Т. Д. Джураев, Ж. О. Тахиров, Гиперболическая задача Стефана, *Дифференц. уравнения*, 1994, том 30, номер 5, 821–831

МАЙ 1994 г., ТОМ 30, № 5

УДК 517.95

Т. Д. ДЖУРАЕВ, Ж. О. ТАХИРОВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА

К началу 80-х годов появились работы, посвященные так называемой гиперболической модели теплопроводности (например, [1]). Данная модель возникает при математическом описании распространения тепла в среде, обладающей релаксационными свойствами (см. [2—5]). Пусть q — поток тепла, T — температура, τ — время релаксации, k — удельная теплопроводность, ρ — плотность, c — удельная теплоемкость. Гиперболическая модель переноса тепла получается путем замены классического закона теплопроводности Фурье

$$q=-kT_x \tag{1}$$

релаксационным соотношением первого порядка

$$\tau q_t+q=-kT_x. \tag{2}$$

Комбинируя (2) с законом сохранения энергии

$$c\rho T_t=-q_x, \tag{3}$$

получим гиперболическую модель теплопроводности

$$c\rho T_t+q_x=0,\ \tau q_t+q+kT_x=0. \tag{4}$$

Задачи, рассмотренные в работах [2—5], отличаются в основном условиями, заданными на свободной границе. Следовательно, по нашему мнению, сами модели (задачи) процессов фазового перехода требуют окончательного построения, детального математического обоснования и экспериментального подтверждения.

Настоящая работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена исследованию задач со свободной границей в формулировке работы [4], а во второй части рассмотрена задача, которая изучена в [5].

I. ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Постановка задачи. Требуется найти функции $T(x,t)$, $q(x,t)$, $s(t)$ такие, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена при $t\geqslant 0$, $s(0)=s_0>0$, $|\dot{s}(t)|<\sqrt{a_1a_2}$, а функции $T(x,t)$, $q(x,t)$ в области $D=\{(x,t):0<x<s(t), t>0\}$ удовлетворяют системе уравнений и условиям

$$T_t(x,t)+a_1q_x(x,t)+b_1T(x,t)+c_1q(x,t)=0, \tag{5}$$

$$q_t(x,t)+a_2T_x(x,t)+b_2T(x,t)+c_2q(x,t)=0, \tag{6}$$

$$T(x,0)=\Phi(x),\ q(x,0)=\Psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant s_0, \tag{7}$$

$$q(0,t)=f(t),\ t\geqslant 0, \tag{8}$$

$$\dot{s}(t)(1+T(s(t),t))=a_1q(s(t),t),\ t\geqslant 0, \tag{9}$$

$$\dot{s}(t)q(s(t),t)=a_2T(s(t),t),\ t\geqslant 0. \tag{10}$$

Поставленную задачу можно исследовать и в случае, когда (8) заменяется условием

$$T(0, t) = f(t), \quad t \geqslant 0. \tag{11}$$

Здесь коэффициенты a_i, b_i, c_i, $i=1,2,$— известные постоянные. В [4] была изучена задача (4), (7)—(11) при $c\rho=1$, $k=1$.

Наша цель — изучение поведения неизвестной границы в рассматриваемом промежутке времени, а также доказательство теоремы единственности и существования решения задачи. При этом используются идеи и результаты работы [4].

Следуя [4], введем новые функции

$$u(x, t) = T(x, t) + \sqrt{a_1/a_2}\,q(x, t), \quad v(x, t) = T(x, t) - \sqrt{a_1/a_2}\,q(x, t). \tag{12}$$

Тогда задача (5)—(10) примет вид

$$\begin{cases} u_t + \sqrt{a_1 a_2}\,u_x + b_3 u - c_3 v = 0, & (13) \\ v_t - \sqrt{a_1 a_2}\,v_x - b_4 u + c_4 v = 0, & (14) \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0, \tag{15}$$

$$v(x, 0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0, \tag{16}$$

$$u(0, t) = v(0, t) + 2\sqrt{a_1/a_2}\,f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{17}$$

$$v(s(t), t) = -u(s(t), t)/(1 + 2u(s(t), t)), \quad t \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\dot{s}(t) = \sqrt{a_1 a_2}\,u(s(t), t)/(1 + u(s(t), t)), \quad t \geqslant 0. \tag{19}$$

Здесь

$$b_{i+2} = 2^{-1}[c_2 + b_2\sqrt{a_1/a_2} + (-1)^{i+1}(b_1 + c_1\sqrt{a_2/a_1})], \tag{20}$$

$$c_{i+2} = 2^{-1}[c_2 - b_2\sqrt{a_1/a_2} + (-1)^{i}(b_1 - c_1\sqrt{a_2/a_1})], \quad i=1,2, \tag{21}$$

$$\varphi_1(x) = \Phi(x) + \sqrt{a_1/a_2}\,\Psi(x),$$

$$\varphi_2(x) = \Phi(x) - \sqrt{a_1/a_2}\,\Psi(x).$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

A) функции $f(t)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ непрерывно дифференцируемы и $f(t) \geqslant \varepsilon > 0$, $\Phi(x) > -\sqrt{a_1/a_2}\,\Psi(x)$, $\Phi(x) > \sqrt{a_1/a_2}\,\Psi(x) - 1/4$;

B) условия согласования

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) + 2\sqrt{a_1/a_2}\,f(0),$$

$$\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) = -\frac{1}{a_2}\left[f'(0) + \frac{b_2}{2}(\varphi_1(0) + \varphi_2(0)) + c_2 f(0)\right],$$

$$\dot{s}(0) = s_1 = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,\frac{\varphi_1(s_0)}{1 + \varphi_1(s_0)}, \quad \varphi_2(s_0) = -\frac{\varphi_1(s_0)}{1 + 2\varphi_1(s_0)},$$

$$\varphi_2'(s_0) = F(\varphi_1(s_0), \varphi_1'(s_0));$$

C) $b_i \geqslant 0$, $c_1 \geqslant 0$, $c_2 > 0$, $i=1,2$, $a_1 a_2 > 0$.

2. Некоторые оценки для решения задачи. Область D разделим на четыре части D_i, $i=\overline{1,4}$ с помощью характеристик $x - \alpha t = 0$, $x + \alpha t = s_0$, $\alpha = \sqrt{a_1 a_2}$ системы (13), (14), выходящих соответственно из точек $(0, 0)$ и $(s_0, 0)$ (относительно обозначений D_i, $i=\overline{1,4}$).

В области $D_1 \cup D_2$, выполняя интегрирования вдоль характеристики $x + \alpha t = \mathrm{const}$, из (14) находим

$$v(x, t) = v(x + \alpha t, 0)\exp(-c_4 t) + \int_0^t b_4 u(x + \alpha(t - \eta), \eta) \times$$
$$\times \exp[-c_4(t - \eta)]\,d\eta, \tag{22}$$

а в области $D_3 \cup D_4$

$$v(x,t)=v(s(\eta_0),\eta_0)\exp[-c_4(t-\eta_0(x,t))]+$$
$$+\int_{\eta_0(x,t)}^{t} b_4u(x+\alpha(t-\eta),\eta)\exp[-c_4(t-\eta)]\,d\eta, \qquad (23)$$

где $\eta=\eta_0(x,t)$ — ордината точки пересечения характеристики $\xi+\alpha\eta=x+\alpha t$ с кривой $\xi=s(\eta)$. Точно так же в области $D_1\cup D_3$ из (13) находим

$$u(x,t)=u(x-\alpha t,0)\exp(-b_3t)+$$
$$+\int_0^t c_3v(x-\alpha(t-\eta),\eta)\exp[-b_3(t-\eta)]\,d\eta, \qquad (24)$$

а в области $D_2\cup D_4$ имеем

$$u(x,t)=u(0,t-x/\alpha)\exp(-b_3/\alpha)+$$
$$+\int_{t-x/\alpha}^{t} c_3v(x-\alpha(t-\eta),\eta)\exp[-b_3(t-\eta)]\,d\eta. \qquad (25)$$

Лемма 1. *Пусть функции u, v, s являются решением задачи (13)—(19) и выполнены условия A)—C) и неравенства $c_2\geqslant c_1\sqrt{a_2/a_1}\geqslant b_1\geqslant b_2\sqrt{a_1/a_2}\geqslant 0$, если $c_1=0$, то $c_2\geqslant 2b_1\geqslant 2b_2\sqrt{a_1/a_2}\geqslant 0$. Тогда справедливы неравенства $u(x,t)>-1/2$, $v(x,t)>-1/2$, $0\leqslant x<s(t)$, $t\geqslant 0$.*

Доказательство. При выполнении условий A) имеет место $\varphi_1(x)>-1/2$, $\varphi_2(x)>-1/2$, $0\leqslant x\leqslant s_0$.

Пусть для некоторого малого t_0 выполнены неравенства

$$u(x,t)>-1/2,\ v(x,t)>-1/2,\ 0\leqslant x\leqslant s(t),\ 0\leqslant t<t_0,$$

и при $t=t_0$

$$u(x_0,t_0)=-1/2 \text{ или } v(x_0,t_0)=-1/2,\ 0\leqslant x\leqslant s(t_0). \qquad (26)$$

Проверим $u(0,t_0)=v(0,t_0)+2\sqrt{a_1/a_2}f(t_0)\geqslant -1/2+2\sqrt{a_1/a_2}f(t_0)>-1/2$. Следовательно, $x_0>0$.

С другой стороны, для малого $\varepsilon>0$ в $D_1\cup D_3$ из (24) находим

$$u(x_0,t_0)=u(x_0-\alpha\varepsilon,t_0-\varepsilon)\exp(-b_3\varepsilon)+\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} c_3v(x_0-\alpha(t_0-\eta),\eta)\times$$
$$\times\exp[b_3(t_0-\eta)]\,d\eta>-\frac{1}{2}\Big\{\exp(-b_3\varepsilon)+c_3\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}\exp[-b_3(t_0-$$
$$-\eta),\eta]\,d\eta\Big\}=-\frac{1}{2}\left[\exp(-b_3\varepsilon)+\frac{c_3}{b_3}-\frac{c_3}{b_3}\exp(-b_3\varepsilon)\right]. \qquad (27)$$

Так как $0\leqslant(c_3/b_3)(1-\exp(-b_3\varepsilon))\leqslant(1-\exp(-b_3\varepsilon))$, $c_3/b_3\leqslant 1$, то из (27) заключаем, что $u(x_0,t_0)>-1/2$. Это противоречит предположению (26).

Если выполняется второе равенство в (26), то из (19) имеем

$$v(s(t_0),t_0)=-u(s(t_0),t_0)/(1+2u(s(t_0),t_0))>-1/2. \qquad (28)$$

Следовательно, $x_0<s(t_0)$. Далее из (22) находим

$$v(x_0,t_0)=v(x_0+\alpha\varepsilon,t_0-\varepsilon)\exp(-c_4\varepsilon)+\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} b_4u(x_0+\alpha(t_0-\eta),\eta)\times$$

$$\times \exp[-c_4(t_0-\eta)]\,d\eta > -\frac{1}{2}\Big[\exp(-c_4\varepsilon)+\frac{b_4}{c_4}-$$

$$-\frac{b_4}{c_4}\exp(-c_4\varepsilon)\Big] > -\frac{1}{2}.$$

Это противоречит предположению. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения леммы 1 и* $s(t)\leqslant M$, $0\leqslant t\leqslant t_1$. *Тогда существует постоянная* $m>0$ *такая, что*

$$u(s(t),t)\geqslant -1/2+m,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{29}$$

m *зависит от коэффициентов системы,* ε, M *и* t_1.

Лемма доказывается аналогично лемме 1. При этом используются формулы (25) и (26) при $x=s(t)$, $t=t$.

Лемма 3. *Пусть предположения леммы 1 выполняются и* $u(s(t),t)\geqslant -1/2+m$, $0\leqslant t\leqslant t_1$ *для некоторого* $t_1>0$ *и* $m>0$. *Тогда в области* $\{(x,t): 0\leqslant x\leqslant s(t),\ 0\leqslant t\leqslant t_1\}$ *выполняются неравенства*

$$|u(x,t)|\leqslant N,\quad |v(x,t)|\leqslant N,$$

где N *зависит от* t_1.

Доказательство. Пусть $I(t)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant s(t)}|v(x,t)|$, $J(t)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant s(t)}|u(x,t)|$, $K(t)=\max\{I(t), J(t)\}$. Очевидно, что $|u(x,0)|\leqslant M_1$, $|v(x,0)|\leqslant M_1$.

Сначала оценим $I(t)$. Пусть $x=x^*(t)$ такая, что $I(t)=v(x^*,t)$. Если $(x^*,t)\in D_1\cup D_2$, то из (22) находим

$$I(t)\leqslant M_1+b_4\int_0^t K(\eta)\,d\eta. \tag{30}$$

Если $(x^*,t)\in D_3\cup D_4$, то из (23) получим

$$I(t)\leqslant |v(s(\eta_0),\eta_0)|+b_4\int_{\eta_0}^t K(\eta)\,d\eta. \tag{31}$$

С учетом (29) из (18) получим

$$v(s(\eta_0),\eta_0)=-\frac{u(s(\eta_0),\eta_0)}{1+2u(s(\eta_0),\eta_0)}\leqslant\frac{1/2-m}{2m}\leqslant\frac{1}{4m}.$$

Тогда $|v(s(\eta_0),\eta_0)|\leqslant m_1$, где $m_1=\max\{1/4m, 1/2\}$. Далее (31) примет вид

$$I(t)\leqslant m_1+b_4\int_{\eta_0}^t K(\eta)\,d\eta. \tag{32}$$

Из (30) и (32) можно получить оценку

$$I(t)\leqslant (m_1+M_1)+b_4\int_0^t K(\eta)\,d\eta. \tag{33}$$

Аналогично оцениваем $J(t)=|u(x_0,t)|$. Если $(x_0,t)\in D_1\cup D_3$, то из (24) имеем

$$J(t)\leqslant M_1+c_3\int_0^t K(\eta)\,d\eta. \tag{34}$$

Если $(x_0,t)\in D_2\cup D_4$, то из (25) получим

$$u(x,t)=v\Big(0,t-\frac{x}{\alpha}\Big)\exp\Big(-\frac{b_3}{\alpha}x\Big)+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}f(t)\exp\Big(-\frac{b_3}{\alpha}x\Big)+$$

$$+\int_{t-x/\alpha}^{t} c_3 v(\cdot)\exp[-b_3(t-\eta)]\,d\eta. \tag{35}$$

Отсюда

$$J(t)\leqslant I\left(t-\frac{x_0}{\alpha}\right)\exp\left(-\frac{b_3}{\alpha}x_0\right)+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}f(t)+c_3\int_{t-x_0/\alpha}^{t}K(\eta)\,d\eta.$$

Используя (33), находим

$$J(t)\leqslant(m_1+M_1)+b_4\int_0^t K(\eta)\,d\eta+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}f(t)+c_3\int_{t-x_0/\alpha}^{t}K(\eta)\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant(m_1+M_1)+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}f(t)+(b_4+c_3)\int_0^t K(\eta)\,d\eta. \tag{36}$$

Из (34) и (36) заключаем, что

$$J(t)\leqslant m_1+M_1+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}f(t)+(b_4+c_3)\int_0^t K(\eta)\,d\eta. \tag{37}$$

Комбинируя (33) и (37), имеем

$$K(t)\leqslant f_1(t)+\bar{c}\int_0^t K(\eta)\,d\eta, \tag{38}$$

где $f_1(t)=m_1+M_1+2\sqrt{a_1/a_2}f(t)>0$, $\bar{c}=b_4+c_3>0$. Из (38) в силу неравенства типа Гронуолла [5] получим

$$K(t)\leqslant f_1(t)+\bar{c}\int_0^t f_1(\eta)\exp\left(\int_\eta^t \bar{c}\,ds\right)d\eta. \tag{39}$$

Отсюда получим утверждение леммы.

Следствие 1. В силу доказанных лемм имеем

$$|\dot{s}(t)|\leqslant\alpha(1-\delta), \tag{40}$$

где

$$\delta=\min\{1/(1+N),\ 4m/(1+2m)\}. \tag{41}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения леммы 1. Тогда для произвольного* $t_1>0$ *существует такая постоянная* $M_2>0$, *что* $0<s(t)\leqslant M_2$, $0\leqslant t\leqslant t_1$.

Доказательство. Интегрируя (5) по x в пределах от 0 до $s(t)$, получим

$$\int_0^{s(t)} T_t(\xi,t)\,d\xi+a_1q(s(t),t)-a_1q(0,t)+\int_0^{s(t)}(b_1T+c_1q)\,d\xi=0. \tag{42}$$

Используя (9), перепишем (42) в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{s(t)}T(x,t)\,dx+s(t)\right]=a_1f(t)-\int_0^{s(t)}(b_1T+c_1q)\,dx.$$

Интегрированием по t находим

$$s(t)=\int_0^t a_1 f(\eta)\,d\eta+s_0+\int_0^{s_0}\Phi(\xi)\,d\xi-\int_0^{s(t)}T(x,t)\,dx-$$
$$-\int_0^t d\eta\int_0^{s(\eta)}(b_1T+c_1q)\,d\xi. \tag{43}$$

Так как $T=(u+v)/2\leqslant N$, $q=2^{-1}\sqrt{a_2/a_1}(u-v)<2^{-1}\sqrt{a_2/a_1}(N+1/2)$, то из (43) находим

$$s(t)\geqslant F_1(t)-Ns(t)-N_1\int_0^t s(\eta)\,d\eta. \tag{44}$$

Или

$$s(t)\geqslant N_2-N_3\int_0^t s(\eta)\,d\eta, \tag{45}$$

где $N_2=\min\limits_t\{F_1(t)/(1+N)\}$, N_3 ясно.

Обозначим $-s(t)=h(t)$. Тогда (45) можно переписать в виде

$$h(t)\leqslant -N_2-N_3\int_0^t h(\eta)\,d\eta. \tag{46}$$

Отсюда получим [6] $h(t)\leqslant -N_2\exp(-N_3t)$. Тогда $s(t)\geqslant N_2\times \times\exp(-N_3t)>0$, $t\geqslant 0$.

Верхнюю оценку для $s(t)$ можно получить из (40): $s(t)\leqslant\alpha(1-\delta)t$. Лемма доказана.

Теперь можно доказать, что характеристики системы (13), (14) пересекают неизвестную границу $x=s(t)$ в одной точке. Действительно, пусть $\eta=\eta_0(x,t)$ есть решение уравнения $x+\alpha t=s(\eta_0)+\alpha\eta_0$. Докажем однозначную разрешимость этого уравнения. Рассмотрим функцию

$$R(\eta)=s(\eta)+\alpha(\eta)-x-\alpha t,\ 0\leqslant\eta\leqslant t.$$

Проверим свойства непрерывных функций: $R(0)=s_0-x-\alpha t<0$, так как $x+\alpha t>s_0$; $R(t)=s(t)+\alpha t-x-\alpha t=s(t)-x>0$; $R'(\eta)=\dot s(\eta)+\alpha>0$.

Лемма 5. *Пусть функции u, v, s являются решением задачи (13)—(19) и $s(t)\geqslant c\geqslant 0$, $|\dot s(t)|\leqslant\alpha(1-\delta)$, $|u(x,t)|\leqslant N$, $|v(x,t)|\leqslant N$, $|\varphi_{1x}(x)|\leqslant N_0$, $|\varphi_{2x}(x)|\leqslant N_0$, $0\leqslant t\leqslant t_1$. Тогда $|u_x|$, $|v_x|$, $|u_t|$, $|v_t|\leqslant \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — постоянная, зависящая от N, N_0, t_1 и коэффициентов уравнений.*

Доказательство проводится по методике работы [4].

Точно так же можно получить оценку для вторых производных решения. Тогда естественно потребуется более высокая гладкость от данных задачи.

3. Единственность решения. При доказательстве единственности решения используем результаты доказанных лемм и, следовательно, предполагаем выполненными все условия этих лемм.

Теорема 1. *Для любого $t_1>0$ при $0\leqslant t\leqslant t_1$ решение u, v, $s\in C'$ задачи (13)—(19) единственно.*

Доказательство. Предположим существование двух решений (u_1, v_1, s_1) и (u_2, v_2, s_2), и пусть эти функции ограничены по модулю константой M. В силу полученных результатов имеем

$$u_1(s_1(t),t),\ u_2(s_2(t),t)\geqslant -1/2+m,$$
$$|\dot s_1(t)|,\ |\dot s_2(t)|\leqslant\alpha(1-\delta),\ 0\leqslant t\leqslant t_1.$$

Пусть $s_0(t)=\min\{s_1(t), s_2(t)\}$, $l(t)=|\dot s_1(t)-\dot s_2(t)|$,

$$J(t)=\max_{0\leqslant x\leqslant s_0(t)}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|,$$

$$K(t)=\max_{0\leqslant x\leqslant s_0(t)}|v_1(x,t)-v_2(x,t)|.$$

Положим $D_3^0=D_3^1\cap D_3^2$, где D_3^i определяются из D_3 с учетом $s_i(t)$. Выбираем x^* так, что

$$J(t)=|u_1(x^*,t)+u_2(x^*,t)|,\quad 0\leqslant x^*\leqslant s_0(t).$$

Если $(x^*,t)\in D_1\cup D_3^0$, то из (24) находим

$$J(t)\leqslant\int_0^t c_3|v_1-v_2|\,d\eta\leqslant c_3\int_0^t K(\eta)\,d\eta. \tag{47}$$

Если $(x^*,t)\in D_2$, то из (25) получим

$$J(t)\leqslant\left|u_1\left(0,t-\frac{x^*}{\alpha}\right)-u_2\left(0,t-\frac{x^*}{\alpha}\right)\right|+c_3\int_0^t K(\eta)\,d\eta. \tag{48}$$

С учетом (17) и (22) находим

$$|u_1(0,t-x^*/\alpha)-u_2(0,t-x^*/\alpha)|=|v_1(0,t-x^*/\alpha)-v_2(0,t-x^*/\alpha)|\leqslant$$

$$\leqslant b_4\int_0^t J(\eta)\,d\eta.$$

Тогда (48) примет вид

$$J(t)\leqslant c_5\int_0^t(J(\eta)+K(\eta))\,d\eta,\quad c_5=\max(c_3,b_4). \tag{49}$$

Из (47) и (49) заключаем, что (49) выполняется в $D_1\cup D_2\cup D_3^0$. Справедливо неравенство

$$|s_1(t)-s_2(t)|\leqslant\int_0^t|\dot s_1(\eta)-\dot s_2(\eta)|\,d\eta.$$

Отсюда

$$\max_{0\leqslant t'\leqslant t}|s_1(t')-s_2(t')|\leqslant\int_0^t I(\eta)\,d\eta. \tag{50}$$

Пусть (x_0,t) такая, что $K(t)=|v_1(x_0,t)-v_2(x_0,t)|$, $0\leqslant x_0\leqslant s_0(t)$. Если $(x_0,t)\in D_1\cup D_2$, то, учитывая (22), получим

$$K(t)\leqslant b_4\int_0^t I(\eta)\,d\eta. \tag{51}$$

Пусть $\eta=\eta_1(x,t)$ и $\eta=\eta_2(x,t)$ — решения уравнений $x+\alpha t=s_i(\eta_i)+\alpha\eta_i$, $i=1,2$. Если $(x_0,t)\in D_3^0$, то для определенности предполагаем, что $\eta_1(x_0,t)\geqslant\eta_2(x_0,t)$. После несложных вычислений находим

$$0\leqslant\eta_1-\eta_2\leqslant\frac{1}{\alpha\delta}\int_0^t I(\eta)\,d\eta. \tag{52}$$

Из (23) находим

$$K(t)\leqslant|\exp[-c_4(t-\eta_1)u_1(s_1(\eta_1),\eta_1)-\exp[-c_4(t-\eta_2)]v_2(s_2(\eta_2),\eta_2)|+$$

$$+b_4\left|\int_{\eta_1}^t\exp[-c_4(t-\eta)]u_1(\cdot)\,d\eta-\int_{\eta_2}^t\exp[-c_4(t-\eta)]u_2(\cdot)\,d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant \exp[-c_4(t-\eta_1)]\,|v_1(s_1(\eta_1),\eta_1)-v_2(s_2(\eta_2),\eta_2)|+$$
$$+\exp[-c_4(t-\eta_1)]\,\{1-\exp[-c_4(\eta_1-\eta_2)]\}|v_2(s_2(\eta_2),\eta_2)|+$$
$$+b_4\int_{\eta_2}^{\eta_1}\exp[-c_4(t-\eta)]\,|u_2|\,d\eta+b_4\int_{\eta_1}^{t}\exp[-c_4(t-\eta)]\,|u_1-u_2|\,d\eta.$$

Отсюда имеем

$$K(t)\leqslant \frac{(b_4+c_4)M}{\alpha\delta}\int_0^t I(\eta)\,d\eta+b_4\int_0^t J(\eta)\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\,|u_2(s_2(\eta_2),\eta_2)-u_1(s_1(\eta_1),\eta_1)|. \qquad (53)$$

Чтобы оценить последний член в (53), установим некоторые дополнительные неравенства, как и в [4].

В итоге для некоторого положительного постоянного A_1 получим

$$K(t)\leqslant A_1\int_0^t [I(\eta)+K(\eta)+J(\eta)]\,d\eta. \qquad (54)$$

Из (19) находим

$$I(t)=|\dot{s}_1(t)-\dot{s}_2(t)|=\alpha\left|\frac{u_1(s_1(t),t)-u_2(s_2(t),t)}{(1-u_1(s_1(t),t))\,(1+u_2(s_2(t),t))}\right|\leqslant$$
$$\leqslant A_2\int_0^t [I(\eta)+K(\eta)]\,d\eta. \qquad (55)$$

Комбинируя (49), (54), (55), заключаем, что

$$I(t)+J(t)+K(t)\leqslant A\int_0^t [I(\eta)+J(\eta)+K(\eta)]\,d\eta. \qquad (56)$$

В силу неравенства типа Беллмана — Гронуолла [6] из (56) заключаем, что $I(t)=J(t)=K(t)=0$, $0\leqslant t\leqslant t_1$. Теорема доказана.

4. Существование решения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A)—C) и* $|\dot{s}(t)|\leqslant\leqslant\alpha(1-\delta)$. *Тогда существует решение* $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(t)$ *задачи (13)—(19).*

Доказательство. Для некоторого ограниченного $t_1\in(0,\infty)$ должны построить решение в промежутке $0\leqslant t\leqslant t_1$. Из (19) получаем интегральное уравнение для определения $s(t)$:

$$s(t)=s_0+\alpha\int_0^t \frac{u(s(\eta),\eta)}{1+u(s(\eta),\eta)}\,d\eta. \qquad (57)$$

Задачу (13)—(19) свели к системе нелинейных интегральных уравнений (22)—(25), (57). Разрешимость этой системы доказывается по следующей схеме. Введем множество $U=\{s(t)\in C^1[0,t],\ |\dot{s}(t)|\leqslant\leqslant\alpha(1-\delta)\}$. Так как каждая $s(t)\in U$ непрерывно дифференцируема, то в силу теории гиперболических систем уравнений первого порядка существует решение $u(x,t;s(t))$, $v(x,t;s(t))$ задачи (13)—(18).

Решение уравнения (57) будем искать методом Шаудера. Определим отображение $h=Bs$:

$$h(t)=s_0+\alpha\int_0^t \frac{u(s(\eta),\eta)}{1+u(s(\eta),\eta)}\,d\eta.$$

Множество U выпукло и равностепенно непрерывно. Первое утверждение очевидно, а второе вытекает из равномерной ограниченности $\dot{s}(t)$ при $s(t)\in U$ в силу теории Ариеля. Из полученных результатов следует, что оператор B непрерывен на U и отображает замкнутое выпуклое множество U в себя. А компактность множества $B(U)$ вытекает из леммы 5. Далее применение известной теоремы Шаудера о неподвижной точке завершит доказательство теоремы 2.

II. ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящая работа развивает результаты [5], в которой исследована задача Стефана для уравнения

$$\beta^2 u_{xx}-u_{tt}-\alpha u_t=0, \tag{58}$$

α, β — постоянные в области $\Omega=\{(x,t): -\infty<x<s(t), t>0\}$. Физическая интерпретация задачи имеет смысл только в следующих случаях [5]:

А) неизвестная граница $s(t)$ лежит между характеристиками $x+\beta t=0$ и $x-\beta t=0$ волнового уравнения;

В) она лежит между характеристикой $x+\beta t=0$, $x\leqslant 0$ и осью OX.

Задача. Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$ такую, что $s(0)=0$, $-1<\dot{s}(t)<1$ в случае А), $-N<\dot{s}(t)<-1$, $N>0$ в случае В) и решение $u(x,t)$ уравнения

$$Lu\equiv u_{xx}-u_{tt}+a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{59}$$

А) удовлетворяющее начальным

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad -\infty<x\leqslant 0, \tag{60}$$

$$u_t(x,0)=\varphi_2(x),\quad -\infty<x\leqslant 0 \tag{61}$$

и граничному

$$u(s(t),t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{62}$$

условиям, а также условию для неизвестной границы

$$\dot{s}(t)=\Phi(t)-\int_0^t m(s(\eta),\eta)(\dot{s}^2(\eta)-1)u_x(s(\eta),\eta)\exp[-\alpha(t-\eta)]d\eta, \tag{63}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\Phi(t)$, $m(x,t)$ — заданные функции, α — положительная постоянная, причем $\varphi_1(0)=0$.

В случае В) задаются условия (60), (62), (63).

Результаты раздела были кратко изложены в заметке [7].

Случай А). Сначала докажем оценку $|\dot{s}(t)|<1$, $t\geqslant 0$, которая необходима и для корректности задачи (59)—(63).

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(t)=\lambda\exp(-\lambda t)+1$, $-2<\lambda<0$. *Тогда* $|\dot{s}(t)|<1$, $t\geqslant 0$.

Доказательство. Перепишем (63) в виде

$$\exp(\alpha t)\dot{s}(t)=\lambda+\exp(\alpha t)-\int_0^t m(s(\eta),\eta)[\dot{s}^2(\eta)-1]\nu(\eta)\exp(\alpha\eta)d\eta. \tag{64}$$

Дифференцируя (64), получим

$$\ddot{s}(t)=-m(s(t),t)\nu(t)\dot{s}^2(t)-\alpha\dot{s}(t)+\alpha+m(s(t),t)\nu(t). \tag{65}$$

Уравнение (65) есть общее уравнение Риккати вида

$$\dot{y}(t)=f(t)y^2(t)+g(t)y(t)+h(t),\quad t>0. \tag{66}$$

Если для (66) выполнено условие

$$f(t)+g(t)+h(t)=0, \tag{67}$$

то уравнение (66) имеет решение [8]

$$y(t)=\left[c_1+\int_0^t (f(\eta)+h(\eta))E(\eta)d\eta-E(t)\right]/\left[c_1+\int_0^t (f(\eta)+h(\eta))E(\eta)d\eta+E(t)\right],$$

$E(t)=\exp\left\{\int_0^t [f(\eta)-h(\eta)]d\eta\right\}$, c_1 — некоторая постоянная.

В нашем случае $y(t)=\dot{s}(t)$, $f(t)=-m(s(t),t)\nu(t)$, $g(t)=-\alpha$, $h(t)=m(s(t),t)\nu(t)+\alpha$, следовательно, условие (67) выполнено. Тогда находим

$$\dot{s}(t)=\left[c_1+\alpha\int_0^t E(\eta)d\eta-E(t)\right]/\left[c_1+\alpha\int_0^t E(\eta)d\eta+E(t)\right], \tag{68}$$

$$E(t)=\exp\left\{-\int_0^t [\alpha+2m(s(\eta),\eta)\nu(\eta)]d\eta\right\}.$$

Неизвестную постоянную c_1 определяем из условия $\dot{s}(0)=1+\lambda$ или $\dot{s}(0)=(c_1-1)/(c_1+1)=1+\lambda$. Отсюда $c_1=-(2+\lambda)/\lambda>0$. Тогда из (68) получаем утверждение теоремы.

Существование и единственность решения. Предполагаем, что коэффициенты $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$ являются функциями класса C^1, а коэффициент $c(x,t)$ класса C^0. Этими условиями функция Римана $R(x,t;1,\eta)$ определяется однозначно. В области $\{(x,t):-\infty<x<-t,\ t>0\}$ решение $u(x,t)$ задачи (59)—(61) сразу находим (задача Коши).

Мы должны найти $u(x,t)$ в области $\Omega_0=\{(x,t):-t<x<s(t),\ t>0\}$ и неизвестную границу $s(t)$. Берем произвольную точку $P(x,t)\in\in\Omega_0$ и проводим характеристики $x+t=\xi+\eta$, $x-t=\xi-\eta$. Точку пересечения $x-t=\xi-\eta$ с прямой $\eta=0$ обозначим через $B(x-t,0)$, а $x+t=\xi+\eta$ с кривой $\xi=s(\eta)$ обозначим буквой $D(s(\eta_0(x+t)),\eta_0)$. Начало координат обозначим буквой A.

Имеет место

$$\int_\Gamma (Hd\eta-Kd\xi)=\iint_{ABPD} R(x,t;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{69}$$

где $H=(Ru)_\xi-(2R_\xi-aR)u$, $K=-(Ru)_\eta+(2R_\eta+bR)u$. Из (69), учитывая свойства функции Римана и граничные условия, получим

$$\begin{aligned} u(x,t)= & \frac{1}{2}R(x,t;x-t,0)\varphi_1(x-t)-\int_{x-t}^{0}[R(\cdot)\varphi_2(\xi)+\\ & +(R_\eta+bR)\varphi_1(\xi)]d\xi+\int_0^{\eta_0(x+t)} R(\cdot)\,[u_\xi(s(\eta),\eta)+\\ & +u_\eta(s(\eta),\eta)\dot{s}(\eta)]d\eta-\iint_{ABPD} R(x,t;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta,\quad t>-x. \end{aligned} \tag{70}$$

Известные члены в (70) обозначим через $f_1(x,t)$ и перепишем в виде

$$u(x,t)=\int_0^{\eta_0(x+t)} R(x,t;s(\eta),\eta)u_1(s(\eta),\eta)\,(1-\dot{s}^2(\eta))d\eta+f_1(x,t). \tag{71}$$

Дифференцируем (71) по x и t, а затем рассматриваем их разность при $x \to s(t)$:

$$\nu(t) = \int_0^t \frac{1-\dot{s}^2(\eta)}{1+\dot{s}(t)} K(s(t), t; s(\eta), \eta)\nu(\eta)d\eta + \frac{f_2(s(t), t)}{1+\dot{s}(t)}, \quad (72)$$

где $\nu(t) = u_x(s(t), t)$, $f_2(x, t) = f_{1x} - f_{1t}$, $K(x, t; s(\eta), \eta) = R_x(x, t; s(\eta), \eta) - R_t(x, t; s(\eta), \eta)$.

Получаем систему нелинейных интегральных уравнений (63) и (72) относительно неизвестных $\dot{s}(t)$ и $\nu(t)$. Однозначную разрешимость системы можно доказать с помощью метода сжатых отображений. Оценки для функции $u(x, t)$ и ее производных можно получить из (6), (71) и (72).

Случай B. Не удалось установить оценку $-N < \dot{s}(t) < -1$ для неизвестной границы. А разрешимость доказывается, как и в случае A.

Литература

1. Бубнов В. А., Соловьев И. А.// ИФЖ. 1977. Т. 33, № 6. С. 1131—1135.
2. Solomon A. D., Alexiades V., Wilson D. G., Drake J.// Quart. appl. math. 1985. Vol. 43, N 3. P. 295—304.
3. Dening Li// Quart. appl. math. 1989. Vol. 47, N 2. P. 221—231.
4. Friedman A., Hu Bei// Math. Anal. and Appl. 1989. Vol. 138, N 1. P. 249—279.
5. Rubinstein L. I. // Free boundary problems, Part II, Roma, 1980. P. 383—450.
6. Репин Ю. М. // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 2. С. 253—261.
7. Джураев Т. Д., Тахиров Ж. О.//Тез. докл. всесоюз. конф. «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление». Ашхабад, 1990. С. 52—53.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1950.

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз

Поступила в редакцию 12 июня 1993 г.