А. Г. Мясников, Аменабельные банаховы $L_1(G)$-модули, инвариантные средние и регулярность в смысле Аренса, *Изв. вузов. Матем.*, 1993, номер 2, 72–80

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1993 МАТЕМАТИКА № 2 (369)

УДК 517.982

А.Г.МЯСНИКОВ

АМЕНАБЕЛЬНЫЕ БАНАХОВЫ $L_1(G)$-МОДУЛИ, ИНВАРИАНТНЫЕ СРЕДНИЕ И РЕГУЛЯРНОСТЬ В СМЫСЛЕ АРЕНСА

§1. Введение

Пусть на некотором множестве M определено действие аменабельной группы G. Тогда в зависимости от наличия той или иной дополнительной структуры на M, с которой действие группы предполагается согласованным, множество M обладает рядом полезных свойств,напр., невозможностью парадоксального разбиения, наличием неподвижной точки и т.д. [1]. Во многих случаях, однако, сходным образом ведут себя неаменабельные группы, и поэтому представляется целесообразным изучать аменабельные действия произвольных групп. Мы ограничимся здесь рассмотрением банаховых $L_1(G)$-модулей (или, что эквивалентно для дискретных групп, G-модулей).

Пусть $P(G)=\{0\leqslant\varphi\in L_1(G):\|\varphi\|_1=1\}$. Левый банахов $L_1(G)$-модуль M назовем аменабельным, если он обладает следующим свойством, обобщающим свойство Эмерсона [2]: множество всех $x\in M$ таких, что $\inf\{\|\varphi x\|:\varphi\in P(G)\}=0$, замкнуто относительно сложения. Свойства аменабельных модулей во многом аналогичны свойствам модуля $L_\infty(G)$ для аменабельных групп и рассматриваются в теореме 2.1.

Из аменабельности группы G следует аменабельность $L_1(G)$-модуля M, однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно (теорема 2.2). В §2 произвольному модулю M сопоставляется такой подмодуль $\mathscr{L}_M(G)$ в $L_\infty(G)$, что M аменабелен в том и только том случае, когда аменабелен $\mathscr{L}_M(G)$. В свою очередь, аменабельность $\mathscr{L}_M(G)$ эквивалентна существованию топологически левоинвариантного на $\mathscr{L}_M(G)$ среднего (теорема 2.4).

Рассмотрим следующие два свойства модуля M:

а) билинейное отображение $(\varphi,z)\longmapsto\varphi x$, $\varphi\in L_1(G)$, $x\in M$, регулярно;

б) $\Phi\cdot\hat{x}\in\hat{M}$ для всех $\Phi\in L_1(G)^{**}$, $x\in M$, где $x\longmapsto\hat{x}$ – каноническое вложение M во второе сопряженное пространство M^{**}, а билинейное отображение $(\Phi,\hat{x})\longmapsto\Phi\cdot\hat{x}$ определено ниже. В случае $M=L_1(G)$ условие а) эквивалентно конечности группы G [3], а условие б) – компактности G ([4], предложение 4.1). В §3 показано, что каждое из свойств а), б) влечет аменабельность M, а регулярность M, кроме того, влечет аменабельность сопряженного модуля M^*. Отсюда, в частности, следует, что для любой группы G ее C^*-алгебра $C^*(G)$, рассматриваемая как левый $L_1(G)$-модуль, является аменабельной (пример 3.2). Заметим, что $C^*(G)$ как банахова алгебра не всегда аменабельна (см., напр., [5]).

Результаты §2 частично анонсированы в [6].

Пусть λ_G – левая мера Хаара на группе G, $L_1(G)$ и $L_\infty(G)$ – соответствующие банаховы пространства комплекснозначных функций. Левым банаховым $L_1(G)$-модулем называется банахово пространство M с билинейным отображением $(\varphi,x)\longmapsto\varphi x$, $\varphi\in L_1(G)$, $x\in M$, удовлетворяющим следующим условиям:

а) $(\varphi*\psi)x=\varphi(\psi x)$ для всех $\varphi,\psi\in L_1(G)$, $x\in M$, где

$$\varphi*\psi(t) = \int_G \varphi(s)\psi(s^{-1}t)d\lambda_G(s), \quad t\in G;$$

б) $\|\varphi x\|\leq\|\varphi\|_1\|x\|$ для всех $\varphi\in L_1(G)$, $x\in M$.

В частности, $L_\infty(G)$ будет рассматриваться как левый банахов $L_1(G)$-модуль с умножением $\varphi f=\varphi*f$, $\varphi\in L_1(G)$, $f\in L_\infty(G)$. На сопряженном пространстве M^* также введем структуру левого банахова $L_1(G)$-модуля, полагая $\langle x,\varphi F\rangle=\langle\varphi^* x,F\rangle$, $F\in M^*$, где $\varphi^*=\tilde{\varphi}/\Delta$, Δ – модулярная функция, $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t^{-1})$, $t\in G$. Через $M^{(n)}$ будем обозначать n-е сопряженное пространство к M, рассматриваемое как $L_1(G)$-модуль.

Пусть $L_1(G)X=\{\varphi x:\varphi\in L_1(G),\ x\in X\}$ для произвольного подмножества $X\subset M$. Как известно, $L_1(G)M$ является замкнутым линейным подпространством в M ([7], теорема 32.22).

Р.Аренс в [8] рассмотрел два способа продолжения ограниченного билинейного отображения $X\times Y\longrightarrow Z$, $(x,y)\longmapsto xy$, нормированных пространств X, Y, Z до билинейных отображений $(x^{**},y^{**})\longmapsto x^{**}\cdot y^{**}$, $(x^{**},y^{**})\longmapsto x^{**}\circ y^{**}$ из $X^{**}\times Y^{**}$ в Z^{**}. Эти продолжения строятся следующим образом:

1) $Z^*\times X\longrightarrow Y^*$, $(z^*,x)\longmapsto z^*\cdot x$, где $\langle y,z^*\cdot x\rangle=\langle xy,z^*\rangle$;

$Y^{**}\times Z^*\longrightarrow X^*$, $(y^{**},z^*)\longmapsto y^{**}\cdot z^*$, где $\langle x,y^{**}\cdot z^*\rangle=\langle z^*\cdot x,y^{**}\rangle$;

$X^{**}\times Y^{**}\longrightarrow Z^{**}$, $(x^{**},y^{**})\longmapsto x^{**}\cdot y^{**}$, где $\langle z^*,x^{**}\cdot y^{**}\rangle=\langle y^{**}\cdot z^*,x^{**}\rangle$;

2) $Y\times Z^*\longrightarrow X^*$, $(y,z^*)\longmapsto y\circ z^*$, где $\langle x,y\circ z^*\rangle=\langle xy,z^*\rangle$;

$Z^*\times X^{**}\longrightarrow Y^*$, $(z^*,x^{**})\longmapsto z^*\circ x^{**}$, где $\langle y,z^*\circ x^{**}\rangle=\langle y\circ z^*,x^{**}\rangle$;

$X^{**}\times Y^{**}\longrightarrow Z^{**}$, $(x^{**},y^{**})\longmapsto x^{**}\circ y^{**}$, где $\langle z^*,x^{**}\circ y^{**}\rangle=\langle z^*\circ x^{**},y^{**}\rangle$.

Обозначим через $\hat{x}$ образ элемента $x\in X$ при естественном вложении $X\longrightarrow X^{**}$ и заметим, что $x^{**}\cdot\hat{y}=x^{**}\circ\hat{y}$, $\hat{x}\cdot y^{**}=\hat{x}\circ y^{**}$.

Билинейное отображение $X\times Y\longrightarrow Z$ называется идеальным, если $X^{**}\cdot\hat{Y}\subset\hat{Z}$. Билинейное отображение $X\times Y\longrightarrow Z$ называется регулярным, если $x^{**}\cdot y^{**}=x^{**}\circ y^{**}$.

ТЕОРЕМА 1.1 ([4], предложения 3.1, 3.3). *Ограниченное билинейное отображение $X\times Y\longrightarrow Z$ банаховых пространств идеально в том и только том случае, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

а) *отображение $z^*\longmapsto y\circ z^*$ слабо компактно для всех y;*

б) *отображение $x\longmapsto xy$ слабо компактно для всех y.*

ТЕОРЕМА 1.2 ([9], теорема 1). *Ограниченное билинейное отображение $X\times Y\longrightarrow Z$ банаховых пространств регулярно в том и только том случае, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

а) *отображение $y^{**}\longmapsto x^{**}\cdot y^{**}$ слабо* непрерывно для всех x^{**};*

б) *отображение $x^{**}\longmapsto x^{**}\circ y^{**}$ слабо* непрерывно для всех y^{**};*

в) *отображение $x\longmapsto z^*\cdot x$ слабо компактно для всех z^*;*

г) *отображение $y\longmapsto y\circ z^*$ слабо компактно для всех z^*;*

д) *для любых ограниченных сетей $\{x_\alpha\}$, $\{y_\beta\}$ и элемента z^* повторные пределы*

$$\lim_\alpha \lim_\beta\langle x_\alpha y_\beta,z^*\rangle, \quad \lim_\beta \lim_\alpha\langle x_\alpha y_\beta,z^*\rangle$$

равны при условии, что они существуют.

Из теорем 1.1 и 1.2 следует, что непрерывное билинейное отображение $X\times Y \longrightarrow Z$ регулярно в том и только том случае, когда билинейное отображение $X\times Z^*\longrightarrow Y^*$, $(x,z^*)\longmapsto z^*\cdot x$, идеально.

Отметим еще одно свойство билинейных отображений, необходимое в дальнейшем. Пусть $u:X_0\longrightarrow X$, $v:Y_0\longrightarrow Y$ – ограниченные линейные отображения. Тогда из идеальности (регулярности) отображения $(x,y)\longmapsto xy$ следует идеальность (регулярность) отображения $(x_0,y_0)\longmapsto$ $\longmapsto u(x_0)v(y_0)$.

§2. Аменабельные модули и инвариантные средние

Пусть M – левый банахов $L_1(G)$-модуль. Обозначим через M_0 множество всех $x\in M$ таких, что $\inf\{\|\varphi\cdot x\|:\varphi\in P(G)\}=0$.

ЛЕММА 2.1. $M_0 = \mathrm{Cl}\{x-\varphi x:x\in M,\ \varphi\in P(G)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X=\{x-\varphi x:x\in M,\ \varphi\in P(G)\}$, и пусть $x_0\in M_0$. Для любого $\varepsilon>0$ существует такая функция $\psi\in P(G)$, что $\|\psi x_0\|<\varepsilon$. Следовательно, $\inf\{\|x_0-y\|:y\in X\} \le \|x_0-(x_0-$ $-\psi x_0)\|<\varepsilon$. Таким образом, $M_0\subset \mathrm{Cl}X$.

С другой стороны, пусть $x \in M$, $\varphi \in P(G)$. Для любого натурального n определим $\varphi_n =$ $=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\varphi^k$, где φ^k – свертка k сомножителей φ. Ясно, что $\varphi_n\in P(G)$ и $\|\varphi_n(x-\varphi x)\|\le 2n^{-1}\|x\|$. Тем самым $X\subset M_0$. Так как M_0 – замкнутое множество, то $\mathrm{Cl}X\subset M_0$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Следующие условия эквивалентны*:

а) M_0 *замкнуто относительно сложения (свойство Эмерсона)*;

б) $P(G)M_0 \subset M_0$;

в) $L_1(G)M_0 = (L_1(G)M)_0$;

г) *существует такая сеть* $\{\varphi_\alpha\}\subset P(G)$, *что* $\lim_\alpha\|\varphi_\alpha(\varphi x-x)\|=0$ *для всех* $x\in M$, $\varphi\in P(G)$;

д) *существует такая сеть* $\{\varphi_\beta\}\subset P(G)$, *что* $\text{w-}\lim_\beta\varphi_\beta(\varphi x-x)=0$ *для всех* $x\in M$, $\varphi\in P(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а)$\Longrightarrow$б). Пусть $\varphi\in P(G)$, $x\in M_0$. По лемме 2.1 $\varphi x-x\in M_0$. Следовательно, $\varphi x=(\varphi x-x)+x\in M_0$.

б)$\Longrightarrow$а). Пусть $x_1,x_2\in M_0$ и пусть $\varepsilon>0$. Тогда существуют такие $\varphi,\psi\in P(G)$, что $\|\varphi x_1\|<\varepsilon/2$, $\|\psi(\varphi x_2)\|<\varepsilon/2$. Поэтому $\|(\psi*\varphi)(x_1+x_2)\|<\varepsilon$ и $x_1+x_2\in M_0$.

б)$\Longrightarrow$в).

$$L_1(G)M_0 = (L_1(G)M)\cap(L_1(G)M_0) = L_1(G)(L_1(G)M\cap M_0) = (L_1(G)M)\cap M_0 = (L_1(G)M)_0.$$

в)$\Longrightarrow$б) очевидно.

б)$\Longrightarrow$г). Пусть $x_k\in M$, $\varphi_k\in P(G)$, $k=1,\dots,n$, и пусть $\varepsilon>0$. Выберем такие $\psi_k\in P(G)$, $k=1,$ $\dots,n$, что $\|(\psi_k*\dots*\psi_1)(x_k-\varphi_k x_k)\|<\varepsilon$. Пусть $\psi=\psi_n*\dots*\psi_1$. Тогда $\psi\in P(G)$ и $\|\psi(x_k-\varphi_k x_k)\|<\varepsilon$, $k=1,\dots,n$. Остальное очевидно.

г)$\Longrightarrow$а) в соответствии с леммой 2.1.

г)$\Longrightarrow$д) очевидно.

д)$\Longrightarrow$г). Пусть $M_{\varphi,x}=M$ для произвольных $\varphi\in P(G)$, $x\in M$. Тогда $\prod_{\varphi,x}M_{\varphi,x}$ является локально выпуклым пространством. Теперь определим линейный оператор $T:L_1(G)\longrightarrow\prod_{\varphi,x}M_{\varphi,x}$ равенством $(T\psi)_{\varphi,x}=\psi(\varphi x-x)$ и проведем рассуждения, как в [1] (сс. 48,49).

Левый банахов $L_1(G)$-модуль M назовем аменабельным, если он удовлетворяет эквивалентным условиям теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 2.2. *Локально-компактная группа G аменабельна в том и только том случае, когда каждый левый банахов $L_1(G)$-модуль аменабелен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с [2] (теорема 1.7) (или теоремой 2.4, см. ниже) из аменабельности модуля $L_\infty(G)$ следует аменабельность группы G.

С другой стороны, пусть G – аменабельная группа и пусть M – левый банахов $L_1(G)$-модуль. Выберем $\varphi_0\in P(G)$, $x\in M_0$, и покажем, что $\varphi_0 x\in M_0$.

Пусть $\varepsilon>0$. Выберем такое $\varphi\in P(G)$, что $\|\varphi x\| < \delta = \varepsilon/(2\|x\|+1)$. В соответствии с [1] (предложение 6.6) существует также такое $\psi\in P(G)$, что $\|\psi*\varphi_0-\psi\|_1<\delta$, $\|\psi*\varphi-\psi\|_1<\delta$. Тогда

$$\|\psi(\varphi_0 x)\| \leqslant \|\psi(\varphi_0 x-x)\|+\|\psi(x-\varphi x)\|+\|\psi(\varphi x)\| < \varepsilon;$$

отсюда следует утверждение.

Тот факт, что аменабельные группы могут быть характеризованы в терминах модуля $UCB_r(G)=L_1(G)*L_\infty(G)$, допускает следующее обобщение.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть M – левый банахов $L_1(G)$-модуль. Тогда M аменабелен в том и только том случае, когда аменабелен модуль $L_1(G)M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модуль M аменабелен. В соответствии с теоремой 2.1

$$L_1(G)(L_1(G)M)_0 = L_1(G)(L_1(G)M_0) = L_1(G)M_0 = (L_1(G)M)_0.$$

Следовательно, $L_1(G)M$ – аменабельный модуль. Обратно, пусть $x\in M$, $\varphi,\varphi_0\in P(G)$. Достаточно показать, что $\varphi(\varphi_0 x-x)\in M_0$.

Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем такую окрестность U единицы группы G, что

$$\|\varphi_0-\varphi_0*\varphi_U\|_1 < \varepsilon/(3\|x\|), \quad \|\varphi*\varphi_U-\varphi\|_1 < \varepsilon/(3\|x\|),$$

где φ_U – нормированная характеристическая функция подмножества U. Выберем такую функцию $\psi\in P(G)$, что $\|\psi(\varphi(\varphi_0(\varphi_U x)-\varphi_U x))\|<\varepsilon/3$. Тогда

$$\|\psi(\varphi(\varphi_0 x-x))\| \leqslant \|(\psi*\varphi*(\varphi_0-\varphi_0*\varphi_U))x\| + \|\psi(\varphi(\varphi_0(\varphi_U x)-\varphi_U x))\| + \|(\psi*(\varphi*\varphi_U-\varphi))x\| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\varphi(\varphi_0 x-x)\in M_0$.

Определение аменабельности для $L_1(G)$-модулей можно дать также в терминах топологически левоинвариантных средних.

Пусть M – левый банахов $L_1(G)$-модуль. Для произвольных $x\in M$, $F\in M^*$ определим функцию $x\circ F\in L_\infty(G)$ равенством $\langle\varphi,x\circ F\rangle=\langle\varphi^* x,F\rangle$, $\varphi\in L_1(G)$. Очевидно, $\|x\circ F\|\leqslant\|x\|\,\|F\|$. Пусть $\mathscr{L}_M(G)$ – замкнутое подпространство в $L_\infty(G)$, порожденное функциями $x\circ F$, $\overline{x\circ F}$ для всех $x\in M$, $F\in M^*$. Так как $\varphi*(x\circ F)=(\varphi x)\circ F$, $\varphi*(\overline{x\circ F})=(\overline{\varphi}x)\circ F$, то $\mathscr{L}_M(G)$ является замкнутым подмодулем в $L_\infty(G)$.

Пусть M – подмодуль в $L_\infty(G)$. Среднее $\Phi\in L_\infty(G)^*$ называется топологически левоинвариантным на M, если $\Phi(\varphi*f) = \Phi(f)$ для всех $\varphi\in P(G)$, $f\in M$. Замкнутый подмодуль M называется топологически левоинтровертным, если $\mathscr{L}_M(G)=M$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть M – левый банахов $L_1(G)$-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *M аменабелен;*

б) *$\mathscr{L}_M(G)$ аменабелен;*

в) *существует среднее, топологически левоинвариантное на $\mathscr{L}_M(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а)$\Longrightarrow$б). Пусть $f=x\circ F$, $\varphi\in P(G)$ и пусть сеть $\{\varphi_\alpha\}$ удовлетворяет условию г) теоремы 2.1. Так как $\varphi_\alpha*(\varphi*f-f)=\varphi_\alpha(\varphi x-x)\circ F$, то

$$\lim_\alpha\|\varphi_\alpha*(\varphi*f-f)\|_\infty \leq \|F\|\lim_\alpha\|\varphi_\alpha(\varphi x-x)\| = 0.$$

Остальное очевидно.

б) $\Longrightarrow$ а). Пусть сеть $\{\varphi_\beta\}$ удовлетворяет условию д) теоремы 2.1 для модуля $\mathscr{L}_M(G)$. Тогда

$$\lim_\beta\langle(\psi*\varphi_\beta)(\varphi x-x),F\rangle = \lim_\beta\langle\psi^*,\varphi_\beta(\varphi*(x\circ F)-x\circ F)\rangle = 0$$

для всех $\varphi\in P(G)$, $\psi\in L_1(G)$, $F\in M^*$, $x\in M$. В соответствии с теоремой 2.1 M – аменабельный модуль.

а)$\Longleftrightarrow$в). Стандартные рассуждения ([1], с.49) показывают, что условие в) эквивалентно существованию сети $\{\varphi_\gamma\}\subset P(G)$ такой, что $\lim_\gamma\langle\varphi*\varphi_\gamma-\varphi_\gamma,f\rangle=0$ для всех $f\in\mathscr{L}_M(G)$, $\varphi\in P(G)$. Теперь применим теорему 2.1, учитывая равенство $\langle\psi(\varphi^*x-x),F\rangle=\langle\varphi*\psi^*-\psi^*,x\circ F\rangle$, справедливое для всех $x\in M$, $F\in M^*$, $\varphi,\psi\in P(G)$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть M – левый банахов $L_1(G)$-модуль. Тогда в M имеется наибольший аменабельный подмодуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X, Y – аменабельные подмодули в M и $z_i=x_i+y_i-\varphi_i(x_i+y_i)$, где $x_i\in X$, $y_i\in Y$, $\varphi_i\in P(G)$, $i=1,2$. Выберем $\varepsilon>0$. Тогда существуют такие функции $\varphi,\psi\in P(G)$, что $\|\varphi(x_1+x_2-\varphi_1x_1-\varphi_2x_2)\|<\varepsilon/2$, $\|(\psi*\varphi)(y_1+y_2-\varphi_1y_1-\varphi_2y_2)\|<\varepsilon/2$. Имеем $\|(\psi*\varphi)(z_1+z_2)\|<\varepsilon$, следовательно, $z_1+z_2\in(\mathrm{Cl}(X+Y))_0$. По лемме 2.1 множество $(\mathrm{Cl}(X+Y))_0$ замкнуто относительно сложения. Остальное очевидно.

Наибольший аменабельный подмодуль в M обозначим через AM. Из теоремы 2.4 следует, что для любой локально-компактной группы G подмодуль $AL_\infty(G)$ топологически левоинтровертен, следовательно, существует среднее, топологически левоинвариантное на $AL_\infty(G)$.

Из каких функций состоит $AL_\infty(G)$, если группа G не аменабельна? Частичный ответ на этот вопрос дан в примерах 2.2–2.4 ниже.

ТЕОРЕМА 2.6. *Левый банахов $L_1(G)$-модуль M аменабелен в том и только том случае, когда для любого $T\in\mathrm{Hom}_{L_1(G)}(M,L_\infty(G))$ существует среднее, топологически левоинвариантное на $\mathrm{Im}T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что M аменабелен, и выберем $T\in\mathrm{Hom}_{L_1(G)}(M,L_\infty(G))$, $f_i\in\mathrm{Im}T$, $\varphi_i\in P(G)$, $i=1,2$, и $\varepsilon>0$. Пусть $f_i=Tx_i$ для некоторых $x_i\in M$, $i=1,2$. Тогда найдутся такие $\varphi,\psi\in P(G)$, что $\|\varphi(x_1-\varphi_1x_1)\|<\varepsilon/(2\|T\|)$, $\|(\psi*\varphi)(x_2-\varphi_2x_2)\|<\varepsilon/(2\|T\|)$. Имеем $\|\psi*\varphi*(f_1+f_2-\varphi_1*f_1-\varphi_2*f_2)\|<\varepsilon$, следовательно, $f_1+f_2-\varphi_1*f_1-\varphi_2*f_2\in(\mathrm{Cl}(\mathrm{Im}T))_0$. В соответствии с леммой 2.1 множество $(\mathrm{Cl}(\mathrm{Im}T))_0$ замкнуто относительно сложения, поэтому модуль $\mathrm{Cl}(\mathrm{Im}T)$ аменабелен. В соответствии с замечанием после доказательства теоремы 2.5 найдется среднее, топологически левоинвариантное на $\mathrm{Im}T$.

Докажем обратное утверждение. Пусть X – линейное подпространство в $L_\infty(G)$, порожденное множеством $\bigcup\{\mathrm{Im}T:T\in\mathrm{Hom}_{L_1(G)}(M,L_\infty(G))\}$. Рассуждая, как в [1] (с.230), убедимся в существовании среднего, топологически левоинвариантного на X. Так как отображение $x\longmapsto x\circ F$, $x\in M$, принадлежит $\mathrm{Hom}_{L_1(G)}(M,L_\infty(G))$ для любого $F\in M$, то отсюда следует аменабельность M.

Приведем примеры.

ПРИМЕР 2.1. Пусть модуль M таков, что $UCB(G)\subset\mathscr{L}_M(G)$. По теореме 2.4 M аменабелен в том и только том случае, когда группа G аменабельна. Примеры: $M=L_\infty(G)$, $UCB(G)$, $UCB_r(G)$, $UCB_l(G)$, $CB(G)$, $L_1(G)$ или произвольная алгебра Сегала [10].

ПРИМЕР 2.2. Пусть N – замкнутая нормальная подгруппа в G и пусть $\pi:G\to G/N$ – канонический гомоморфизм. Определим изометрический оператор $T_N:L_\infty(G/N)\to L_\infty(G)$ равенством $T_Nf(t)=f(\pi(t))$, $t\in G$. Его образ $\mathrm{Im}T_N$ состоит из всех функций $f\in L_\infty(G)$, постоянных на классах смежности tN. Выберем такие меры Хаара $\lambda_N,\lambda_{G/N}$, что

$$\int_G\varphi(t)d\lambda_G(t)=\int_{G/N}\dot\varphi(tN)d\lambda_{G/N}(tN),$$

где

$$\dot\varphi(tN)=\int_N\varphi(ts)d\lambda_N(s),\quad \varphi\in L_1(G)$$

([7], теорема 28.54). Тогда $T_N(\dot\varphi*f)=\varphi*T_Nf$ для всех $\varphi\in L_1(G)$, $f\in L_\infty(G/N)$. Следовательно, аменабельность подмодуля $\mathrm{Im}T_N\subset L_\infty(G)$ эквивалентна аменабельности $L_1(G/N)$-модуля $L_\infty(G/N)$, т.е. аменабельности G/N.

ПРИМЕР 2.3. Обозначим через $W(G)$ подмодуль в $L_\infty(G)$, состоящий из всех непрерывных ограниченных функций f таких, что множество $\{\varphi*f:\|\varphi\|_1\le1\}$ относительно компактно в слабой топологии. Элементы из $W(G)$ суть непрерывные слабо почти периодические функции ([11], теорема 4). Как известно, существует топологически левоинвариантное на $W(G)$ среднее ([12], следствие 1.26). Так как подмодуль $W(G)$ топологически левоинтровертен, то по теореме 2.4 он аменабелен.

ПРИМЕР 2.4. Пусть $V(G)$ – множество всех таких $f\in L_\infty(G)$, что $L_1(G)*f\subset W(G)$. Так как $\varphi*(f\circ\Phi)=(\varphi*f)\circ\Phi\in W(G)$ для всех $\varphi\in L_1(G)$, $f\in V(G)$, $\Phi\in L_1(G)^{**}$, то модуль $V(G)$ топологически левоинтровертен. Если Φ_0 – топологически левоинвариантное на $W(G)$ среднее и $\varphi_0\in P(G)$, то равенство $\Psi(f)=\Phi_0(\varphi_0*f)$, $f\in V(G)$, определяет, как показывают стандартные рассуждения ([1], сс. 35,36), среднее Ψ, топологически левоинвариантное на $V(G)$. Таким образом, модуль $V(G)$ аменабелен и любой модуль M, удовлетворяющий условию $\mathscr{L}_M(G)\subset V(G)$, также аменабелен.

§3. Аменабельные модули и регулярность

Применим теоремы 1.1 и 1.2 к билинейному отображению $L_1(G)\times M\to M$, $(\varphi,x)\longmapsto\varphi^*x$.

Левый банахов $L_1(G)$-модуль M назовем идеальным, если билинейное отображение $(\varphi,x)\longmapsto\varphi^*x$ идеально. Модуль M назовем регулярным, если отображение $(\varphi,x)\longmapsto\varphi^*x$ регулярно.

В этих определениях можно было бы использовать билинейное отображение $(\varphi,x)\longmapsto\varphi x$. Однако тогда пришлось бы выбирать другое обозначение для введенной в §2 операции $x\circ F$.

В соответствии с теоремой 1.1 каждое из следующих условий эквивалентно идеальности M:

а) отображение $\varphi\longmapsto\varphi x$ слабо компактно для всех $x\in M$;

б) отображение $F\longmapsto x\circ F$ слабо компактно для всех $x\in M$.

В соответствии с теоремой 1.2 каждое из следующих условий эквивалентно регулярности M:

а) отображение $x\longmapsto x\circ F$ слабо компактно для всех $F\in M^*$;

б) отображение $\varphi\longmapsto F\cdot\varphi$ слабо компактно для всех $F\in M^*$;
в) левый банахов $L_1(G)$-модуль M^* идеален.

ТЕОРЕМА 3.1. *Каждый идеальный модуль M аменабелен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\varphi\longmapsto x\circ(F\cdot\varphi)$ слабо компактно для всех $x\in M$, $F\in M^*$. Так как $x\circ(F\cdot\varphi)=(x\circ F)*\tilde{\varphi}$, то отображение $\varphi\longmapsto\varphi*(x\circ F)^{\sim}$ также слабо компактно для всех $x\in M$, $F\in M^*$. Следовательно, $(x\circ F)^{\sim}\in V(G)$ и $x\circ F\in V(G)$. Так как модуль $V(G)$ аменабелен (см. пример 2.4), то по теореме 2.4 аменабельным является и модуль M.

ТЕОРЕМА 3.2. *Каждый регулярный модуль M аменабелен одновременно с M^*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $x\longmapsto x\circ F$ слабо компактно для всех $F\in M^*$. Как и при доказательстве теоремы 3.1, отсюда следует, что $x\circ F\in V(G)$. Поэтому модуль M аменабелен.

Так как модуль M^* идеален, из теоремы 3.1 следует его аменабельность.

ПРИМЕР 3.1. Для любого p, $1<p<\infty$, банахово пространство $L_p(G)$ рефлексивно и, следовательно, регулярно как $L_1(G)$-модуль. Поэтому из равенства $C_0(G)=\mathscr{L}_{L_p}(G)$ вытекает, что модуль $C_0(G)$ аменабелен. Так как $L_1(G)\subset C_0(G)^*$ и $CB(G)\subset C_0(G)^{**}$, то каждый из модулей $C_0(G)^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$, аменабелен в том и только том случае, когда аменабельна группа G.

Обозначим через ι каноническое вложение $L_1(G)$ в C^*-алгебру $C^*(G)$. Произвольный левый банахов $C^*(G)$-модуль M будем рассматривать как $L_1(G)$-модуль, полагая $\varphi x=\iota(\varphi)x$, $x\in M$, $\varphi\in L_1(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть банахово пространство M является одновременно C^*-алгеброй и левым банаховым $C^*(G)$-модулем. Тогда $L_1(G)$-модули $M^{(n)}$, $n=0,1,\ldots$, аменабельны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M^{(2n)}$, $n=0,1,\ldots$, являются C^*-алгебрами ([13], теорема 7.1), то билинейные отображения $C^*(G)\times M^{(2n)}\longrightarrow M^{(2n)}$ регулярны ([14], с.701). Теперь применим теорему 3.2.

ПРИМЕР 3.2. Следующие алгебры удовлетворяют условию, указанному в следствии 3.1: алгебра непрерывных почти периодических функций на G, алгебра линейных ограниченных операторов в $L_2(G)$, алгебра $C^*(G)$.

Перейдем к рассмотрению модулей с регулярным $\mathscr{L}_M(G)$. Следующая лемма носит общий характер.

ЛЕММА 3.1. *Для произвольного левого банахова $L_1(G)$-модуля M имеем*

$$\mathscr{L}_{M^*}(G)\subset \mathrm{w}^*\text{-}\mathrm{Cl}(\mathscr{L}_M(G)^{\sim}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathscr{F}\in M^{**}$, $\{x_\alpha\}\subset M$ – такая ограниченная сеть, что $\mathscr{F}=\mathrm{w}^*\text{-}\lim\limits_\alpha\hat{x}_\alpha$. Для произвольных $\varphi\in L_1(G)$, $F\in M^*$ имеем

$$\langle\varphi,F\circ\mathscr{F}\rangle = \langle\varphi^*F,\mathscr{F}\rangle = \lim_\alpha\langle\varphi^*F,\hat{x}_\alpha\rangle = \lim_\alpha\langle x_\alpha,\varphi^*F\rangle =$$
$$= \lim_\alpha\langle\varphi x_\alpha,F\rangle = \lim_\alpha\langle\varphi^*,x_\alpha\circ F\rangle = \lim_\alpha\langle\varphi,(x_\alpha\circ F)^{\sim}\rangle.$$

Поэтому $F\circ\mathscr{F}\in\mathrm{w}^*\text{-}\mathrm{Cl}(\mathscr{L}_M(G)^{\sim})$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть модуль $\mathscr{L}_M(G)$ регулярен. Тогда модули $M^{(n)}$, $n=0,1,\ldots$, регулярны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\mathscr{L}_M(G)$ слабо* замкнуто в $L_\infty(G)$. Заметим, что вследствие равенства $\int_G\varphi f d\lambda_G=\varphi^* * f(e)$, $\varphi\in L_1(G)$, $f\in L_\infty(G)$, билинейное отображение $L_1(G)\times\times\mathscr{L}_M(G)\longrightarrow\mathbb{C}$, $(\varphi,f)\longmapsto\int_G\varphi f d\lambda_G$, регулярно ([8], теорема 2.3). Пусть $\Phi=\mathrm{w}^*\text{-}\lim\limits_\alpha\hat{\varphi}_\alpha$, где $\{\varphi_\alpha\}$ –

ограниченная сеть в $L_1(G)$, и пусть $f = \mathrm{w}^*\text{-}\lim\limits_{\beta} f_\beta$, где $\{f_\beta\}$ – ограниченная сеть в $\mathscr{L}_M(G)$. Тогда

$$\langle f,\Phi\rangle = \lim_{\alpha}\langle\varphi_\alpha,f\rangle = \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\langle\varphi_\alpha,f_\beta\rangle = \lim_{\beta}\lim_{\alpha}\langle\varphi_\alpha,f_\beta\rangle = \lim_{\beta}\langle f_\beta,\Phi\rangle,$$

следовательно, $f=\mathrm{w}\text{-}\lim\limits_{\beta} f_\beta\in\mathscr{L}_M(G)$.

Используя лемму 3.1, получим

$$\mathscr{L}_{M^{**}}(G) \subset \mathrm{w}^*\text{-}\mathrm{Cl}(\mathscr{L}_{M^*}(G)^{\sim}) \subset \mathrm{w}^*\text{-}\mathrm{Cl}(\mathscr{L}_M(G)) = \mathscr{L}_M(G).$$

Отсюда следует, что $\mathscr{L}_{M^{(2n)}}(G) = \mathscr{L}_M(G)$, $n=1,2,\dots$

Покажем, что модуль M^* регулярен. Пусть ограниченные сети $\{\varphi_\alpha\}\subset L_1(G)$, $\{F_\beta\}\subset M^*$ и элемент $\mathscr{F}\in M^{**}$ таковы, что пределы $\lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta}\langle\varphi_\alpha F_\beta,\mathscr{F}\rangle$, $\lim\limits_{\beta}\lim\limits_{\alpha}\langle\varphi_\alpha F_\beta,\mathscr{F}\rangle$ существуют. Так как $\mathscr{L}_M(G)=\mathscr{L}_{M^{**}}(G)$, то

$$\lim_{\alpha}\lim_{\beta}\langle\varphi_\alpha F_\beta,\mathscr{F}\rangle = \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\langle\varphi^*_\alpha\mathscr{F},\widehat{F}_\beta\rangle = \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\langle\varphi^*_\alpha,\mathscr{F}\circ\widehat{F}_\beta\rangle =$$

$$= \lim_{\beta}\lim_{\alpha}\langle\varphi^*_\alpha,\mathscr{F}\circ\widehat{F}_\beta\rangle = \lim_{\beta}\lim_{\alpha}\langle\varphi_\alpha F_\beta,\mathscr{F}\rangle.$$

Теперь применим теорему 1.2.

Аналогичные рассуждения доказывают регулярность модуля M. Остальное очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть левый банахов $L_1(G)$-модуль M таков, что модуль $\mathscr{L}_M(G)$ регулярен. Тогда модули $M^{(n)}$, $n=0,1,\dots$, аменабельны.*

Приведем пример аменабельного модуля с аменабельным сопряженным и неаменабельным вторым сопряженным. В дальнейшем через $\mathfrak{L}(B)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве B, через $\mathfrak{K}(B)$ – его подмножество, состоящее из компактных операторов.

ПРИМЕР 3.3. Пусть G – счетная дискретная группа, $p_n=1+n^{-1}$, $n=1,2,\dots$ Банахово пространство E состоит по определению из последовательностей $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n\in L_{p_n}(G)$, с нормой $\|\{g_n\}\|=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|g_n\|^2_{p_n}\right)^{1/2}$. Определим действие элемента $\varphi\in L_1(G)$ на E как левую покоординатную свертку с φ и будем рассматривать E как левый банахов $L_1(G)$-модуль. При этом оказывается, что $\|T_\varphi\|=\|\varphi\|_1$, где $T_\varphi\{g_n\}=\{\varphi*g_n\}$ ([15], теорема 4). В соответствии с [16] (теорема 3.1) $\mathfrak{L}(E)\subset\mathfrak{K}(E)^{**}$. Далее, из теоремы 3.4, доказанной ниже, вытекает, что билинейное отображение $L_1(G)\times\mathfrak{K}(E)\longrightarrow\mathfrak{K}(E)$, $(\varphi,K)\longmapsto T_\varphi K$, регулярно, поэтому $\mathfrak{K}(E)$ и $\mathfrak{K}(E)^*$ – аменабельные модули. Если группа G не аменабельна, то модуль $\mathfrak{K}(E)^{**}$ не является аменабельным; в противном случае модуль $L_1(G)$ также был бы аменабельным.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть банахово пространство B рефлексивно и обладает безусловным базисом. Тогда билинейное отображение $\mathfrak{L}(B)\times\mathfrak{K}(B)\longrightarrow\mathfrak{K}(B)$ регулярно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e_\iota\}_{\iota\in I}$ – безусловный базис в B. Для каждого конечного подмножества $D\subset I$ обозначим через P_D проектор из B на подпространство, порожденное элементами e_ι, $\iota\in D$. Пусть $X_D=\{P_DK:K\in\mathfrak{K}(B)\}$ и пусть $m_D:\mathfrak{L}(B)\times X_D\longrightarrow\mathfrak{K}(B)$ – билинейное отображение композиции. Заметим, что m_D регулярно. Действительно, выберем такие ограниченные сети $\{T_\alpha\}\subset\mathfrak{L}(B)$, $\{K_\beta\}\subset X_D$ и элемент $F\in\mathfrak{K}(B)^*$, что существуют повторные пределы

$$\lim_{\alpha} \lim_{\beta} \langle T_\alpha K_\beta, F\rangle, \quad \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle T_\alpha K_\beta, F\rangle.$$

Так как билинейное отображение $\mathfrak{K}(B)\times\mathfrak{K}(B)\longrightarrow\mathfrak{K}(B)$ регулярно ([15], теорема 3), то эти пределы равны. Теперь воспользуемся теоремой 1.2.

Пусть X – плотное в $\mathfrak{K}(B)$ подпространство, состоящее из конечномерных операторов с образами в линейной оболочке, порожденной $\{e_\iota\}_{\iota\in I}$. Заменяя в случае необходимости норму в B на эквивалентную, будем считать, что $\|P_D\|\leq 1$ при всех $D\subset I$ ([16], предложение 2.1). Тогда рассуждения из [17] (с.387) показывают, что билинейное отображение $\mathfrak{L}(B)\times X\longrightarrow\mathfrak{K}(B)$ регулярно. Остальное очевидно.

Предыдущий пример показывает, что из идеальности модуля M, вообще говоря, не следует аменабельность сопряженного модуля M^*. Действительно, рассмотрим модуль $M=\mathfrak{K}(E)^*$, где модуль E определен для неаменабельной дискретной группы G. Так как модуль $\mathfrak{K}(E)$ регулярен, то модуль $\mathfrak{K}(E)^*$ идеален. В то же время, модуль $\mathfrak{K}(E)^{**}$ не является аменабельным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pier J.-P. *Amenable locally compact groups.* – New York: Wiley, 1984. – 418 c.

2. Emerson W.R. *Characterizations of amenable groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – V.241. – P.183-194.

3. Young N.J. *The irregularity of multiplication in group algebras* // Quart. J. Math. – 1973. – V.24. – №93. – P.59-62.

4. Watanabe S. *A Banach algebra which is an ideal in the second dual space* // Sci. Rep. Niigata Univ., A. – 1974. – №11. – P.95-101.

5. Paterson A. *Invariant mean characterizations of amenable C^*-algebras* // Houston J. Math. – 1991. – V.17. – №4. – P.551-565.

6. Мясников А.Г. О некоторых свойствах банаховых $L_1(G)$-модулей // Функц. анализ и его прилож. – 1990. – Вып.4. – С.86-87.

7. Хьюитт Э., Росс К. *Абстрактный гармонический анализ.* Т.2. *Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах.* – М.: Мир, 1975. – 904 с.

8. Arens R. *The adjoint of a bilinear operation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1951. – V.2. – P.839-848.

9. Dunkan J., Hosseiniun S.A.R. *The second dual of a Banach algebra* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser.A. – 1979. – V.84. – №3-4. – P.309-325.

10. Reiter H. *L^1-algebras and Segal algebras* // Lect. Notes Math. – 1971. – № 231. – P.1-113.

11. Ülger A. *Continuity of weakly almost periodic functionals on $L^1(G)$* // Quart. J. Math. – 1986. – V.37. – №148. – P.495-497.

12. Burckel R.B. *Weakly almost periodic functionals on semigroups.* – New York: Gordon & Breach, 1970. – 118 c.

13. Civin P., Yood B. *The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra* // Pacif. J. Math. – 1961. – V.11. – №3. – P.847-870.

14. Ulger A. *Weakly compact bilinear forms and Arens regularity* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – V.101. – P.697-704.

15. Young N.J. *Periodicity of functionals and representations of normed algebras on reflexive spaces* // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1976. – V.20. – №2. – P.99-120.

16. Hennefeld J. *The Arens products and an imbedding theorem* // Pacif. J. Math. – 1969. – V.29. – №3. – P.551-563.

17. Arikan N. *Arens regularity and reflexivity* // Quart. J. Math. – 1981. – V.32. – №128. – P.383-388.

г.Москва

Поступила
24.06.1992