma(\tau) \overset{\text{def}}{=} \hat{L}(\tau), \qquad (4.3)$$

$$\alpha(\tau) = (\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j)\big|_{\substack{\dot{q}=\dot{x}_\tau^*\\ q=x_\tau^*}},\quad \beta(\tau) = (\partial^2 L/\partial q_i\partial\dot{q}_j)\big|_{\substack{\dot{q}=\dot{x}_\tau^*\\ q=x_\tau^*}},$$

$$\gamma(\tau) = (\partial^2 L/\partial q_i\partial q_j)\big|_{\substack{\dot{q}=\dot{x}_\tau^*\\ q=x_\tau^*}}, \qquad (4.4)$$

$$\hat{L}(\tau)\,y_\tau^j = 0,\quad 1 \leqslant j \leqslant m,\quad y_0{}^j = y_t{}^j = 0.$$

Для доказательства (4.2) будет использовано дополнительное условие, гарантирующее локальную выпуклость функционала действия в окрестности экстремали:

(4) $S^{(2)}[x_\tau] \geqslant 0$ для всех траекторий x_τ, принадлежащих сколь угодно малой открытой в топологии $C[0, t]$ окрестности изолированной экстремали x_τ^*.

Это условие выполнено, например, если $\alpha\gamma \geqslant 0$, $\dot{\beta} \leqslant 0$. Такое неравенство обеспечивает неотрицательность квадратичной формы

$$\langle \eta_\tau, \hat{L}(\tau)\,\eta_\tau \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_0^t (\eta_\tau, \hat{L}(\tau)\,\eta_\tau)\,d\tau.$$

Собственные функции оператора $\hat{L}(\tau)$, обращающиеся в нуль при $\tau=0$, $\tau=t$, образуют систему функций $\{y_\tau^j\}_1^\infty$, ортонормированную с матричнозначным весом $\hat{\rho}(\tau)$. В самосопряженном случае ($\beta \equiv 0$, $\hat{L} = \hat{L}^*$) $\hat{\rho}(\tau) \equiv 1$, а для несамосопряженного оператора $\hat{\rho}(\tau)$ весовая матрица определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\,\hat{\rho} = -2\hat{\rho}\alpha^{-1}\beta,\quad \hat{\rho}\,|_{\tau=0} = E. \qquad (4.5)$$

Предположение о полноте этой системы в дальнейшем изложении не используется. Вместо этого будем считать, что ортонормированные собственные функции, отвечающие нулевому собственному значению оператора $\hat{L}(\tau)$, образуют базис ядра отображения $\hat{L}(\tau)$ в следующем смысле.

Определение 4.1. Ортонормированные с весом (4.5) собственные функции $\{y_\tau^j\}_1{}^m$, удовлетворяющие (4.4), называются базисом ядра оператора $\hat{L}(\tau)$, если из соотношений

$$\langle \eta_\tau, \hat{L}(\tau)\,\eta_\tau \rangle = 0,\quad \langle y_\tau^j, \hat{\rho}(\tau)\,\eta_\tau \rangle = 0,\quad 1 \leqslant j \leqslant m,\quad \eta_0 = \eta_t = 0$$

следует, что $\eta_\tau \equiv 0$.

Иными словами, вне базиса ядра не существует функций, обращающих в нуль квадратичную форму $\langle \eta_\tau, \hat{L}(\tau)\eta_\tau \rangle$.

Основная трудность, возникающая при доказательстве (4.2), связана с нелинейной зависимостью траектории $x_\tau(\xi^{i-1}t_{i-1}|\xi^i t_i)$ от ξ^{i-1} и ξ^i. Можно показать, что добавление произвольных полиномиальных членов

$$x_\tau(\xi^{i-1}t_{i-1}|\xi^i t_i) \to x_\tau(\xi^{i-1}t_{i-1}|\xi^i t_i) + \sum_{k:|k|\geqslant 2} a_k(\tau)\xi^k, \quad k \in N^m,$$

увеличивает правую часть (4.2) и, вообще говоря, нарушает равенство (4.2). Нужную нам оценку можно получить лишь для специальных функций $a_k(\tau)$. Поэтому сначала мы рассмотрим линейный случай, имеющий место, например, для полиномиальных лагранжианов степени не выше второй, а затем сведем нелинейный случай к линейному.

Для доказательства равенства (4.2) в линейном случае для несамосопряженного оператора $\hat{L}(\tau)$ понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. Пусть x_τ^* — изолированная в топологии $C[0, t]$ экстремаль действия $S[x_\tau]$ и $\{y_\tau^j\}_1^m$ — базис ядра второй вариации действия в точке x_τ^*. Тогда для любой гладкой функции $\eta_\tau : [0, t] \to R^n$, $\eta_0 = \eta_t = 0$ выполнено

$$\langle y_\tau^j, S^{(2)}[x_\tau^*]\eta_\tau \rangle = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{4.6}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\theta_{\lambda\mu}(z) = S\left[x_\tau^* + \sum_1^m \lambda_j z_j y_\tau^j + \mu\eta_\tau \sum_1^m z_j\right], \quad z \in R^m, \ \lambda \in R^m, \ \mu \in R^1,$$

которая по определению экстремали x_τ^* имеет изолированный минимум по переменной z в начале координат для любых достаточно малых $|\lambda|$ и μ. Следовательно,

$$\partial^2\theta_{\lambda\mu}(z)/\partial z_j^2|_{z=0} \geqslant 0. \tag{4.7}$$

С другой стороны,

$$\partial^2\theta_{\lambda\mu}(z)/\partial z_j^2|_{z=0} = \lambda_j\mu \langle y_\tau^j, \hat{L}(\tau)\eta_\tau \rangle + \mu^2 \langle \eta_\tau, \hat{L}(\tau)\eta_\tau \rangle. \tag{4.8}$$

Предположим, что при некотором k $\langle y_\tau^k, \hat{L}(\tau)\eta_\tau \rangle \neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что выполнено строгое неравенство

$$\langle y_\tau^k, \hat{L}(\tau)\eta_\tau \rangle < 0.$$

Положим теперь λ_j для всех $j \neq k$ в формуле (4.8) и возьмем достаточно малое $\mu > 0$ так, чтобы при фиксированном $\lambda_k > 0$ правая часть (4.8) стала отрицательной. Полученное противоречие с оценкой (4.7) доказывает утверждение леммы.

Теорема 4.1. Пусть $\{y_\tau^j\}_1^m$ — базис ядра второй вариации действия в точке x_τ^* и $y_\tau^{\text{лин}}(\xi)$ — семейство непрерывных траекторий $y_\tau^{\text{лин}}:[0, t]\to R^n$, линейно зависящее от параметра $\xi \in R^n$ такое, что

(а) $y_\tau^{\text{лин}}(\xi)\equiv 0$ только при $\xi=0$, $y_0^{\text{лин}}(\xi)=y_t^{\text{лин}}(\xi)=0$;

(б) $\partial^2_{\xi_i} S\left[x_\tau^*+y_\tau^{\text{лин}}(\xi)\right]=0$ для любого $i=1, 2, \ldots, m$.

Тогда

$$\lim_{c\downarrow 0} \ln \operatorname{mes}\left\{\xi : S\left[x_\tau^*+y_\tau^{\text{лин}}(\xi)\right]-S\left[x_\tau^*\right]\leqslant c\right\}/\ln c=$$

$$=\lim_{c\downarrow 0} \ln \operatorname{mes}\left\{\alpha : S\left[x_\tau^*+\sum_1^m \alpha_j y_\tau^j\right]-S\left[x_\tau^*\right]\leqslant c\right\}\Big/\ln c. \qquad (4.9)$$

Доказательство. Разложим $y_\tau^{\text{лин}}(\xi)$ на две составляющие — базисную и внебазисную:

$$y_\tau^{\text{лин}}(\xi)=\sum_1^m y_\tau^j(a^j, \xi)+\hat{\eta}_\tau\xi,$$

где векторы $a^j=(a_1{}^j\ldots a_m{}^j)\in R^n$ определяются из условия

$$(a^j, \xi)=\langle y_\tau^j, \hat{\rho}(\tau)\, y_\tau^{\text{лин}}(\xi)\rangle,$$

а матрица $\hat{\eta}_\tau=(\eta_\tau^1\ldots\eta_\tau^m)\in R^{n\times m}$ из соотношения $\hat{\eta}_\tau\xi=y_\tau^{\text{лин}}(\xi)-$ $-\sum_1^m y_\tau^j(a^j, \xi)$. Очевидно, что для любого $j=1, 2,\ldots,m$ выполнено

$$\langle y_\tau^j, \hat{\rho}(\tau)\,\eta_\tau^i\rangle=0, \quad 1\leqslant i\leqslant m, \quad \eta_0{}^i=\eta_t{}^i=0. \qquad (4.10)$$

Из условия теоремы следует, что

$$0=\partial^2 S\left[x_\tau^*+\sum_1^m y_\tau^j(a^j, \xi)+\hat{\eta}_\tau\xi\right]\Big/\partial\xi_i{}^2\Big|_{\xi=0}=$$

$$=\sum_{i=1}^m \langle y_\tau^j a_i{}^j, \hat{L}(\tau)\,\eta_\tau^i\rangle+\langle\eta_\tau^i, \hat{L}(\tau)\,\eta_\tau^i\rangle.$$

В соответствии с леммой 4.1 первое слагаемое в правой части этой формулы равно нулю. Поэтому

$$\langle\eta_\tau^i, \hat{L}(\tau)\,\eta_\tau^i\rangle=0, \quad 1\leqslant i\leqslant m. \qquad (4.11)$$

Из (4.10—4.11) и результата леммы 4.1 мы заключаем, что $\eta_\tau^i\equiv 0$. Таким образом,

$$S\left[x_\tau^*+y_\tau^{\text{лин}}(\xi)\right]=S\left[x_\tau^*+\sum_{j=1}^m y_\tau^j(a^j, \xi)\right].$$

Рассмотрим квадратную матрицу $A=(a^1\ldots a^m)\in R^{m\times m}$. Поскольку x^*_τ — изолированная экстремаль и $y^{\text{лин}}_\tau(\xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$, то $\operatorname{rank} A$ не может быть меньше m. В противном случае нарушается предположение о изолированности экстремали x^*_τ, ибо существует ненулевой вектор z такой, что $Az=0$ и $\sum_1^m \lambda y^j_\tau(a^j, z)=0$ при любом $\lambda\in R^1$. Следовательно, $\det A\neq 0$ и замена переменных $\xi\to\alpha$: $\alpha_i=(A\xi)_i$, $1\leqslant i\leqslant m$, невырождена. Теперь равенство (4.9) следует из результата леммы 3.2.

Перейдем к нелинейному случаю.

Инвариант вырождения экстремума аналитической функции конечного числа переменных допускает простую геометрическую интерпретацию. Пусть $S(x)$ — аналитическая функция, достигающая минимума в точке $x^*=0$.

$$S(x)=\sum_{k:|k|\geqslant 2} a_k x^k,\quad a_k\in R,\quad k\in N^n,\quad x\in R^n, \tag{4.12}$$

N и R_+ — множества неотрицательных целых и вещественных чисел. Выпуклая оболочка в R_+^n множества $\bigcup_{k:a_k\neq 0}\{k+R_+^n\}$ называется многогранником Ньютона ряда (4.12) и обозначается через $\Gamma_+(S)$ [6]. Объединение всех замкнутых компактных граней $\Gamma_+(S)$ называется диаграммой Ньютона и обозначается через $\Gamma(S)$. Главная часть ряда, равная $\sum_{k\in\Gamma(S)} a_k x^k$, называется невырожденной, если $\operatorname{grad}\sum_{k\in\gamma} a_k x^k\neq 0$ при $x\neq 0$ для любой замкнутой компактной грани $\gamma\in\Gamma(S)$.

Обозначим через t расстояние вдоль биссектриссы положительного октанта от начала координат до многогранника Ньютона: $t=\min_{(\tau\ldots\tau)\in\Gamma_+(S)}\tau$. Оказывается, что инвариант вырождения экстремума аналитической функции $S(x)$ с невырожденной главной частью равен t^{-1} (см. [6]). Мы воспользуемся этим равенством для доказательства (4.2.)

Пусть, как и в предыдущих разделах, $x^*_\tau=x_\tau(y0\,|\,xt)$ — изолированная экстремаль действия (2.1), $x_\tau(\eta)$ — ломаная кусочно-экстремальная траектория, проходящая через точки $(y, 0)$, $(x^*_{t_1}+\eta^1, t_1)\ldots(x^*_{t_N}+\eta^N, t_N)$, (x, t), а $S(\eta)$ — значение действия на траектории $x_\tau(\eta)$. Как известно из теории Морса [17], ранг матрицы $S^{(2)}(0)$ равен $nN-m$, где m — размерность ядра второй вариации действия, $\eta\in R^{nN}$. Поэтому переменные функции $S(\eta)$ можно разбить на две части $\eta=(\xi, \rho)$ так, что

$\rho \in R^{nN-m}$ и $\det S^{(2)}_{\rho\rho}(0)>0$, $\det S^{(2)}_{\xi\xi}(0)=0$. При этом, в соответствии с леммой 3.5, $\operatorname{inv} S(\eta^*)-Nn/2=\operatorname{inv}\tilde S(\xi^*)-m/2$, где $\eta^*=0$, $\xi^*=0$, $\tilde S(\xi)=S(\xi,\rho(\xi))$, а функция $\rho(\xi)$ определяется из уравнений $\operatorname{grad}_\rho S(\xi,\rho)=0$. Описанные выше переменные ξ функции S будем называть вырожденными, а переменные ρ — невырожденными. В этих терминах $\tilde S(\xi)$ — минимум функции $S(\xi,\rho)$ по невырожденным переменным при фиксированных значениях вырожденных.

Обозначим далее через $y_\tau(\xi)$ уклонение кусочно-экстремальной траектории $x_\tau(\eta)|_{\eta=(\xi,\rho(\xi))}$ от экстремали: $y_\tau(\xi)= =x_\tau(\eta)|_{\eta=(\xi,\rho(\xi))}-x^*_\tau$, а через $y^{\text{лин}}_\tau(\xi)$ — ее линейную часть: $y^{\text{лин}}_\tau(\xi)=\partial y_\tau(0)/\partial\xi\cdot\xi$. В силу замечания к лемме 3.5, $\rho(\xi)= =O(\xi)^2$, и поэтому

$$y^{\text{лин}}_\tau(\xi)=\left.\frac{\partial x_\tau(\xi,\rho)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0,\rho=0}\cdot\xi.$$

Рассмотрим три аналитические функции, зависящие от параметра $\lambda\in(0,1]$:

$$\theta(\lambda\xi)=S[x^*_\tau+y_\tau(\lambda\xi)]-S[x^*_\tau],\quad \theta_\lambda(\xi)=S[x^*_\tau+\lambda y_\tau(\xi)]-S[x^*_\tau],$$
$$\theta^{\text{лин}}_\lambda(\xi)=\theta^{\text{лин}}(\lambda\xi)=S[x^*_\tau+\lambda y^{\text{лин}}_\tau(\xi)]-S[x^*_\tau].$$

Точки, через которые траектории $y_\tau(\lambda\xi)$, $\lambda y_\tau(\xi)$ и $y^{\text{лин}}_\tau(\lambda\xi)$ проходят в моменты t_i, определяются координатами векторов $\eta=(\lambda\xi,\rho(\lambda\xi))$, $\bar\eta=(\lambda\xi,\lambda\rho(\xi))$ и $\bar{\bar\eta}=(\lambda\xi,0)$. Поэтому из определения функции $\rho(\xi)$ имеем

$$\theta(\lambda\xi)\leqslant\theta_\lambda(\xi),\quad \theta(\lambda\xi)\leqslant\theta^{\text{лин}}(\lambda\xi)=\theta^{\text{лин}}_\lambda(\xi)\tag{4.13}$$

при любом λ. Из определения инварианта вырождения экстремума отсюда следуют аналогичные неравенства для inv:

$$\operatorname{inv}\theta\leqslant\operatorname{inv}\theta_\lambda,\quad \operatorname{inv}\theta\leqslant\operatorname{inv}\theta^{\text{лин}}=\operatorname{inv}\theta^{\text{лин}}_\lambda,\tag{4.14}$$

причем инварианты вырождения экстремумов функций $\theta(\lambda\xi)$ и $\theta^{\text{лин}}(\lambda\xi)$ не зависят от λ при всех $\lambda\neq0$. Для функции $\theta_\lambda(\xi)$ независимость $\operatorname{inv}\theta_\lambda$ от λ пока мы не можем гарантировать.

Дальнейший план доказательства равенства (4.2) состоит в проверке следующих соотношений:

$$\operatorname{inv}\theta=\operatorname{inv}\theta_\lambda,\ \lambda\in(0,1];\quad \operatorname{inv}\theta_\lambda\geqslant\operatorname{inv}\theta^{\text{лин}}\ (\text{п. в.}).\tag{4.15}$$

Неравенства (4.14) в сочетании с (4.15) приводят к оценке $\operatorname{inv}\theta$ сверху и снизу:

$$\operatorname{inv}\theta^{\text{лин}}_\lambda\leqslant\operatorname{inv}\theta_\lambda=\operatorname{inv}\theta\leqslant\operatorname{inv}\theta^{\text{лин}}_\lambda,\ \lambda\in(0,1]\ (\text{п. в.}).\tag{4.16}$$

Поскольку инварианты вырождения экстремумов функций $\theta(\lambda\xi)$ и $\theta^{\text{лин}}(\lambda\xi)$ не зависят от λ, то из (4.16), в частности, следует, что $\operatorname{inv}\theta=\operatorname{inv}\theta^{\text{лин}}$ при $\lambda=1$. Отсюда с помощью теоремы 4.1 выводится равенство (4.2). Перейдем к выполнению намеченного плана доказательства.

Сначала покажем, что равенство $\operatorname{inv}\theta = \operatorname{inv}\theta_\lambda$ вытекает из оценки (4.14) и следующей леммы.

Лемма 4.2. Если существует открытая в топологии $C[0, t]$ окрестность $U = U(x_\tau^*)$ экстремали x_τ^*, в которой $S^{(2)}[x_\tau] \geqslant 0$, $x_\tau \in U$, то

$$\theta_\lambda(\xi) \leqslant \lambda\theta(\xi). \qquad (4.17)$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем два очевидных равенства

$$\theta_\lambda(\xi) = \int_0^\lambda \frac{d}{d\lambda}\theta_\lambda(\xi)\,d\xi = \int_0^\lambda d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} \langle\, y_\tau(\xi),\ S^{(2)}[x_\tau^* + \lambda_2 y_\tau(\xi)]\, y_\tau(\xi)\,\rangle\, d\lambda_2,$$

$$\theta_1(\xi) - \theta_\lambda(\xi) = \theta(\xi) - \theta_\lambda(\xi) =$$

$$= \int_\lambda^1 d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} \langle\, y_\tau(\xi),\ S^{(2)}[x_\tau^* + \lambda_2 y_\tau(\xi)]\, y_\tau(\xi)\,\rangle\, d\lambda_2.$$

В силу условия леммы при всех достаточно малых ξ интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \langle\, y_\tau(\xi),\ S^{(2)}[x_\tau^* + \mu y_\tau(\xi)]\, y_\tau(\xi)\,\rangle\, d\mu =$$

$$= \langle\, S^{(1)}[x_\tau^* + \lambda y_\tau(\xi)],\ y_\tau(\xi)\,\rangle$$

является неотрицательной монотонно неубывающей функцией λ. Поэтому

$$\theta_\lambda(\xi) \leqslant \lambda I(\lambda), \quad \theta(\xi) - \theta_\lambda(\xi) \geqslant (1-\lambda)\, I(\lambda). \qquad (4.18)$$

Умножим первое неравенство (4.18) на $1-\lambda$, второе на λ и вычтем одно из другого. Получим (4.17). Лемма доказана.

Следствие. Если выполнены условия (1)—(4), то $\operatorname{inv}\theta = \operatorname{inv}\theta_\lambda$ при $\lambda \in (0, 1]$. Действительно, из (4.17) следует, что при $\lambda \neq 0$ $\operatorname{inv}\theta_\lambda \leqslant \operatorname{inv}\lambda\theta = \operatorname{inv}\theta$. С другой стороны, ранее было установлено обратное неравенство (4.14). Таким образом,

$$\operatorname{inv}\theta_\lambda = \operatorname{inv}\theta, \quad \lambda \in (0, 1]. \qquad (4.19)$$

Для завершения доказательства (4.2) используется следующее предположение:

(5) Главные части рядов $\theta_\lambda(\xi)$ и $\theta_\lambda^{\text{лин}}(\xi)$ невырождены. Критерии невырожденности описаны, например, в [6]. Рассмотрим многогранники Ньютона аналитических функций $\theta_\lambda(\xi)$ и $\theta^{\text{лин}}(\lambda\xi)$, имеющих в точке $\xi = 0$ изолированный минимум.

Лемма 4.3. При почти всех $\lambda \in (0, 1]$

$$\Gamma_+(\theta_\lambda) \supseteq \Gamma_+(\theta_\lambda^{\text{лин}}). \qquad (4.20)$$

Доказательство. Разложим в ряд по степеням ξ функции $\theta_\lambda(\xi)-\theta(0)$ и $\theta^{\text{лин}}(\lambda\xi)-\theta(0)$:

$$\theta^{\text{лин}}(\lambda\xi)-\theta(0)=S[x_\tau^*+\lambda y_\tau^{\text{лин}}(\xi)]-S[x_\tau^*]=\sum_{k:|k|\geqslant 2}\xi^k\lambda^{|k|}a_k,\quad k\in N^m,$$

$$\theta_\lambda(\xi)-\theta(0)=S[x_\tau^*+\lambda y_\tau(\xi)]-S[x_\tau^*]=$$

$$=S\left[x_\tau^*+\lambda y_\tau^{\text{лин}}(\xi)+\lambda\sum_{r:|r|\geqslant 2}\xi^r\alpha_r(\tau)\right]-S[x_\tau^*]=$$

$$=\sum_{k:|k|\geqslant 2}\xi^k\sum_{j=0}^{|k|-2}\lambda^{|k|-j}a_{kj}.$$

Очевидно, что $a_{k0}=a_k$ и если $a_k\neq 0$, то при почти всех $\lambda\in(0,1]$

$$a_k(\lambda)=\sum_0^{|k|-2}\lambda^{|k|-j}a_{kj}\neq 0.$$

Таким образом, каждая вершина многогранника Ньютона $\Gamma_+(\theta_\lambda^{\text{лин}})$ при почти всех $\lambda\in(0,1]$ является также вершиной многогранника Ньютона $\Gamma_+(\theta_\lambda)$. Поскольку число вершин не более, чем счетно, соотношение (4.20) выполнено также при почти всех $\lambda\in(0,1]$. Лемма доказана.

Следствие. При почти всех $\lambda\in(0,1]$ расстояние вдоль биссектрисы координатного угла от начала координат до $\Gamma_+(\theta_\lambda)$ не больше, чем до $\Gamma_+(\theta_\lambda^{\text{лин}})$. Для инвариантов вырождения экстремумов функций $\theta_\lambda^{\text{лин}}$ и θ_λ справедливо обратное неравенство:

$$\operatorname{inv}\theta_\lambda\geqslant\operatorname{inv}\theta_\lambda^{\text{лин}},\ \text{п. в.}\ \lambda\in(0,1].\tag{4.21}$$

Отсюда следует (4.16) и важное для дальнейшего изложения равенство $\operatorname{inv}\theta=\operatorname{inv}\theta^{\text{лин}}$ при $\lambda=1$.

Теорема 4.5. Пусть выполнены условия (1)—(5). Тогда

$$\operatorname{Inv}S[x_\tau^*]=$$

$$=\lim_{c\downarrow 0}\ln\operatorname{mes}\left\{\xi:S\left[x_\tau^*+\sum_1^m y_\tau^j\xi_j\right]-S[x_\tau^*]\leqslant c\right\}\Big/\ln c-m/2,\tag{4.22}$$

где $\{y_\tau^j\}_1^m$ — базис ядра второй вариации действия.

Доказательство. Выше было установлено равенств

$$\lim_{c\downarrow 0}\ln\operatorname{mes}\{\eta:S[x_\tau(\eta)]-S[x_\tau^*]\leqslant c\}/\ln c-Nn/2=$$

$$=\lim_{c\downarrow 0}\ln\operatorname{mes}\{\xi:S[x_\tau^*+y_\tau^{\text{лин}}(\xi)]-S[x_\tau^*]\leqslant c\}/\ln c-m/2\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Inv}S[x_\tau^*].$$

Теперь, чтобы доказать (4.2), и (4.22) мы воспользуемся результатом теоремы 4.1. Для этого достаточно убедиться, что для семейства траекторий

$$y_\tau^{\text{лин}}(\xi)=\frac{\partial x_\tau(\xi,\rho)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0,\rho=0}\xi \qquad (4.23)$$

выполнены условия (а) — (б) теоремы 4.1. Непрерывная траектория $y_\tau^{\text{лин}}(\xi)$ в моменты $t_1\ldots t_N$ проходит через точки $\eta^1\ldots\eta^N$, $\eta^i\in R^n$, где $\eta\in R^{nN}$ — вектор, вырожденные компоненты которого равны ξ, а невырожденные компоненты равны нулю: $\eta=(\xi, 0)$. Поэтому $y_\tau^{\text{лин}}(\xi)\equiv 0$ только при $\xi=0$. Поскольку $x_0(\eta)=y$ и $x_t(\eta)=x$ для любых $\eta=(\xi,\rho)$, то

$$\frac{\partial x_\tau(\eta)}{\partial\xi}\bigg|_{\tau=0,\tau=t}=0,$$

так что $y_0^{\text{лин}}(\xi)=y_t^{\text{лин}}(\xi)=0$. Условие (б) обеспечивается выбором переменных ξ — все они вырожденные (см. § 2, (2.26—2.27)). Теперь, в силу теоремы 4.1, инвариант вырождения экстремали действия может быть вычислен по формулам (4.2) или (4.22). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 4.5. Тогда

$$G_\varepsilon(y0\,|\,xt)=\varepsilon^{r_0+o(1)}\exp(-S/\varepsilon),$$

где $\quad S=\min\limits_j S[x_\tau^j(y0\,|\,xt)],\qquad I_S=\{i:S[x_\tau^i(y0\,|\,xt)]=S\}$, $r_0=\min\limits_{i\in I_S}\operatorname{Inv}S[x_\tau^i(y0\,|\,xt)]-n/2,\quad x_\tau^i\,(y0\,|\,xt)$ — i-я экстремаль, приходящая из $(y0)$ в (xt).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.*, Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 2, 11—49. (РЖМат, 1974, 8А462)
2. —, Критические точки гладких функций и их нормальные формы. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 5, 3—65 (РЖМат, 1976, 2А681)
3. *Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И.*, Мероморфность функции P^λ. Функц. анализ и его прил., 1969, *3*, № 1, 84—85 (РЖМат, 1969, 6Б564)
4. *Боровков А. А.*, Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах. Теория вероятностей и ее применения, 1967, *12*, № 4, 635—654 (РЖМат, 1968, 8В37)
5. *Буслаев В. С.*, Континуальные интегралы и асимптотика решений параболических уравнений при $t\to 0$. Приложения к дифракции. В сб. «Проблемы математической физики». Вып. 2. Л., Ленингр. ун-т, 1967, 85—107 (РЖМат, 1968, 8Б475)
6. *Варченко А. Н.*, Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. Функц. анализ и его прил., 1976, *10*, № 3, 13—38 (РЖМат, 1977, 1А535)
7. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.*, Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М., Наука, 1979, 424 с. (РЖМат, 1979, 12В109К)
8. *Гертнер Ю.*, Теоремы о больших уклонениях для некоторого класса случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 1, 95—106 (РЖМат, 1976, 8В36)
9. —, О больших уклонениях от инвариантной меры. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 1, 27—42 (РЖМат, 1977, 8В36)
10. *Гринь А. Г.*, О малых случайных импульсных возмущениях динамиче-

ских систем. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20,* № 1, 150—158 (РЖМат, 1975, 7В69)
11. *Дубровский В. Н.,* Точные асимптотические формулы лапласовского типа для марковских процессов. Докл. АН СССР, 1976, *226,* № 5, 1001—1004 (РЖМат, 1976, 10В42)
12. *Кифер Ю. И.,* Об асимптотике переходных плотностей процессов с малой диффузией. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21,* № 3, 527—536 (РЖМат, 1977, 2В105)
13. *Маслов В. П.,* Теория возмущений и асимптотические методы. М., МГУ, 1965
14. —, Глобальное асимптотическое разложение вероятности больших уклонений и его связь с квазиклассикой. Доклад на заседании Московского математического общества 20 февраля 1979 г. Успехи мат. наук, 1979, *34,* № 5, 213
15. —, *Федорюк М. В.,* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., Наука, 1976, 296 с. (РЖМат, 1977, 2Б823К)
16. —, —, О втором члене логарифмической асимптотики интегралов Лапласа. Мат. заметки, 1981, *30,* № 5
17. *Милнор Дж.,* Теория Морса. М., Мир, 1965, 184 с. (РЖМат, 1965, 12А456К)
18. *Могульский А. А.,* Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21,* № 2, 309—323 (РЖМат, 1976, 12В55)
19. *Молчанов С. А.,* Диффузионные процессы и риманова геометрия. Успехи мат. наук, 1975, *30,* № 1, 3—59 (РЖМат, 1975, 7В66)
20. *Петров В. В.,* Суммы независимых случайных величин. М., Наука, 1972, 416 с. (РЖМат, 1972, 9В9К)
21. *Рокафеллар Р.,* Выпуклый анализ. М., Мир, 1973, 469 с. (РЖМат, 1973, 6В515К)
22. *Федорюк М. В.,* Метод перевала. М., Наука, 1977, 368 с. (РЖМат, 1978, 1Б7К)
23. *Фрейдлин М. И.,* О стабильности высоконадежных систем. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20,* № 3, 584—595 (РЖМат, 1976, 3В124)
24. —, Принцип усреднения и теоремы о больших уклонениях. Успехи мат. наук, 1978, *33,* № 5, 107—160 (РЖМат, 1979, 1В55)
25. *Хартман Ф.,* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970, 720 с. (РЖМат, 1971, 3Б141К)
26. *Albeverio S. A., Höegh-Krohn R. J.,* Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics. I. Invent. math., 1977, *40,* № 1, 59—106 (РЖМат, 1977, 11Б761)
27. —, —, Mathematical theory of Feynman path integrals. Lect. Notes Math., 1976, № 523, 139 pp. (РЖМат, 1977, 2Б985)
28. *Choquard Ph.,* Traitement semi-classique des forces générales dans la representation de Feynman. Helv. Phys. Acta, 1955, *28,* № 2-3, 89—157
29. *Dangelmayr G., Veit W.,* Semiclassical approximation of path integrals on and near caustics in terms of catastrophes. Ann. Phys., 1979, *118,* № 1, 108—138 (РЖМат, 1979, 11Б496)
30. *McLaughlin D. W.,* Path integrals, asymptotics and singular perturbations. J. Math. Phys., 1972, *13,* № 5, 784—796
31. *Schulman L. S.,* Caustics and multivaluedness. Two results of adding path applitudes. In «Functional Integration and its Applications». London, Oxford Univ. Press., 1975
32. *Varadhan S. R. S.,* On the behaviour of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. Communs Pure and Appl. Math., 1967, *20,* № 2, 431—455 (РЖМат, 1968, 12Б368)
33. —, Diffusion processes in a small time interval. Communs Pure and Appl. Math., 1967, *20,* № 4, 659—685 (РЖМат, 1969, 3Б325)