Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Б. Гавриков, Вариационный принцип для электромагнитной гидродинамики плазмы,
Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021, 022

https://www.mathnet.ru/ipmp2940

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
17 января 2026 г., 03:10:44

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 22 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Б. Гавриков

Вариационный принцип для электромагнитной гидродинамики плазмы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б. Вариационный принцип для электромагнитной гидродинамики плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 22. 48 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-22
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-22

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.Б. Гавриков

Вариационный принцип для электромагнитной гидродинамики плазмы

Москва — 2021

Гавриков М.Б.

Вариационный принцип для электромагнитной гидродинамики плазмы

В рамках лагранжева подхода дана математически корректная процедура получения необходимых условий locextr из вариационного принципа для ряда сплошных сред, заполняющих в каждый момент времени некоторую геометрическую область и не покидающую её с течением времени. Предложенный метод основан на геометрических свойствах множества диффеоморфизмов указанной области, являющегося конфигурационным пространством сплошной среды, и некоторой теореме вложения. Работоспособность метода демонстрируется на примерах получения необходимых условий locextr из вариационных принципов для идеальной газовой динамики и классической МГД плазмы. Центральный результат работы – построение вариационного принципа, в частности, лагранжиана и функционала действия для теории электромагнитной гидродинамики плазмы.

Ключевые слова: группа диффеоморфизмов, банахово пространство, вариация по Лагранжу, лагранжиан, функционал действия, задача с закреплёнными концами.

Mikhail Borisovich Gavrikov

Variational principle for electromagnetic hydrodynamics of plasma

Within the framework of the Lagrangian approach, a mathematically correct procedure is given for obtaining the necessary conditions of locextr from the variational principle for a number of continuous media that fill a certain geometric region at each moment of time and does not leave it over time. The proposed method is based on the geometric properties of the set of diffeomorphisms of the indicated domain, which is the configuration space of a continuous medium, and on a certain embedding theorem. The efficiency of the method is demonstrated by examples of obtaining the necessary locextr conditions from variational principles for ideal gas dynamics and classical MHD plasma. The central result of the work is the construction of the variational principle, in particular, the Lagrangian and the action functional for the theory of electromagnetic hydrodynamics of plasma.

Key words: group of diffeomorphisms, Banach space, Lagrange variation, Lagrangian, action functional, problem with fixed ends.

Введение

В работе [1] для исследования низкочастотных нерелятивистских процессов в полностью ионизованной плазме была предложена математическая модель ЭлектроМагнитной ГидроДинамики плазмы (ЭМГД). Многолетние исследования динамики и статики плазмы на базе ЭМГД-уравнений были подытожены в монографии [2]. При этом остался невыясненным вопрос о вариационных принципах ЭМГД-теории. В настоящей работе в рамках лагранжева подхода для бездиссипативной плазмы указана конструкция функционала действия, экстремали которого в задаче с закреплёнными концами являются решениями ЭМГД-уравнений. Тем самым указанный пробел вариационного исчисления применительно к ЭМГД-теории частично ликвидируется, а ЭМГД-уравнения могут рассматриваться как уравнения Эйлера в указанной вариационной задаче с закреплёнными концами, реализующие необходимое условие locextr.

Серьёзная проблема при построении вариационных принципов механики сплошных сред обусловлена бесконечномерностью конфигурационного пространства сплошной среды, что является математическим выражением наличия у неё бесконечного числа степеней свободы. Считая, что сплошная среда в каждый момент времени заполняет некоторую область $D \subseteq \mathbb{R}^3$ и с течением времени не покидает её, конфигурационным пространством такой механической системы будет $\mathrm{Diff}D$ – множество диффеоморфизмов области D, являющееся подмножеством банахова пространства $C_m^k(\bar{D})$, состоящего из m-значных k раз непрерывно дифференцируемых функций на D, все производные которых до k-го порядка включительно непрерывно продолжаются на границу области ∂D. Ниже считается $\mathrm{Diff}D \subseteq C_n^1(\bar{D})$, $n = 3$, а относительно суперпозиции отображений $\mathrm{Diff}D$ является топологической группой. $\mathrm{Diff}D$ является конфигурационным пространством для идеального газа или бездиссипативной классической МГД-плазмы. Для ЭМГД-плазмы конфигурационное пространство устроено более сложно (см. §4). Динамика сплошной среды определяется непрерывно дифференцируемой кривой $q(t) \in \mathrm{Diff}D$, $0 \le t \le T_0$, а функционал действия S задан на множестве таких кривых. Построение вариационного исчисления для подобных функционалов S серьёзно затруднено тем обстоятельством, что $\mathrm{Diff}D$ не является открытым подмножеством $E \underset{\mathrm{def}}{=} C_n^1(\bar{D})$ и, как следствие, область определения S не является открытым подмножеством банахова пространства $C_E^1 = C_E^1[0,T_0] \underset{\mathrm{def}}{=} \{ f : [0,T_0] \to E \mid f$ непрерывно дифференцируемо на $[0,T_0] \}$. Это приводит к экзистенциальным проблемам при вычислении вариаций по Лагранжу в экстремальной точке функционала S, а в указанном вычислении и

приравнивании нулю первой вариации по Лагранжу и состоит основной метод вариационного вычисления.

Естественный выход из этого затруднительного положения состоит в определении на $\mathrm{Diff}D$ структуры бесконечномерного дифференцируемого многообразия [3], превращающей $\mathrm{Diff}D$ в бесконечномерную группу Ли, и римановой метрики, задаваемой лагранжианом L, порождающим функционал действия S. Тогда экстремальные точки S – это геодезические на бесконечномерном римановом многообразии $\mathrm{Diff}D$. Реализация указанной идеи приводит к весьма громоздким теоретическим конструкциям [4]. В настоящей работе указан другой, значительно более простой способ действий, позволяющий избежать необходимости рассмотрения структуры бесконечномерной группы Ли на $\mathrm{Diff}D$ и в то же время запускающий аппарат вариационного исчисления для поиска точек locextr функционалов, заданных на $\mathrm{Diff}D$-значных кривых.

Этот способ основан на простом наблюдении – группа $\mathrm{Diff}D$ обладает линейчатой структурой, суть которой в следующем: *вместе с каждой точкой* $\mathrm{f} \in \mathrm{Diff}D$ *множество* $\mathrm{Diff}D$ *содержит открытый кусочек линейного многообразия* $f + E_0$, *определяемый открытой окрестностью нуля в* E_0, *где* $E_0 \subseteq E$ *– замкнутое подпространство, задаваемое условием* $h|_{\partial D} = 0$. *Как следствие, область определения функционала действия* S *также обладает линейчатой структурой – вместе с каждой* $\mathrm{Diff}D$*-значной функцией* $q(t)$ *она содержит открытый кусочек линейного многообразия* $q + C^1_{E_0}$, *определяемый открытой окрестностью нуля в* $C^1_{E_0}$, *где* $C^1_{E_0} \subseteq C^1_E$ *– замкнутое подпространство*. Это важное свойство, доказанное в §1 (**Теорема 3**), открывает принципиальную возможность нахождения вариаций по Лагранжу как у функционала действия S вдоль любого направления из $C^1_{E_0}$, так и у лагранжиана L, порождающего S, вдоль любого направления из E_0.

Практическое вычисление вариаций по Лагранжу с применением известных из вариационного вычисления правил дифференцирования интегральных функционалов требует продолжения функционала действия S и лагранжиана L до действия $\tilde{S}$ и лагранжиана $\tilde{L}$, заданных на открытых подмножествах соответствующих банаховых пространств. Действие $\tilde{S}$ и лагражиан $\tilde{L}$ не имеют физического смысла, но позволяют доказать существование и вычислить первую вариацию по Лагранжу в экстремальной точке у исходного функционала действия S. Конструкция функционалов $\tilde{S}$ и $\tilde{L}$ основана на теореме о продолжении функций из $C^k_m(\bar{D})$ до финитных m-значных k-раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, которые образуют нормированное пространство $C^k_m(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^k_m(\bar{D}) \to \tilde{f} \in C^k_m(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{f}|_{\bar{D}} = f$, причём соответствие $f \mapsto \tilde{f}$ является

линейным и непрерывным и обладает дополнительными свойствами, перечисленными в **Теореме 1** из §1. Таким образом, в основе конструкции продолжения действия S и лагранжиана L лежит *теорема вложения*. Доказательство этой и других теорем вложения см. в [5–8]. В частности, в проводимых построениях важную роль играет норма линейного непрерывного отображения $C_m^k(\bar{D}) \to C_m^k(\mathbb{R}^n)$, которое, заметим, определено неоднозначно.

Изложенные выше технологии применяются для построения в §§2,3 вариационных принципов для газовой динамики и классической МГД-плазмы. Полученные результаты известны на физическом уровне строгости, и нам принципиально важно получить их математически корректно, убедиться в работоспособности предложенных математических конструкций. Наконец, в §4 получен центральный результат работы – вариационный принцип для ЭМГД-плазмы. ЭМГД-уравнения для бездиссипативной двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы в области D имеют вид:

$$\begin{gathered}
\partial\rho_\pm / \partial t + \operatorname{div}\rho_\pm \mathbf{v}_\pm = 0, \\
\rho_\pm\left(\partial\mathbf{v}_\pm / \partial t + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla\mathbf{v}_\pm\right) + \nabla P_\pm = e_\pm n_\pm\left(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_\pm, \mathbf{H}]\right), \quad \rho_\pm = m_\pm n_\pm, \\
\partial S_\pm / \partial t + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla S_\pm = 0, \\
T_\pm dS_\pm = d\varepsilon_\pm + P_\pm d\left(1/\rho_\pm\right) \text{ (термодинамическое тождество)}, \qquad (1^\circ) \\
c^{=1}\partial\mathbf{H} / \partial t + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \text{ (закон Фарадея)}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\
\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi / c)(e_+ n_+ \mathbf{v}_+ + e_- n_- \mathbf{v}_-) \text{ (закон Ампера)}, \\
e_+ n_+ + e_- n_- = 0 \text{ (условие квазинейтральности)}.
\end{gathered}$$

Считается, что полностью ионизованная плазма образована двумя взаимопроникающими жидкостями – электронной и ионной, параметры которых имеют привычный смысл и отмечены индексами “±”. Система (1°) должна быть дополнена уравнениями состояния для электронов и ионов. Для наших целей удобно считать заданными функции $\varepsilon_\pm = \varepsilon_\pm(\rho_\pm, S_\pm)$. Тогда (см. §2) термодинамические тождества для электронов и ионов равносильны соотношениям $T_\pm = \partial\varepsilon_\pm / \partial S_\pm$, $P_\pm = \rho_\pm^2 \partial\varepsilon_\pm / \partial\rho_\pm$ и система (1°) является определённой и замкнутой относительно неизвестных функций $\rho_\pm$, $S_\pm$, $\mathbf{v}_\pm$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$.

Примем начальные положения электронов и ионов в области D за лагранжевы координаты. Тогда возникают два комплекта лагранжевых координат и связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами из каждого комплекта задаётся в каждый момент времени формулами $x = q_\alpha(t, a)$, $\alpha = \pm$, $a \in D$ – лагранжевы, $x \in D$ – эйлеровы координаты, где функции $q_\pm(t)$, $q_\pm(t)(a) \underset{\text{def}}{=} q_\pm(t, a)$ принимают значения в $\operatorname{Diff} D$. В лагранжевых координатах, как показано в §2, имеют место тождества $\mathbf{v}_\pm = \partial q_\pm / \partial t$, $\rho_\pm(t, a) = \rho_0^\pm(a) / J_\pm$,

$S_{\pm}(t,a)=S_0^{\pm}(a)$, $J_{\pm}=\det[\partial q_{\pm}^i/\partial a_j]$ – определитель матрицы Якоби $q_{\pm}$. Таким образом, шесть неизвестных функций $\mathbf{v}_{\pm}$, $\rho_{\pm}$, $S_{\pm}$ полностью определяются двумя функциями $q_{\pm}(t)$ со значениями в $\mathrm{Diff}D$. Выше $\rho_0^{\pm}(a)>0$, $S_0^{\pm}(a)$, $a\in D$ – произвольные непрерывные функции, задающие распределения массовой плотности и плотности энтропии электронов и ионов в области D в начальный момент времени. Если ввести векторный и скалярный потенциалы $\mathbf{A}$ и φ электромагнитного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ формулами $\mathbf{E}=-(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t-\nabla\varphi$, $\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$, то эволюция плазмы, в силу уравнений (1°), полностью задаётся функциями $(q_+(t),q_-(t),\mathbf{A}(t),\varphi(t))$, принимающими значения в конфигурационном пространстве $\mathrm{Diff}D\times\mathrm{Diff}D\times E\times\hat{E}$ для системы (1°), где $\hat{E}=C^1(\bar{D})$, $E=C_n^1(\bar{D})$, $\mathrm{Diff}D\subseteq E$. Функционал действия S для системы (1°) должен задаваться на непрерывно дифференцируемых кривых со значениями в конфигурационном пространстве. Учитывая сказанное, положим:

$$L_{\text{ЭМГД}}:(\mathrm{Diff}D\times E)^2\times E\times\hat{E}\to\mathbb{R}, \qquad (2°)$$

$$L_{\text{ЭМГД}}(q_+,p_+,q_-,p_-,\mathbf{A},\varphi)\underset{\mathrm{def}}{=}-(8\pi)^{-1}\int_D|\mathrm{rot}\mathbf{A}|^2\,dx+$$
$$+\sum_{\alpha=\pm}\alpha\int_D\sigma_0(a)\Big[c^{-1}\big\langle p_\alpha(a),\mathbf{A}(q_\alpha(a))\big\rangle-\varphi(q_\alpha(a))\Big]da+$$
$$+\sum_{\alpha=\pm}\int_D m_\alpha n_{\alpha0}(a)\Big[p_\alpha^2(a)/2-\varepsilon_\alpha\big(m_\alpha n_{\alpha0}(a)/J_\alpha,S_{\alpha0}(a)\big)\Big]da,\quad J_\alpha=\det\Big[\partial q_\alpha^i/\partial a_j\Big],$$

где $n_{\alpha0}(a)=\rho_\alpha(0)/m_\alpha$, $\sigma_0(a)=e_+n_0^+(a)$ и считается $e_+n_0^+(a)=en_0^-(a)$ (квазинейтральность в начальный момент времени, e – заряд электрона).

Рассмотрим функционал действия

$$S_{\text{ЭМГД}}[q_+,q_-,\mathbf{A},\varphi]\underset{\mathrm{def}}{=}\int_0^{T_0}L_{\text{ЭМГД}}(q_+(t),q_+'(t),q_-(t),q_-'(t),\mathbf{A}(t),\varphi(t))dt,$$
$$q_{\pm}\in C_E^1,\quad q_{\pm}([0,T_0])\subseteq\mathrm{Diff}D,\quad \mathbf{A}\in C_E^1,\quad \varphi\in C_{\hat{E}}^1 \qquad (3°)$$

и вариационную задачу с закреплёнными концами

$$S_{\text{ЭМГД}}[q_+,q_-,\mathbf{A},\varphi]\to\mathrm{locextr},$$
$$q_{\pm}(0)=q_0^{\pm},\ q_{\pm}(T_0)=q_1^{\pm},\ \mathbf{A}(0)=\mathbf{A}_0,\ \mathbf{A}(T_0)=\mathbf{A}_1,\ \varphi(0)=\varphi_0,\ \varphi(T_0)=\varphi_1, \qquad (4°)$$

где $q_0^{\pm},q_1^{\pm}\in\mathrm{Diff}D$, $\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1\in E$, $\varphi_0,\varphi_1\in\hat{E}$ – заданные элементы.

Пусть $M=\{q\in C_E^1\mid q([0,T_0])\subseteq\mathrm{Diff}D\}$, $\Lambda(q_0^{\pm},q_1^{\pm})=\{f\in C_E^1\mid f(0)=q_0^{\pm},\ f(T_0)=q_1^{\pm}\}$ и аналогично определяется $\Lambda(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1)$, $\Lambda(\varphi_0,\varphi_1)=\{f\in C_{\hat{E}}^1\mid f(0)=\varphi_0,\ f(T_0)=\varphi_1\}$.

Тогда $\Lambda(q_0^{\pm}, q_1^{\pm}), \Lambda(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) \subseteq C_E^1$, $\Lambda(\varphi_0, \varphi_1) \subseteq C_{\hat{E}}^1$ – замкнутые линейные многообразия конечной коразмерности. Задача с закреплёнными концами (4°) состоит в поиске точек locextr функционала действия $S_{\text{ЭМГД}}[\ldots]$, задаваемого формулой (3°) на множестве $M_* = M \cap \Lambda(q_0^+, q_1^+) \times M \cap \Lambda(q_0^-, q_1^-) \times \Lambda(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) \times$ $\times \Lambda(\varphi_0, \varphi_1)$. Основной результат работы формулируется так. *Если* $(\hat{q}_+, \hat{q}_-, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\varphi}) \in M_*$ *– точка locextr функционала действия, определяемого формулами* (2°), (3°), *на множестве* M_*, *причём* $\hat{q}_{\pm}$, $\hat{\mathbf{A}}$ *удовлетворяют условиям гладкости*:

$$\hat{q}_{\pm} \in C_E^2[0, T_0], \quad \hat{q}_{\pm}([0, T_0]) \subseteq C_n^2(\bar{D}), \quad \hat{\mathbf{A}}([0, T_0]) \subseteq C_n^2(\bar{D}),$$

то функции, задаваемые в лагранжевых координатах формулами $\hat{\mathbf{v}}_{\pm} = \partial \hat{q}_{\pm} / \partial t$, $\hat{\rho}_{\pm} = m_{\pm} n_0^{\pm}(a) / \hat{J}_{\pm}$, $S_{\pm} = S_0^{\pm}(a)$, $\hat{J}_{\pm} = \det[\partial \hat{q}_{\pm}^i / \partial a_j]$, *в эйлеровых координатах* $x = \hat{q}_{\pm}(t, a)$ *вместе с функциями* $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \hat{\mathbf{A}}$, $\mathbf{E} = -(1/c) \partial \hat{\mathbf{A}} / \partial t - \nabla \hat{\varphi}$ *дают решение системы* (1°) *в области* D *с естественными условиями на границе* ∂D: $\mathbf{H}|_{\partial D} \| \ell$, $\mathbf{E}|_{\partial D} \perp \ell$, *где* ℓ *– единичная внешняя нормаль к* D *в точках* ∂D.

Согласно формуле (2°), лагранжиан $L_{\text{ЭМГД}}$ распадается на три слагаемых, из которых первое и третье определяют локальные поля, и их анализ проходит по известной схеме [9]. Второе слагаемое, определяемое вторым интегралом в (2°), не является локальным полем, и его анализ требует специального исследования, связанного с теоремой вложения и рассмотренного в **Теореме 4** из §4.

Наконец, приведём используемые в работе выражения для норм в пространствах $C_m^k(\bar{D})$ и $C_F^k[a,b] \underset{\text{def}}{=} \{ f : [a,b] \to F \mid f - k\text{-раз непрерывно дифференцируема} \}$, где F – банахово

$$f \in C_F^k[a,b]: \quad \| f \| = \max_{0 \le p \le k} \sup_{a \le t \le b} \left\| f^{(p)}(t) \right\|,$$

$$f \in C_m^k(\bar{D}): \quad \| f \| = \max_{1 \le i \le m} \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in D} \left| \partial^{\alpha} f^i(x) \right|, \partial^{\alpha} f^i = \frac{\partial^{|\alpha|} f^i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$f = (f^1, \ldots, f^m), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \text{мультииндекс}, |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

§1. Множество диффеоморфизмов

Рассмотрим сплошную среду, заполняющую данный объём $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 3$. Будем считать, что с течением времени среда остаётся в объёме D, по-прежнему заполняя его. Обозначим через $a \in D$ координаты частиц среды в начальный момент времени. Тогда движение среды определяет (и

определяется) преобразованием $q: D \to D$, $q = q(t,a)$, являющимся при каждом t взаимно однозначным отображением D на D. В механике сплошных сред считается, что отображение $q: D \to D$ дифференцируемо в обе стороны и вместе с производными до второго порядка включительно непрерывно продолжается на границу D. Такие отображения $q: D \to D$ будем называть *диффеоморфизмами*. Координата $a \in D$ называется *лагранжевой*, а диффеоморфизмы области D образуют *конфигурационное пространство* сплошной среды, динамика которой задаётся кривой $t \mapsto q(t,\cdot)$ в конфигурационном пространстве. В отличие от классической механики, конфигурационное пространство сплошной среды обладает структурой *бесконечномерного* дифференцируемого многообразия и является группой Ли относительно суперпозиции диффеоморфизмов. К счастью, для получения вариационных принципов механики сплошных сред структура дифференцируемого многообразия на конфигурационном пространстве не нужна, и мы можем ограничиться значительно более простым построением, изложенным ниже.

Определение 1. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ – стандартная область [9] с гладкой границей класса C^ℓ, $\ell \geq 2$. Отображение $f: D \to \mathbb{R}^n$ называется *диффеоморфизмом* области D класса C^k, $\ell \geq k \geq 1$, если выполнены условия:

1) $f \in C_n^k(\bar{D})$;

2) матрица Якоби $J(f)(x)$ в каждой точке $x \in \bar{D}$ удовлетворяет неравенству $\det J(f)(x) > 0$;

3) f взаимно однозначно на $\bar{D}$, причём $f(\partial D) = \partial D$, $f(D) = D$.

Здесь и ниже непрерывное продолжение функции, заданной на D, на границу ∂D обозначается тем же символом, который используется для продолжаемой функции. Из 3) следует, что f гомеоморфно отображает $\bar{D}$ на $\bar{D}$, ∂D на ∂D и D на D. Множество всех диффеоморфизмов класса C^k стандартной области D обозначается $\mathrm{Diff}^k(D)$ и образует группу относительно суперпозиции отображений. Действительно, имеют место утверждения

(А) Если $f, g \in \mathrm{Diff}^k(D)$, то $g \circ f \in \mathrm{Diff}^k(D)$.

(Б) Если $f \in \mathrm{Diff}^k(D)$, то $f^{-1} \in \mathrm{Diff}^k(D)$.

Для доказательства (А) заметим, что условие 3) для $g \circ f$ выполнено по тривиальным соображениям, коль скоро оно выполнено для f и g по отдельности. Поскольку $J(g \circ f) = J(g)J(f)$, то $\det J(g \circ f)(x) = \det(J(g)(f(x))J(f)(x)) = \det J(g)(f(x)) \det J(f)(x) > 0$ для любого $x \in \bar{D}$ и, значит, для $g \circ f$ выполнено условие 2). Наконец, из правила

дифференцирования сложной функции имеем для любых $x \in D$, $1 \le i, j, m \le n$ (по повторяющимся индексам здесь и ниже предполагается суммирование):

$$\frac{\partial (g \circ f)^i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g^i}{\partial y_s}(f(x))\frac{\partial f^s}{\partial x_j}(x), \quad y = f(x),$$

$$\frac{\partial^2 (g \circ f)^i}{\partial x_m \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g^i}{\partial y_p \partial y_s}(f(x))\frac{\partial f^p}{\partial x_m}(x)\frac{\partial f^s}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial g^i}{\partial y_s}(f(x))\frac{\partial^2 f^s}{\partial x_m \partial x_j}(x).$$

Из полученных формул следует, что первые и вторые производные функции $g \circ f$, если они существуют, непрерывно продолжаются на границу ∂D, коль скоро это верно для функций f и g. Поэтому $g \circ f \in C_n^k(\bar{D})$ для $k = 1, 2$, т.е. условие 1) тоже выполнено. Для $k > 2$ проверка условия 1) легко проводится индукцией по k. Итак, утверждение (А) доказано.

Более сложно проверить утверждение (Б). Условие 3) для f^{-1} справедливо по тривиальным соображениям. Проверка условий 1) и 2) для f^{-1} опирается на **Теорему о продолжении**, доказанную в [5–8]. Напомним, для $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ множество

$$\operatorname{supp} f \underset{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne 0\}},$$

где черта означает замыкание, называется *носителем* отображения f. Пусть $C_m^k(\mathbb{R}^n)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ с компактным носителем (такие f также называются *финитными*). Положим

$$\|f\| \underset{\text{def}}{=} \max_{\substack{|\alpha| \le k \\ 1 \le i \le m}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|\partial^\alpha f^i(x)\right|, \quad f = \left(f^1, \ldots, f^m\right) \in C_m^k\left(\mathbb{R}^n\right),$$

где α – мультииндекс. Поскольку носитель f компактен, то $\|f\| < +\infty$ и $(C_m^k(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ – нормированное (но не банахово!) пространство.

Теорема 1 (о продолжении)**.** *Для любой стандартной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с гладкой границей класса C^ℓ, $\ell \ge 1$, существует линейное непрерывное отображение $C_m^k(\bar{D}) \to C_m^k(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \tilde{f}$, $k \le \ell$, для которого $\tilde{f}|_D = f$ при любом $f \in C_m^k(\bar{D})$. В частности, найдётся константа $C > 0$, для которой справедливо неравенство*

$$\|\tilde{f}\| \le C\|f\|$$

для любой $f \in C_m^k(\bar{D})$, где $\|f\|$ – норма в $C_m^k(\bar{D})$.

Кроме того, указанное линейное непрерывное отображение можно выбрать так, что для некоторого открытого множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *с компактным замыканием верны утверждения*: $\bar{D} \subseteq \Omega$ *и* $\operatorname{supp}\tilde{f} \subseteq \Omega$ *для любого* $f \in C_m^k(\bar{D})$.

Замечания. 1) Отображение $\tilde{f}$ из **Теоремы 1** называется *продолжением отображения* f *с сохранением класса гладкости*.

2) Отображение $f \mapsto \tilde{f}$, удовлетворяющее **Теореме 1**, определено неоднозначно.

3) Небанаховость пространства $C_m^k(\mathbb{R}^n)$ непринципиальна. Как следует из **Теоремы 1**, существует линейное непрерывное отображение $C_m^k(\bar{D}) \to C_m^k(\bar{\Omega})_0$, $f \mapsto \tilde{f}$, для которого $\tilde{f}|_D = f$ при любом $f \in C_m^k(\bar{D})$ и $\operatorname{supp}\tilde{f} \subseteq \Omega$, где $C_m^k(\bar{\Omega})_0 = \{h \in C_m^k(\bar{\Omega}) \mid h|_{\partial D} = 0\}$. Очевидно, $C_m^k(\bar{\Omega})_0$ – банахово пространство.

Первое приложение **Теоремы 1** – доказательство утверждения (Б). Пусть $f \in \operatorname{Diff}^k(D)$, докажем $f^{-1} \in \operatorname{Diff}^k(D)$. Очевидно, для $f^{-1}: D \to \mathbb{R}^n$ выполнено условие 3). По теореме о локальном обращении, f^{-1} k-раз непрерывно дифференцируемо в D. Покажем, что все производные f^{-1} до k-го порядка включительно непрерывно продолжаются на $\bar{D}$. Пусть $\tilde{f}$ – гладкое продолжение f на $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса гладкости, существующее по **Теореме 1**. Для $\varepsilon > 0$ положим $D_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, \bar{D}) < \varepsilon\}$. Докажем вспомогательное утверждение: *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *отображение* $\tilde{f}|_{D_\varepsilon}$ – *взаимно однозначное*. Допустим, вспомогательное утверждение доказано. Уменьшая, если надо, $\varepsilon > 0$, по соображениям непрерывности, можно считать, что $\det J(\tilde{f})(x) > 0$ для всех $x \in D_\varepsilon$. Но тогда из теоремы о локальном обращении следует, что $\tilde{f}$ – диффеоморфизм класса C^k открытого D_ε на некоторое открытое подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Поскольку $\tilde{f}|_D = f$ и $\bar{D} \subseteq D_\varepsilon$, то $\bar{D} \subseteq U$ и $(\tilde{f})^{-1}: U \to D_\varepsilon$ является C^k-продолжением отображения f^{-1} на U и тем более на $\bar{D}$. Итак, условие 1) для f^{-1} установлено. Поскольку $\det J((\tilde{f})^{-1}) = 1/\det J(\tilde{f})$, то выполнено и условие 2). Итак, $f^{-1} \in \operatorname{Diff}^k(D)$. Для полноты доказательства осталось проверить вспомогательное утверждение. Докажем его от противного. Допустим, оно неверно. Тогда найдётся монотонно убывающая последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ и точки $x_n, y_n \in D_{\varepsilon_n}$, для которых $x_n \neq y_n$, но $\tilde{f}(x_n) = \tilde{f}(y_n)$. Поскольку из каждой ограниченной последовательности точек $\mathbb{R}^n$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, то, без нарушения общности, можно считать последовательности $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$

сходящимися. Пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $y_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Поскольку $\varepsilon_n \downarrow 0$, то $x_0, y_0 \in \bar{D}$. Теперь возможны два случая. Если $x_0 \neq y_0$, то, учитывая $\tilde{f}|_D = f$ и $\tilde{f}(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(y_n) = \tilde{f}(y_0)$, приходим к противоречию с гомеоморфностью отображения $f = \tilde{f} : \bar{D} \to \bar{D}$. Если $x_0 = y_0$, то из невырожденности $J(\tilde{f})(x_0) = J(\tilde{f})(y_0)$, в силу теоремы о локальном обращении, следует, что $\tilde{f}$ в некоторой окрестности точки $x_0 = y_0$ взаимно однозначно. Но для всех достаточно больших n точки $x_n \neq y_n$ попадают в указанную окрестность точки $x_0 = y_0$ и для них $\tilde{f}(x_n) = \tilde{f}(y_n)$, что противоречит теореме о локальном обращении. Вспомогательное утверждение доказано.

Снабдим $\mathrm{Diff}^k(D)$ индуцированной топологией из $C_n^k(\bar{D})$.

Теорема 2. 1) *Отображение* $\mathrm{Diff}^k(D) \to \mathrm{Diff}^k(D)$, $f \mapsto f^{-1}$ *непрерывно*.
2) *Отображение* $\mathrm{Diff}^k(D) \times \mathrm{Diff}^k(D) \to \mathrm{Diff}^k(D)$, $(f, g) \to g \circ f$ *непрерывно*.

Доказательство **Теоремы 2** приведено в конце параграфа. Из **Теоремы 2** следует, что $\mathrm{Diff}^k(D)$ относительно суперпозиции отображений является топологической группой. Основное для вариационного исчисления свойство этой группы сформулировано в следующей теореме.

Теорема 3. 1) *Пусть* $f \in \mathrm{Diff}^k(D)$, *тогда найдётся* $\varepsilon > 0$, *для которого при любом* $h \in C_n^k(\bar{D})$, $\|h\| < \varepsilon$, $h|_{\partial D} = 0$ *справедливо включение* $f + h \in \mathrm{Diff}^k(D)$.
2) *Пусть* $f : [a,b] \to \mathrm{Diff}^k(D)$ *– непрерывное отображение, тогда найдётся* $\varepsilon > 0$, *для которого при любом непрерывном* $h : [a,b] \to C_n^k(\bar{D})$, $\sup\limits_{a\le t\le b} \|h(t)\| < \varepsilon$, $h(t)|_{\partial D} = 0$, $a \le t \le b$ *справедливо включение* $f(t) + h(t) \in \mathrm{Diff}^k(D)$ *для всех* $t \in [a,b]$.

Теорема 3 открывает принципиальную возможность вычисления вариаций по Лагранжу любого порядка произвольного функционала $S[f(\cdot)]$, заданного на непрерывно дифференцируемых функциях $f(t) : [a,b] \to \mathrm{Diff}^k(D)$ в любой точке $f(\cdot)$ вдоль любого направления, определяемого непрерывно дифференцируемой функцией $h : [a,b] \to C_n^k(\bar{D})$, подчинённой граничному условию $h(t)|_{\partial D} = 0$, $a \le t \le b$. Напомним, k-я вариация по Лагранжу функционала S в точке $f(\cdot)$ вдоль направления $h(\cdot)$ определяется формулой

$$\delta^k S(f(\cdot); h(\cdot)) \underset{\mathrm{def}}{=} \varphi^{(k)}(0), \quad k \ge 1,$$

где $\varphi(\alpha) \underset{\mathrm{def}}{=} S[f(\cdot) + \alpha h(\cdot)]$ – функция, заданная, в силу **Теоремы 3**, в открытой окрестности нуля. Возможность вычисления вариаций по Лагранжу, в свою очередь, позволяет искать необходимые и достаточные условия locextr

функционала $S[f(\cdot)]$, что является основной задачей вариационного исчисления. При этом делается несущественной конкретная структура бесконечномерного дифференцируемого многообразия на группе $\mathrm{Diff}^k(D)$, превращающая её в группу Ли. С другой стороны, **Теорема 3** частично проливает свет на локальную структуру группы $\mathrm{Diff}^k(D)$. Согласно этой теореме, в окрестности каждой точки $f \in \mathrm{Diff}^k(D)$ лежит открытый кусочек линейного многообразия $f + E_0$, определяемый открытой окрестностью нуля в E_0, где $E_0 \subseteq E = C_n^k(\bar{D})$, $E_0 \underset{\mathrm{def}}{=} \{h \in E \mid h|_{\partial D} = 0\}$ – замкнутое подпространство E. Возникает вопрос, можно ли указать другое более широкое, чем рассмотренное выше, замкнутое подпространство $E_0 \subseteq E$, обладающее этим же свойством? Поскольку E_0 играет роль пространства пробных функций при построении вариационного исчисления, то чем “больше” E_0, тем содержательнее получаются необходимые и достаточные условия locextr при исследовании функционала $S[f(\cdot)]$.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C_m^k(\mathbb{R}^n)$ *– финитная функция. Тогда для любых* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *имеют место неравенства*

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \le A(f)\|x - y\|_\infty \le n\|f\|\|x - y\|_\infty, \tag{1}$$

где $A(f) = n \max\limits_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(x) \right|$, $f = (f^1, \ldots, f^m)$, $\|\cdot\|_\infty$ *– чебышёвская норма в* $\mathbb{R}^n$, $\|f\|$ *– норма в* $C_m^k(\mathbb{R}^n)$, *определённая выше.*

Замечание. Первое неравенство в (1) верно для любого непрерывно дифференцируемого отображения $f = (f^1, \ldots, f^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, для которого величина $A(f)$ конечна.

Доказательство Теоремы 3. 1) Пусть $f \in \mathrm{Diff}^k(D)$, тогда $f^{-1} \in \mathrm{Diff}^k(D)$, в частности, $\|f^{-1}\| > 0$. Рассмотрим гладкое продолжение f^{-1} с сохранением класса гладкости, существующее в силу **Теоремы 1**. По **Лемме 1**, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\left\| f^{-1}(x) - f^{-1}(y) \right\|_\infty \le n \left\| f^{-1} \right\| \|x - y\|_\infty \le nC \left\| f^{-1} \right\| \|x - y\|_\infty, \tag{2}$$

где $C > 0$ – константа из формулировки **Теоремы 1**. Пусть теперь $x, y \in \bar{D}$. В неравенстве (2) заменим x на $f(x)$, а y – на $f(y)$. Учитывая $f(x), f(y) \in \bar{D}$, имеем $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$, $f^{-1}(f(y)) = f^{-1}(f(y)) = y$ и тогда из (2) выводим неравенство

$$\|f(x)-f(y)\|_\infty \ge \left(nC\|f^{-1}\|\right)^{-1}\|x-y\|_\infty, \quad x,y\in\bar{D}. \tag{3}$$

Пусть $h\in C_n^k(\bar{D})$. Рассуждая аналогично, получим для любых $x,y\in\bar{D}$ неравенство

$$\|h(x)-h(y)\|_\infty = \|\tilde{h}(x)-\tilde{h}(y)\|_\infty \le Cn\|h\|\|x-y\|_\infty. \tag{4}$$

Поэтому для $x,y\in\bar{D}$, применяя неравенство треугольника и неравенства (3), (4) , имеем:

$$\|(f+h)(x)-(f+h)(y)\|_\infty \ge \|f(x)-f(y)\|_\infty - \|h(x)-h(y)\|_\infty \ge$$
$$\ge \left(\left(nC\|f^{-1}\|\right)^{-1} - Cn\|h\|\right)\|x-y\|_\infty.$$

Если $\|h\|<\varepsilon \underset{\text{def}}{=} (C^2n^2\|f^{-1}\|)^{-1}>0$, то для любых $x,y\in\bar{D}$ получим

$$\|(f+h)(x)-(f+h)(y)\|_\infty \ge B(h)\|x-y\|_\infty, \quad B(h)=\left(nC\|f^{-1}\|\right)^{-1} - Cn\|h\|>0. \tag{5}$$

Рассмотрим отображение $g=f+h$ и пусть $h|_{\partial D}=0$, $\|h\|<\varepsilon$. Тогда $g\in C_n^k(\bar{D})$ и из неравенства (5) следует взаимная однозначность отображения g на $\bar{D}$. Учитывая $g(x)=f(x)$, $x\in\partial D$, приходим к выводу, что g гомеоморфно отображает ∂D на ∂D и g – гомеоморфное вложение $\bar{D}$. Поскольку $f\in \mathrm{Diff}^k(D)$, то $\det J(f)(x)>0$, $x\in\bar{D}$. С учётом непрерывности $\det J(f)$ и компактности $\bar{D}$ имеем $\inf\det J(f)(x)>0$, где $\inf$ берётся по всем $x\in\bar{D}$. Уменьшая, если надо, $\varepsilon>0$, можно добиться, чтобы (*а*) $\det J(f+h)(x)>0$, $x\in\bar{D}$, (*б*) $(f+h)(D)\cap D\ne\varnothing$. Для таких h отображение $g=f+h$, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2) из **Определения 1**. Для проверки условия 3) установим $g(D)=D$. Поскольку g взаимно однозначно, то $g(D)\cap\partial D = g(D)\cap g(\partial D) = g(D\cap\partial D) = g(\varnothing)=\varnothing$. Из свойства (*б*), $g(D)\cap D\ne\varnothing$ следует $g(D)\subseteq D$. Действительно, если бы $g(D)\cap(\mathbb{R}^n\setminus\bar{D})\ne\varnothing$, то возникло противоречие с условием связности D. Поэтому $g(D)\subseteq\bar{D}$ и т.к. $g(D)\cap\partial D=\varnothing$, то $g(D)\subseteq D$, что и утверждалось. Учитывая $D\setminus g(D) = D\setminus(g(D)\cup g(\partial D)) = D\setminus g(D\cup\partial D) = D\setminus g(\bar{D})$ и компактность $g(\bar{D})$, заключаем, что $D\setminus g(D)$ открытое множество. Но $g(D)$ тоже открытое по теореме о локальном отображении. Поэтому $D\setminus g(D)=\varnothing$, иначе снова приходим к противоречию с условием связности D. Итак, $g(D)=D$, и условие 3) из **Определения 1** выполнено, а значит, $g=f+h\in\mathrm{Diff}^k(D)$ и утверждение 1) теоремы полностью доказано.

2) Для доказательства утверждения надо убедиться, что все конструкции первой части доказательства применительно к $f(t)$ и $h(t)$ непрерывно зависят от t. По доказанному, имеем для каждого $t\in[a,b]$ неравенства

$$\|f(t)(x)-f(t)(y)\|_\infty \ge \left(nC\|f(t)^{-1}\|\right)^{-1}\|x-y\|_\infty, \quad x,y\in\bar{D},$$
$$\|h(t)(x)-h(t)(y)\|_\infty \le Cn\|h(t)\|\|x-y\|_\infty.$$

Поскольку функция $t\to f(t)$, операция взятия нормы и отображение $f\to f^{-1}$ непрерывны (последнее, согласно **Теореме 2.**1), то функции $t\to\|h(t)\|$, $t\to\|f(t)^{-1}\|$ непрерывные, а вторая ещё и положительная. Обозначим

$$\|h\|=\sup_{a\le t\le b}\|h(t)\|, \quad \|f^{-1}\|=\sup_{a\le t\le b}\|f(t)^{-1}\|.$$

Тогда $\|f^{-1}\|>0$ и если $\|h\|<\varepsilon\underset{\text{def}}{=}(C^2n^2\|f^{-1}\|)^{-1}>0$, то для любых $t\in[a,b]$, $x,y\in\bar{D}$, $\|h\|<\varepsilon$ имеем

$$\|(f(t)+h(t))(x)-(f(t)+h(t))(y)\|_\infty \ge B(h)\|x-y\|_\infty,$$
$$B(h)\underset{\text{def}}{=}\left(hC\|f^{-1}\|\right)^{-1}-Cn\|h\|>0.$$

Отсюда следует, что для любого $t\in[a,b]$ отображение $f(t)+h(t)$ взаимно однозначно на $\bar{D}$, а если $h(t)|_{\partial D}=0$ для любого $t\in[a.b]$, то на границе ∂D это отображение задаёт гомеоморфизм ∂D на ∂D. Теперь для завершения доказательства по изложенной выше схеме надо лишь убедиться, что утверждения (*а*) и (*б*) за счёт уменьшения ε можно сделать справедливыми одновременно для всех $t\in[a,b]$. Рассмотрим (*б*). Поскольку $f:[a,b]\to\mathrm{Diff}^k(D)$ непрерывна, то отображение $f(t)(x)$, $t\in[a,b]$, $x\in\bar{D}$ непрерывно по совокупности аргументов. Для фиксированного $x_0\in D$ имеем $f(t)(x_0)\in D$, $a\le t\le b$, а образ I непрерывной кривой $t\mapsto f(t)(x_0)$, $a\le t\le b$ компактен и лежит в D. Поэтому следующая величина положительна $\varepsilon_0\underset{\text{def}}{=}\rho(I,\mathbb{R}^n\setminus D)$, $\varepsilon_0>0$. Тогда для $\|h\|<\varepsilon_0$ для любого $t\in[a,b]$ имеем $(f(t)+h(t))(D)\cap D\ne\varnothing$, поскольку для указанных h очевидно $(f(t)+h(t))(x_0)\subseteq D$. Рассмотрим (*а*). Возьмём функцию $\det(J(f(t))(x)+A)$, $A\in\mathbb{R}^{n^2}$ (пространство $n\times n$-матриц), $t\in[a,b]$, $x\in\bar{D}$. Эта функция очевидно непрерывна по совокупности аргументов, и для $A=0$ имеем $\det J(f(t))(x)>0$, $(t,x)\in[a,b]\times\bar{D}$. Из компактности $[a,b]\times\bar{D}$ следует, что найдётся $\varepsilon^0>0$, для которого при $\|A\|_\infty<\varepsilon^0$ и любых $t\in[a,b]$, $x\in\bar{D}$ верно неравенство

$\det(J(f(t))(x)+A)>0$. Тогда если $\|h\|<\varepsilon^0$, то $\det J(f(t)+h(t))(x)=\det(J(f))(x)+A)>0$ для всех $t\in[a,b]$, $x\in\bar{D}$, ибо $\|J(h(t))(x)\|_\infty<\varepsilon^0$. Поэтому если ε заменить на $\min\{\varepsilon,\varepsilon_0,\varepsilon^0\}$, то по схеме доказательства первой части приходим к утверждению 2). Теорема доказана. #

Доказательство Леммы 1. Используя формулу конечных приращений и неравенство Коши, получим:

$$\|f(x)-f(y)\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\left|f^i(x)-f^i(y)\right|=\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^n\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x+\theta_i(y-x))\left(y^j-x^j\right)\right|\le$$

$$\le\max_{1\le i\le m}\left[\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x+\theta_i(y-x))\right)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{j=1}^n\left(y^j-x^j\right)^2\right]^{1/2}\le\|y-x\|_\infty\, n\max_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)\right|=$$

$$=A(f)\|y-x\|_\infty,$$

где $0<\theta_i<1$, $1\le i\le m$ – некоторые средние точки. Неравенство $A(f)\le n\|f\|$ следует из определения нормы в $C_m^k(\mathbb{R}^n)$. Лемма доказана. #

Доказательство Теоремы 2. Докажем утверждение 1). Утверждение 2) доказывается аналогично, но проще. Обозначим норму $f\in C_n^k(\bar{D})$

$$\|f\|=\|f\|_k=\max_{1\le i\le n}\max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in D}\left|\partial^\alpha f^i(x)\right|,\quad k\ge 0.$$

Очевидно:

$$k=0:\ \|f\|_0=\|f\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\left\|f^i\right\|_\infty,\quad k>0:\|f\|_k=\max\left\{\|f\|_{k-1},\max_{|\alpha|=k}\left\|\partial^\alpha f\right\|_\infty\right\},\quad (6)$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – чебышёвская норма. Например,

$$\left\|\partial^\alpha f\right\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sup_{x\in D}\left|\partial^\alpha f^i(x)\right|.$$

Мы проверим утверждение 1) для $k=0,1,2$. Для $k>2$ оно легко устанавливается индукцией по k, исходя из рекуррентного соотношения (6).

Случай $k=0$. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$:

$$\|f-f_0\|_\infty<\delta\Rightarrow\left\|f^{-1}-f_0^{-1}\right\|_\infty<\varepsilon,\quad f,f_0\in\mathrm{Diff}^k(D).\quad (7)$$

Воспользуемся очевидным равенством

$$f^{-1}(y)-f_0^{-1}(y)=f_0^{-1}(f_0-f)f^{-1}(y),\quad y\in\bar{D}.\quad (8)$$

Из компактности $\bar{D}$ и непрерывности f_0^{-1} на $\bar{D}$, по теореме Кантора, следует равномерная непрерывность f_0^{-1} на $\bar{D}$. Значит для $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:

$$y, y' \in \bar{D}, \quad \|y - y'\|_\infty < \delta \Rightarrow \left\| f_0^{-1}(y) - f_0^{-1}(y') \right\|_\infty < \varepsilon / 2. \tag{9}$$

Если $\|f - f_0\|_\infty < \delta$, то с учётом $f^{-1}(y) \in \bar{D}$ для любого $y \in \bar{D}$, имеем:

$$\left\| f_0(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y)) \right\|_\infty \le \|f - f_0\| < \delta, \quad y \in \bar{D},$$

тогда из (8), (9) для любого $y \in \bar{D}$ получим

$$\left\| f^{-1}(y) - f_0^{-1}(y) \right\|_\infty \le \left\| f_0^{-1}(f_0(f^{-1}(y))) - f_0^{-1}(f(f^{-1}(y))) \right\|_\infty < \varepsilon / 2.$$

Значит, $\left\| f^{-1} - f_0^{-1} \right\|_\infty = \sup\limits_{y \in \bar{D}} \left\| f^{-1}(y) - f_0^{-1}(y) \right\|_\infty \le \varepsilon / 2 < \varepsilon$, что и доказывает импликацию (7).

Случай $k = 1$. Учитывая (6) и уже доказанную импликацию (7), необходимо и достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:

$$\|f - f_0\|_1 < \delta \Rightarrow \max_{1 \le i, j \le n} \sup_{y \in \bar{D}} \left| \partial (f^{-1})^i / \partial y_j - \partial (f_0^{-1})^i / \partial y_j \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Поскольку $n \times n$-матрицы $\left[\dfrac{\partial (f^{-1})^i}{\partial y_j}(y) \right]$ и $\left[\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(f^{-1}(y)) \right]$ взаимно обратны, то

$$\frac{\partial (f^{-1})^i}{\partial y_j}(y) = \frac{A_i^j}{\det J(f)}(f^{-1}(y)) = F_j^i \left(\frac{\partial f^k}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) \right),$$

где A_i^j – алгебраическое дополнение элемента $\partial f^j / \partial x_i$, $J(f)$ – матрица Якоби $\left[\partial f^k / \partial x_s \right]$, F_j^i – дробно-рациональная функция, равная отношению двух многочленов от элементов $\partial f^k / \partial x_s$. Очевидно: F_j^i определена и непрерывна в одном и том же для всех $1 \le i, j \le n$ открытом подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$. При этом пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ отождествляется с пространством $n \times n$-квадратных матриц A, снабжённых чебышёвской нормой, и тогда $U = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A \ne 0\}$. Каждая из функций $\dfrac{\partial f_0^k}{\partial x_s}(f_0^{-1}(y))$ непрерывна на $\bar{D}$, поэтому образ P компакта $\bar{D}$ при непрерывном отображении $\bar{D} \to \mathbb{R}^{n^2}$, $y \mapsto \left[\dfrac{\partial f_0^k}{\partial x_s}(f_0^{-1}(y)) \right] \in \mathbb{R}^{n^2}$ тоже компакт, лежащий в U. Поскольку U – открытое и $P \subseteq U$, то величина

$\varepsilon_0 \underset{\text{def}}{=} \rho(P, \mathbb{R}^{n^2} \setminus U) > 0$ положительная. Пусть P_0 – компакт, состоящий из точек, отстоящих от P не более чем на $\varepsilon_0 / 2$ (по норме максимум модуля). Очевидно $P \subseteq P_0 \subseteq U$, и из непрерывности F_j^i на P_0, по теореме Кантора, следует существование для $\varepsilon > 0$ такого $\delta_0 > 0$, для которого значения F_j^i в точках из P_0, расстояние между которыми меньше $\delta_0 > 0$, отличаются по модулю меньше чем на $\varepsilon / 2$ для каждой пары $1 \le i, j \le n$. Далее, для каждых $1 \le k, s \le n$ из непрерывности $\partial f_0^k / \partial x_s$ на $\bar{D}$ и компактности $\bar{D}$, по теореме Кантора, следует существование $\delta_1 > 0$:

$$\|x - x'\|_\infty < \delta_1,\ x, x' \in \bar{D} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_0^k}{\partial x_s}(x) - \frac{\partial f_0^k}{\partial x_s}(x') \right| < \min\left\{ \frac{\delta_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{4} \right\}. \tag{11}$$

Из первой части доказательства следует существование $\delta_2 > 0$:

$$\| f - f_0 \|_1 < \delta_2 \Rightarrow \| f^{-1} - f_0^{-1} \|_\infty < \min\{\delta_1, \varepsilon\}. \tag{12}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_2, \delta_0 / 2, \varepsilon_0 / 4\}$. Тогда $\delta > 0$. Пусть $\| f - f_0 \|_1 < \delta$. Тогда из неравенства, где учтены соотношения (11), (12),

$$\begin{aligned} &\sup_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial f^k}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) - \frac{\partial f_0^k}{x_s}(f_0^{-1}(y)) \right| \le \sup_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial f^k}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) - \frac{\partial f_0^k}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) \right| + \\ &+ \sup_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial f_0^k}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) - \frac{\partial f_0^k}{x_s}(f_0^{-1}(y)) \right| \le \| f - f_0 \|_1 + \min\left\{ \frac{\delta_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{4} \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

следует, что в $\mathbb{R}^{n^2}$ точка $\left[\frac{\partial f^k}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) \right]$ отстоит от точки $\left[\frac{\partial f_0^k}{\partial x_k}(f_0^{-1}(y)) \right]$, лежащей в компакте P, меньше чем на $\varepsilon_0 / 2$, и, значит, указанная точка попадает в P_0. С другой стороны, из (13) следует, что расстояние между двумя рассмотренными точками меньше δ_0 и, значит, по построению,

$$\left| F_j^i\left(\frac{\partial f^k}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) \right) - F_j^i\left(\frac{\partial f_0^k}{\partial x_k}(f_0^{-1}(y)) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad y \in \bar{D}$$

для всех $1 \le i, j \le n$. Переходя к sup по всем $y \in \bar{D}$ в последнем неравенстве и беря max по всем $1 \le i, j \le n$, приходим к неравенству (10). Тем самым, в случае $k = 1$ утверждение доказано.

Случай $k=2$. Учитывая (6) и уже доказанную импликацию (10), необходимо и достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, для которого

$$\|f-f_0\|_2<\delta \Rightarrow \max_{1\le i,j,\ell\le n}\sup_{y\in\bar{D}}\left|\frac{\partial^2(f^{-1})^i}{\partial y_\ell \partial y_j}-\frac{\partial^2(f_0^{-1})^i}{\partial y_\ell \partial y_j}\right|<\varepsilon.$$

По правилу дифференцирования сложной функции вторые производные f^{-1} представляются в виде

$$\frac{\partial^2(f^{-1})^i}{\partial y_\ell \partial y_j}(y)=\frac{\partial F_j^i}{\partial(\partial f^k/\partial x_s)}\left(\frac{\partial f^m}{\partial x_q}(f^{-1}(y))\right)\cdot\frac{\partial^2 f^k}{\partial x_p \partial x_s}(f^{-1}(y))\cdot\frac{\partial(f^{-1})^p}{\partial y_\ell}(y). \quad (14)$$

Правая часть (14) – это сумма конечного числа произведений трёх сомножителей, каждый из которых является непрерывной на $\bar{D}$ вещественной функцией, получаемой из $f\in\mathrm{Diff}^2(D)$ посредством некоторого непрерывного отображения $\mathrm{Diff}^2(D)\to C(\bar{D})$, где $C(\bar{D})$ – банахова алгебра непрерывных на $\bar{D}$ функций относительно чебышёвской нормы. Действительно, непрерывность указанного отображения в произвольной точке $f_0\in\mathrm{Diff}^2(D)$ для последнего сомножителя была показана во второй части доказательства, для первого это получается дословным повторением рассуждений второй части с заменой функций $F_j^i\to\partial F_j^i/\partial(\partial f^k/\partial x_s)$. Наконец, непрерывность второго сомножителя в точке f_0 устанавливается преобразованиями (13), применёнными ко второй производной $\partial^2 f^k/(\partial x_p\partial x_s)$. Учитывая сказанное, правая часть (14), по тривиальным соображениям, непрерывна как элемент $C(\bar{D})$ в произвольной точке $f_0\in\mathrm{Diff}^2(D)$, ч.т.д. Теорема доказана. #

§2. Вариационный принцип для бездиссипативной газовой динамики

Состояние газовой среды в отсутствие диссипаций задаётся векторным полем скоростей $\mathbf{U}(t,x)$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^3$ и двумя скалярными полями $\rho(t,x)$, $P(t,x)$ – объёмной плотностью газа и его давлением. Три производные характеристики газовой среды – массовая плотность внутренней энергии газа $\varepsilon(t,x)$, плотность энтропии $S(t,x)$ и температура $T(t,x)$ – выражаются через ρ и P. Пять величин ρ, P, ε, S, T называются термодинамическими параметрами газовой среды. Согласно постулатам термодинамики, независимыми являются любые два из пяти перечисленных, а остальные три суть известные функции выбранных независимых термодинамических параметров. Эти функции называются уравнениями состояния газовой среды и

подчиняются термодинамическому тождеству, которое обычно служит для нахождения энтропии:

$$TdS = d\varepsilon + Pd\left(1/\rho\right).$$

Ниже удобно в качестве независимых термодинамических параметров взять ρ и S, тогда функция $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$ задана, а из термодинамического тождества находятся две другие функции $T(\rho, S)$, $P(\rho, S)$. Действительно, из термодинамического тождества следует

$$TdS = d\varepsilon - \frac{P}{\rho^2}d\rho = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\varepsilon}{\partial S}dS\right) - \frac{P}{\rho^2}d\rho = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} - \frac{P}{\rho^2}\right)d\rho + \frac{\partial\varepsilon}{\partial S}dS.$$

Учитывая независимость переменных ρ и S, получим

$$T = \partial\varepsilon / \partial S, \quad P = \rho^2 \partial\varepsilon / \partial\rho, \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, S). \tag{15}$$

Эволюция газовой среды определяется законами сохранения массы, импульса и энтропии и в эйлеровых переменных (t, x) математически записывается в виде замкнутой системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\partial\rho / \partial t + \operatorname{div}\rho\mathbf{U} = 0, \\ &\rho\partial\mathbf{U} / \partial t + \rho\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U} + \nabla P = 0, \\ &\partial S / \partial t + \mathbf{U}\cdot\nabla S = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Поскольку уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$ считается известным, то из второго равенства (15) следует замкнутость системы уравнений (16) относительно неизвестных функций ρ, S, $\mathbf{U}$. Наша цель – получить систему (16) из вариационного принципа. Проще всего это сделать в рамках лагранжева подхода, суть которого в следующем.

Рассмотрим динамику газа, заключённого в каждый момент времени в области D, в качестве которой берётся стандартная область с гладкой границей класса C^ℓ, $\ell \geq 1$. Считается, что газ не покидает область D и в каждой момент времени заполняет её целиком. Пусть $a \in D$ – координаты частиц газа в начальный момент времени, называемые *лагранжевыми*. В момент времени t частицы газа занимают положение $q(t, a) \in D$, так что отображение $a \mapsto q(t, a)$ из D в D является диффеоморфизмом этой области – это один из постулатов механики сплошных сред. С учётом сказанного предположим, что при каждом t отображение $q(t): D \to D$, $q(t)(a) \underset{\text{def}}{=} q(t, a)$ принадлежит $\operatorname{Diff} D = \operatorname{Diff}^1 D$. При этом координаты $x = q(t, a)$ называются *эйлеровыми*. Преимущество лагранжевых координат в том, что в этих координатах в системе (16) функции ρ и S можно исключить из числа неизвестных. Чтобы убедиться в этом,

обозначим $J = \det[\partial x^i / \partial a_j]$ – определитель матрицы Якоби отображения $x = q(t,a)$. Поскольку $q(t) \in \mathrm{Diff}D$, то $J(t,a) > 0$, $t \geq 0$, $a \in \bar{D}$ и $J(0,a) \equiv 1$. Гидродинамическая скорость $\mathbf{U}$ связана с лагранжевыми координатами равенством $\mathbf{U} = \partial q / \partial t \Leftrightarrow U^i = \partial x^i / \partial t = \partial q^i / \partial t$.

Лемма 2. 1) $\partial J / \partial t = (\mathrm{div}\mathbf{U})J$, *где дивергенция вычисляется в эйлеровых координатах*.

2) *Пусть* A_j^i *– алгебраическое дополнение элемента* $\partial x^i / \partial a_j$ *в матрице Якоби отображения* $x = q(t,a)$, *тогда* $\partial A_j^i / \partial a_j = 0$ *для любого* $1 \leq i \leq n$.

Исключим ρ и S из числа неизвестных в системе (16). Имеем очевидное равенство:

$$\rho(t,a) = \rho(t, x(t,a)).$$

Откуда:

$$\partial\rho(t,a) / \partial t = \partial\rho(t,x) / \partial t + (\partial\rho / \partial x_i)\partial x^i / \partial t = \partial\rho(t,x) / \partial t + (\partial\rho(t,x) / \partial x_i)U^i.$$

Поэтому, с учётом результата **Леммы 2.**1), первое уравнение системы (16) равносильным образом переписывается в лагранжевых координатах в виде

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{U} = \frac{\partial\rho(t,a)}{\partial t} - \frac{\partial\rho(t,x)}{\partial x_i}U^i + \mathbf{U}\cdot\nabla\rho + \rho\mathrm{div}\mathbf{U} = \frac{\partial\rho(t,a)}{\partial t} + \frac{\rho}{J}\frac{\partial J}{\partial t}.$$

Откуда $\partial[\ln(\rho J)] / \partial t \equiv 0$ и, значит, ρJ не зависит от t, т.е. $\rho J = \rho_0(a)$ и, значит,

$$\rho(t,a) = \rho_0(a) / J, \tag{17}$$

где $\rho_0(a) > 0$ – произвольная непрерывная функция, задающая плотность газа в области D в начальный момент времени. Аналогичное рассуждение показывает, что третье уравнение системы (16) в лагранжевых координатах равносильно равенству

$$S(t,a) = S_0(a), \tag{18}$$

где $S_0(a)$ – произвольная непрерывная функция, задающая плотность энтропии газа в области D в начальный момент времени.

В классической механике при построении вариационных принципов для конечномерной консервативной механической системы лагранжиан вычисляется как разность между кинетической и потенциальной энергиями системы. Считая идеальный газ механической системой с бесконечным числом степеней свободы, рассмотрим неформальные соображения, позволяющие получить лагранжиан для идеального газа. Допустим, что искомый лагранжиан вычисляется по классической формуле, в которой роль потенциальной энергии играет внутренняя энергия газа:

$$L = \mathscr{E}_{\text{kin}} - \mathscr{E}_{\text{pot}}, \quad \mathscr{E}_{\text{kin}} = \int_D (\rho U^2/2)dx, \quad \mathscr{E}_{\text{pot}} = \int_D \rho\varepsilon(\rho, S)dx. \tag{19}$$

Получаемое из (19) выражение лагранжиана $L = L(\mathbf{U}, \rho, S)$ для непосредственного вывода вариационного принципа непригодно, поскольку функции $\mathbf{U}$, ρ, S зависимы – они связаны уравнениями системы (16), и при вычислении частных производных лагранжиана L учесть эту зависимость непросто. Чтобы обойти указанную проблему, сделаем в интеграле для L в каждый момент времени t замену переменных $x = q(t,a)$ (и тем самым перейдём от эйлеровых к лагранжевым переменным), что законно, поскольку $q(t) \in \mathrm{Diff}D$ для любого t. Учитывая соотношения (17), (18), равенства $\mathbf{U} = \partial q/\partial t$, $dx = |J|da = Jda$, получим:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{U}, \rho, S) &\underset{\text{def}}{=} \int_D \rho\left(\frac{U^2}{2} - \varepsilon(\rho, S)\right)dx = \int_D \rho_0(a)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\rho_0(a)}{J}, S_0(a)\right)\right]da \underset{\text{def}}{=} \\ &\underset{\text{def}}{=} L\left(t, q, \partial q/\partial t\right), \quad J = \det\left[\partial q^i/\partial a_j\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Оказывается, следующий вариационный принцип приводит к системе (16):

$$\begin{aligned} &S[q] \underset{\text{def}}{=} \int_0^{T_0} L(t, q(t), q'(t))dt \to \text{locextr}, \quad q(0) = q_0, \quad q(T_0) = q_1, \\ &q_0, q_1 \in \mathrm{Diff}D, \quad q(t) \in \mathrm{Diff}D, \quad 0 \le t \le T_0, \quad q \in C_E^1, \quad E = C_n^1(\bar{D}), \end{aligned} \tag{21}$$

где лагранжиан $L(t, q, p)$ и его плотность $\mathscr{L}$ вычисляются по формулам:

$$L(t, q, p) \underset{\text{def}}{=} \int_D \mathscr{L}(t, a, q(a), p(a), \nabla q(a))da, \quad q \in \mathrm{Diff}D \subseteq E, \quad p \in E, \tag{22}$$

$$\mathscr{L}(t, a, u^i, v^i, [w_j^i]) \underset{\text{def}}{=} \rho_0(a)\left[\frac{v^2}{2} - \varepsilon\left(\frac{\rho_0(a)}{\det[w_j^i]}, S_0(a)\right)\right], \quad \nabla q = \left[\frac{\partial q^i}{\partial a_j}\right],$$

$$\mathscr{L} : [0, T_0] \times \bar{D} \times \mathbb{R}^{2n} \times W \to \mathbb{R}, \quad W = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A > 0\}.$$

Очевидно, $W \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ – открытое, и $\mathbb{R}^{n^2}$ отождествляется с пространством квадратных $n \times n$-матриц $A = [w_j^i]$. Плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ не зависит от t, u^i, $1 \le i \le n$, и если считать функцию $\varepsilon(\rho, S)$ бесконечно дифференцируемой по ρ и S, то выполнены стандартные условия гладкости [9] для $\mathscr{L}$.

Функционал действия $S[q]$ формулами (21), (22) определён на множестве $M = \{q \in C_E^1[\theta, T_0] \mid q(t) \in \mathrm{Diff}D \text{ для любого } t \in [0, T_0]\}$, но его экстремальное значение в задаче с закреплёнными концами (21) ищется на множестве

$M(q_0,q_1)=M\cap\Lambda(q_0,q_1)$, где $\Lambda(q_0,q_1)\underset{\text{def}}{=}\{q\in C_E^1\mid q(0)=q_0, q(T_0)=q_1\}$ – замкнутое линейное многообразие коразмерности 2 в C_E^1. Основные математические проблемы связаны с тем, что $M\subseteq C_E^1$ не является открытым подмножеством, в частности, не ясно, как продифференцировать $S[q]$ в экстремальной точке для получения необходимых и достаточных условий экстремума. В то же время физический смысл значение $S[q]$ имеет только для $q\in M$, ибо только для таких q выражение $S[q]$, определяемое правой частью равенства (20), совпадает с физически осмысленной величиной в левой части. Ключевую роль здесь играет **Теорема 2**, согласно которой первая вариация по Лагранжу функционала S в любой точке $\hat{q}\in M$ вдоль любого направления $h\in C_{E_0}^1$, где $E_0=\{h\in E\mid h_{\partial D}=0\}$, в принципе может быть вычислена, если существует. Если при этом $\hat{q}\in M(q_0,q_1)$ – locextr функционала $S[q]$ на $M(q_0,q_1)$, то указанная первая вариация по Лагранжу обязана обратиться в нуль:

$$\delta S(\hat{q};h)=0,\quad h\in C_{E_0}^1,\quad h(0)=h(T_0)=0 \tag{23}$$

для любых h, указанных в (23). Чтобы извлечь отсюда необходимые условия locextr, надо доказать существование первой вариации по Лагранжу и указать способ её вычисления.

Для этого продолжим функционал S на открытое подмножество $\mathscr{U}\in C_E^1$, так что $M\subseteq\mathscr{U}$. Пусть $\mathcal{U}\underset{\text{def}}{=}\{f\in C_n^1(\bar{D})\mid \det\left[\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)\right]>0$ для любого $x\in\bar{D}\}$. Очевидно, $\mathrm{Diff}D\subseteq\mathcal{U}\subseteq C_n^1(\bar{D})$ и $\mathcal{U}$ – открытое множество. Положим теперь

$$\mathscr{U}\underset{\text{def}}{=}\{q\in C_E^1\mid q(t)\in\mathcal{U}\text{ для любого } t\in[0,T_0]\}.$$

Тогда $\mathscr{U}$ – искомое. Продолжим L до лагранжиана $\tilde{L}:[0,T_0]\times\mathcal{U}\times E\to\mathbb{R}$ той же формулой (22). Продолжение $\tilde{S}$ функционала действия S определяется равенством

$$\tilde{S}[q]=\int_0^{T_0}\tilde{L}(t,q(t),q'(t))dt,\quad q\in\mathscr{U}.$$

Подчеркнём, что значения продолженных функционалов $\tilde{S}$ и $\tilde{L}$ имеют только формально-математический смысл. Из результатов [9] следует, что всюду в области определения лагранжиан $\tilde{L}$ непрерывен (в частности, определены интегралы $\tilde{S}[q]$, $q\in\mathscr{U}$ и, значит, $S[q]$, $q\in M$) и существуют частные

производные $\partial\tilde{L}/\partial q$, $\partial\tilde{L}/\partial p$, непрерывные по совокупности переменных, а функционал $\tilde{S}$ непрерывно дифференцируем по Фреше всюду в $\mathscr{U}$ и

$$\tilde{S}'[\hat{q}]h = \int_0^{T_0}\left[\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial q}(t)h(t) + \frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial p}(t)h'(t)\right]dt, \quad h \in C_E^1, \quad \hat{q} \in \mathscr{U},$$

где домик над $\tilde{L}$ означает, что частные производные $\partial\tilde{L}/\partial q$, $\partial\tilde{L}/\partial p$ вычисляются на векторе $(t, \hat{q}(t), \hat{q}'(t))$. Кроме того, справедливы следующие формулы для вычисления частных производных:

$$\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial q}h = \int_D\left[\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}h^i + \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\frac{\partial h^i}{\partial a_j}\right]da, \quad \frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial p}h = \int_D\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}h^i da, \quad h \in C_n^1(\bar{D}),$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование, домик над $\tilde{L}$ означает, что частные производные $\partial\tilde{L}/\partial q$, $\partial\tilde{L}/\partial p$ вычисляются на векторе $(t, \hat{q}, \hat{p})$, а домик над $\mathscr{L}$ – что частные производные $\mathscr{L}$ вычисляются на векторе $(t, a, \hat{q}(a), \hat{p}(a), \nabla\hat{q}(a))$. Учитывая $C_{E_0}^1 \subseteq C_E^1$, отсюда следует, во-первых, существование первой вариации по Лагранжу $\delta S(\hat{q}; h)$, $\hat{q} \in M$, $h \in C_{E_0}^1$ и правило для подсчёта её значения – $\delta S(\hat{q}; h) = \tilde{S}'[\hat{q}]h$, $h \in C_{E_0}^1$ и, во-вторых, справедливость равенства для $\hat{q} \in M(q_0, q_1)$, доставляющего locextr $S[q]$ в задаче (21):

$$\int_0^{T_0}\left[\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial q}(t)h(t) + \frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial p}(t)h'(t)\right]dt = 0, \quad h \in C_{E_0}^1, \quad h(0) = h(T_0) = 0, \tag{24}$$

которое равносильно соотношению (23) и должно выполняться для любых h, указанных в (24). Поскольку $E_0 \subseteq E$ – замкнутое подпространство, то, рассматривая $\partial\tilde{L}/\partial q$, $\partial\tilde{L}/\partial p$ как элементы сопряжённого пространства E_0^*, по **Основной лемме** вариационного исчисления для банаховых пространств [9], из (24) следует, что $\partial\hat{\tilde{L}}/\partial p \in C_{E_0^*}^1$ и $d(\partial\hat{\tilde{L}}/\partial p)/\partial t = \partial\hat{\tilde{L}}/\partial q$ для всех $t \in [0, T_0]$ (уравнение Эйлера). Следовательно, для всех $t \in [0, T_0]$ и любого $h \in E_0$ верно равенство

$$-d[(\partial\hat{\tilde{L}}/\partial p)h]/dt + (\partial\hat{\tilde{L}}/dq)h \equiv 0, \quad h \in E_0, \quad t \in [0, T_0]. \tag{25}$$

Очевидно, $\tilde{L}$ – лагранжиан локального поля [9] с плотностью $\mathscr{L}$, удовлетворяющей стандартным условиям гладкости. Из результатов [9] следует, что для достаточно гладкой $\hat{q} \in M(q_0, q_1)$, доставляющей locextr $S[q]$

на $M(q_0,q_1)$, а именно, $\hat{q}\in C_E^2$, $\hat{q}([0,T_0])\subseteq C_n^2(\bar{D})$, условие (25) равносильно системе уравнений Эйлера-Остроградского:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}-\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)=0,\quad 1\le i\le n,\qquad (26)$$
$$a\in D,\quad t\in[0,T_0].$$

(Условие трансверсальности на границе ∂D для значений $\hat{q}(t)(x)$, $x\in\partial D$ выпадает, поскольку в (25) $h\in E_0$ и, значит, обращается в нуль на границе ∂D.) При этом домик над $\mathscr{L}$ в (26) означает, что все частные производные $\mathscr{L}$ вычисляются на векторе $(t,a,\hat{q}(t)(a),\hat{q}'(t)(a),\nabla q(t)(a))$. Запишем уравнения Эйлера-Остроградского (26) для плотности лагранжиана $\mathscr{L}$, вычисляемой по формуле (22). Из (22) следует:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}=\rho_0(a)v^i,\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u^i}=0,\quad 1\le i\le n,$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial w_j^i}=\rho_0(a)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\frac{\rho_0(a)}{J^2}\frac{\partial J}{\partial w_j^i}=\left(\frac{\rho_0(a)}{J}\right)^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}A_j^i=\rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}A_j^i=PA_j^i,\quad 1\le i,j\le n,$$

где использованы равенства (15) и (17). С учётом результата **Леммы 2.**2) получим:

$$\partial(\partial\mathscr{L}/\partial w_j^i)/\partial a_j=\partial(PA_j^i)/\partial a_j=(\partial P/\partial a_j)A_j^i+P(\partial A_j^i/\partial a_j)=(\partial P/\partial a_j)A_j^i.$$

Поэтому окончательно уравнения Эйлера-Остроградского (26) примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0(a)\hat{U}^i(t,a)\right)+\frac{\partial\hat{P}}{\partial a_j}\hat{A}_j^i=0,\quad 1\le i\le n,\qquad (27)$$

где $\hat{U}^i=\partial\hat{q}^i/\partial t$, $\hat{\rho}=\rho_0(a)/\hat{J}$, $\hat{J}=\det\left[\partial\hat{q}^i/\partial a_j\right]$, $\hat{P}=\hat{\rho}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}(\hat{\rho},\hat{S})$, $\hat{S}=S_0(a)$.

В эйлеровых координатах система (27) переходит в точности в уравнение импульсов из системы (16). Действительно, имеем:

$$\partial P/\partial x_i=(\partial P/\partial a_j)\partial a^j/\partial x_i=(\partial P/\partial a_j)A_j^i/J\Rightarrow\partial P/\partial a_jA_j^i=J\partial P/\partial x_i,\quad 1\le i\le n,$$
$$\partial(\rho_0(a)U^i(t,a))/\partial t=\rho_0(a)\partial U^i(t,a)/\partial t=\rho_0(a)\partial U^i(t,q(t,a))/\partial t=$$
$$=\rho_0(a)\left(\partial U^i(t,x)/\partial t+(\partial U^i/\partial x_j)\partial q^j/\partial t\right)=\rho_0(a)\left(\partial U^i/\partial t+(\partial U^i/\partial x_j)U^j\right)=$$
$$=\rho_0(a)\left(\partial U^i/\partial t+(\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U})^i\right),\quad 1\le i\le n.$$

Подставляя результаты вычислений в (27) и учитывая тождество (17), получим

$$\rho\left(\partial U^i / \partial t + (\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U})^i\right) + \partial P / \partial x_i = 0, \quad 1 \le i \le n,$$

что совпадает со вторым уравнением системы (16).

Подведём итог. Выше было доказано, что *если* $\hat{q} \in M(q_0, q_1)$ – *locextr функционала действия* $S[q]$ *на* $M(q_0, q_1)$, *определяемого формулами* (21), (22) и $\hat{q}$ *достаточно гладкая функция* – $\hat{q} \in C_E^2[0, T_0]$, $\hat{q}([0, T_0]) \subseteq C_n^2(\bar{D})$ – *то функции, задаваемые в лагранжевых переменных равенствами* $\hat{\mathbf{U}} = \partial\hat{q} / \partial t$, $\hat{\rho} = \rho_0(a) / \hat{J}$, $\hat{S} = S_0(a)$, $\hat{J} = \det[\partial\hat{q}^i / \partial a_j]$, *при переходе к эйлеровым координатам дают решение уравнений газовой динамики* (16). Здесь $\rho_0(a)$ и $S_0(a)$ – распределение плотности газа и плотности энтропии в области D в начальный момент времени.

Доказательство Леммы 2. 1) Рассмотрим строки матрицы Якоби $[\partial q^i / \partial a_j]$. Они имеют вид градиентов по лагранжевым координатам $\nabla q^1, \ldots, \nabla q^n$, $\nabla = (\partial / \partial a_1, \ldots, \partial / \partial a_n)$. По правилу дифференцирования определителя имеем

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\det\begin{bmatrix} \nabla q^1 \\ \cdots \\ \nabla q^n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\det\begin{bmatrix} \nabla q^1 \\ \cdots \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\nabla q^k \\ \cdots \\ \nabla q^n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\det\begin{bmatrix} \nabla q^1 \\ \cdots \\ \nabla U^k \\ \cdots \\ \nabla q^n \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Дифференцируя сложную функцию, получим $\nabla U^k = (\partial U^k / \partial x_i)\nabla q^i$. Подставляя полученное выражение в (28) и учитывая линейность определителя по k-й строке и равенство нулю определителя матрицы с двумя одинаковыми строками, приходим к следующему выводу. Нулевой вклад в k-е слагаемое (28) даёт только k-е слагаемое $(\partial U^k / \partial x_k)\nabla q^k$ полученного выражения. Поэтому окончательно получим:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U^k}{\partial x_k}\det\begin{bmatrix} \nabla q^1 \\ \cdots \\ \nabla q^k \\ \cdots \\ \nabla q^n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U^k}{\partial x_k}\cdot J = (\mathrm{div}\mathbf{U})J.$$

Утверждение доказано.

2) Для $n = 3$ утверждение проверяется прямым вычислением. Например, пусть $i = 1$. Тогда элементарная проверка показывает

$$\frac{\partial A_j^1}{\partial a_j}=\frac{\partial A_1^1}{\partial a_1}+\frac{\partial A_2^1}{\partial a_2}+\frac{\partial A_3^1}{\partial a_3}=\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial q^2}{\partial a_2}\frac{\partial q^3}{\partial a_3}-\frac{\partial q^2}{\partial a_3}\frac{\partial q^3}{\partial a_2}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial q^2}{\partial a_1}\frac{\partial q^3}{\partial a_3}-\frac{\partial q^2}{\partial a_3}\frac{\partial q^3}{\partial a_1}\right)+\frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial q^2}{\partial a_1}\frac{\partial q^3}{\partial a_2}-\frac{\partial q^2}{\partial a_2}\frac{\partial q^3}{\partial a_1}\right)=0.$$

Аналогичные вычисления проводятся для $i=2,3$.

Для произвольного $n>1$ дадим комбинаторное доказательство. Фиксируем $1\le i\le n$. По определению,

$$A_j^i \underset{\text{def}}{=} (-1)^{i+j}\det\left[\frac{\partial q^{(i)}}{\partial a_1}\dots\frac{\partial q^{(i)}}{\partial a_j}\dots\frac{\partial q^{(i)}}{\partial a_n}\right],$$

где $\partial q^{(i)}/\partial a_k=(\partial q^1/\partial a_k,\dots,\partial q^i/\partial a_k,\dots,\partial q^n/\partial a_k)$, а домик над элементом или столбцом означает, что помеченный домиком элемент или столбец должен быть выброшен. Тогда, по правилу дифференцирования определителя, получим

$$\frac{\partial A_j^i}{\partial a_j}=(-1)^i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\ne j}(-1)^j\det\left[\frac{\partial q^{(i)}}{\partial a_1}\dots\frac{\partial^2 q^{(i)}}{\partial a_j\partial a_k}\dots\frac{\partial q^{(i)}}{\partial a_j}\dots\frac{\partial q^{(i)}}{\partial a_n}\right].$$

Полученная двойная сумма распадается на пары подобных слагаемых. Каждая пара определяется набором (k,j), $1\le k<j\le n$. У одного слагаемого пары столбец $\dfrac{\partial^2 q^{(i)}}{\partial a_k\partial a_j}$ стоит на k-м месте, а j-й столбец выброшен и определитель этого слагаемого берётся со знаком $(-1)^j$, у второго слагаемого пары указанный столбец стоит на j-м месте, а k-й столбец выброшен и определитель этого слагаемого берётся со знаком $(-1)^k$ (а остальные столбцы обоих слагаемых, стоящие на местах с номерами $s\ne k$, $s\ne j$ суть $\partial q^{(i)}/\partial a_s$). Из этого описания легко следует, что сумма слагаемых каждой пары равна нулю, что и доказывает утверждение. Лемма 2 доказана. #

§3. Вариационный принцип для классической МГД

Уравнения классической магнитной гидродинамики (МГД) – это простейшая математическая модель динамики плазменной среды, предложенная в 1950 г. шведским физиком Х. Альфвеном [10]. Согласно классической МГД, плазма – это сжимаемый газ, проводящий электрический ток и взаимодействующий с магнитным полем. В МГД к параметрам газовой среды $\mathbf{U}$, ρ, S (см. §2) для задания состояния плазмы добавляется ещё один

векторный параметр – напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}$. Система уравнений классической МГД в эйлеровых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\rho\mathbf{U}=0,\\
&\rho\left(\partial\mathbf{U}/\partial t+\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right)+\nabla\left(P+(8\pi)^{-1}H^2\right)-(4\pi)^{-1}\mathbf{H}\cdot\nabla\mathbf{H}=0,\\
&\partial S/\partial t+\mathbf{U}\cdot\nabla S=0,\\
&\partial\mathbf{H}/\partial t-\operatorname{rot}[\mathbf{U},\mathbf{H}]=0\ (\text{закон Фарадея}),\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0,\\
&TdS=d\varepsilon+Pd\left(1/\rho\right).
\end{aligned}\tag{29}$$

При этом должны быть заданы уравнения состояния плазменной сплошной среды, которые считаются независящими от магнитного поля $\mathbf{H}$. Ниже удобно считать заданной зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\rho,S)$, тогда термодинамическое тождество в (29) равносильно соотношениям $T=\partial\varepsilon/\partial S$, $P=\rho^2\partial\varepsilon/\partial\rho$ (см. §2). Учитывая $\operatorname{div}\operatorname{rot}=0$, из (29) следует, что $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ это ограничение только на начальное распределение поля $\mathbf{H}$. Следовательно, система (29) это замкнутая система 4 дифференциальных уравнений в частных производных относительно 4 неизвестных функций ρ, S, $\mathbf{U}$, $\mathbf{H}$, из которой эти функции, в принципе, могут быть найдены.

Наша цель – получить систему (29) из вариационного принципа. Для этого снова используем лагранжевы координаты, предполагая, что плазма в каждый момент времени заполняет стандартную область D с гладкой границей класса C^ℓ, $\ell\geq 1$ и не покидает эту область с течением времени. Как было показано в §2, в лагранжевых координатах первое и третье уравнения системы (29) сводятся к виду

$$\rho(t,a)=\frac{\rho_0(a)}{J},\quad S(t,a)=S_0(a),\quad J=\det\left[\frac{\partial x^i}{\partial a_j}(t,a)\right]_{1\leq i,\,j\leq n=3},$$

что позволяет исключить ρ и S из числа неизвестных. Аналогичный вывод верен и для поля $\mathbf{H}$. Покажем, что в лагранжевых координатах

$$H^i(t,a)=\frac{1}{J}\frac{\partial x^i}{\partial a_j}H_0^j(a),\quad 1\leq i\leq 3,\tag{30}$$

где $x=q(t,a)$ – эйлеровы координаты, $\mathbf{H}_0(a)$ – произвольное векторное поле, удовлетворяющее условию $\operatorname{div}\mathbf{H}_0=0$ и задающее напряжённость магнитного поля в области D в начальный момент времени. Докажем равенство (30), являющееся математической формой “вмороженности” силовых линий магнитного поля в движущуюся плазму [11]. Учитывая известное тождество $\operatorname{rot}[\mathbf{U},\mathbf{H}]=\mathbf{H}\cdot\nabla\mathbf{U}-\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{H}+\mathbf{U}\operatorname{div}\mathbf{H}-\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{U}$, перепишем закон Фарадея в (29) в виде:

$$\partial\mathbf{H}/\partial t+\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathrm{div}\mathbf{U}-\mathbf{H}\cdot\nabla\mathbf{U}=0.$$

Согласно **Лемме 2**, $\mathrm{div}\mathbf{U}=\partial J/\partial t\cdot(J)^{-1}$, а $\partial\mathbf{H}(t,a)/\partial t=\partial\mathbf{H}/\partial t+\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{H}$ (см. §2), поэтому закон Фарадея равносилен тождеству для $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t,a)$:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial t}\mathbf{H}=\mathbf{H}\cdot\nabla\mathbf{U}. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь в лагранжевых переменных комбинации $JH^i\partial a^k/\partial x_i$, $1\le k\le n$ и покажем, что для любого $1\le k\le n$ верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(JH^i\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)\equiv 0,\quad 1\le k\le n. \tag{32}$$

Действительно, с учётом (31) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(JH^i\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(JH^i\right)\frac{\partial a^k}{\partial x_i}+JH^i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=\left(\frac{\partial J}{\partial t}H^i+J\frac{\partial H^i}{\partial t}\right)\frac{\partial a^k}{\partial x_i}+$$

$$+JH^i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=JH^s\frac{\partial U^i}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x_i}+JH^i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=JH^s\frac{\partial U^i}{\partial a_\ell}\cdot\frac{\partial a^\ell}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x_i}+$$

$$+JH^i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=JH^s\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial a_\ell}\right)\cdot\frac{\partial a^\ell}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x_i}+JH^i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=$$

$$=-JH^s\frac{\partial x^i}{\partial a_\ell}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^\ell}{\partial x_s}\right)\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x_i}+JH^i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=-JH^s\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_s}\right)+JH^i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x_i}\right)=0,$$

где использовались определение $U^i=\partial x^i/\partial t$, взаимная обратность матриц $[\partial x^i/\partial a_j]$ и $[\partial a^i/\partial x_j]$ и вытекающие отсюда тождества $\frac{\partial x^i}{\partial a_\ell}\cdot\frac{\partial a^\ell}{\partial x_s}=\delta_{is}$, $\frac{\partial x^i}{\partial a_\ell}\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x_i}=\delta_{\ell k}$, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial a_\ell}\right)\cdot\frac{\partial a^\ell}{\partial x_s}=-\frac{\partial x^i}{\partial a_\ell}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a^\ell}{\partial x_s}\right)$. Законность всех дифференцирований в проведённых преобразованиях следует из [9]. Точнее, для достаточно гладкой $q(t)$ (см. ниже) функция $q(t,a)=q(t)(a)$, согласно [9], дважды дифференцируема по t и $a\in\overline{D}$, причём производные по t, t^2 и смешанные производные по t и a_i непрерывны по совокупности переменных t, a. Поэтому $\partial x^i/\partial a_j=\partial q^i(t,a)/\partial a_j$ непрерывно дифференцируема по t и $\frac{\partial a^i}{\partial x_j}=\frac{\partial(q(t)^{-1})^i}{\partial x_j}(q(t,a))=\frac{A_i^j}{J}$ тоже непрерывно дифференцируема по t, поскольку алгебраическое дополнение A_i^j и J суть алгебраические

многочлены от непрерывно дифференцируемых по t функций $\partial x^s / \partial a_k$. Тем самым тождество (32) доказано. Из него следует

$$JH^i \frac{\partial a^k}{\partial x_i} = H_0^k(a) \Rightarrow H^i = \frac{1}{J}\frac{\partial x^i}{\partial a_j} H_0^j(a).$$

Тем самым равенство (30) установлено. Формула (30) позволяет исключить **H** из числа неизвестных в системе (29).

Перейдём к построению вариационного принципа. Следуя схеме рассуждений §2, допустим, искомый лагранжиан вычисляется по классической формуле, в которой роль потенциальной энергии играет сумма внутренней энергии плазмы и энергии магнитного поля:

$$L = \mathscr{E}_{\text{kin}} - \mathscr{E}_{\text{pot}}, \quad \mathscr{E}_{\text{kin}} = \int_D (\rho U^2 / 2) dx, \quad \mathscr{E}_{\text{pot}} = \int_D \Big(\rho\varepsilon(\rho, S) + H^2 / (8\pi)\Big) dx.$$

(Магнитную энергию плазмы нельзя отнести к кинетической, поскольку магнитное поле только искривляет траектории частиц плазмы, но не меняет величину их скорости и значит кинетическую энергию частиц плазмы.) Делая в каждый момент времени t замену переменных $x = q(t,a)$ в интеграле для L, что законно, ибо $q(t) \in \text{Diff}D$ при любом t, получим:

$$L(\mathbf{U}, \mathbf{H}, \rho, S) \underset{\text{def}}{=} \int_D \left[\rho\left(\frac{U^2}{2} - \varepsilon(\rho, S)\right) - \frac{H^2}{8\pi}\right] dx = \int_D \Big\{\rho_0(a)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -\varepsilon\left(\frac{\rho_0(a)}{2}, S_0(a)\right)\right] - \frac{1}{8\pi J}\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial a_j} H_0^j(a)\right)^2 \Big\} da \underset{\text{def}}{=} L\left(t, q, \frac{\partial q}{\partial t}\right), \tag{33}$$

где $J = \det[\partial q^i / \partial a_i]$. Оказывается, вариационный принцип (21) приводит к системе (29), где, учитывая (33),

$$L(t, q, p) \underset{\text{def}}{=} \int_D \mathscr{L}(t, a, q(a), p(a), \nabla q(a)) da, \; q \in \text{Diff}D \subseteq E, \; p \in E, \; E = C_n^1(\bar{D}),$$

$$\mathscr{L}(t, a, u^i, v^i, [w_j^i]) \underset{\text{def}}{=} \rho_0(a)\left[\frac{v^2}{2} - \varepsilon\left(\frac{\rho_0(a)}{\det[w_j^i]}, S_0(a)\right)\right] - \frac{1}{8\pi \det[w_j^i]}\sum_{i=1}^n (w_j^i H_0^j(a))^2, \tag{34}$$

$$\mathscr{L} : [0, T_0] \times \bar{D} \times \mathbb{R}^{2n} \times W \to \mathbb{R}, \quad W = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A > 0\}, \quad \nabla q = [\partial q^i / \partial a_j].$$

Дословно повторяя рассуждения §2, имеющие универсальный характер, приходим к следующему выводу: *если* $\hat{q} \in M(q_0, q_1)$ *доставляют locextr функционалу действия* $S[q]$ *в задаче с закреплёнными концами* (21) *и* $\hat{q} \in C_E^2$,

$\hat{q}([0,T_0]) \subseteq C_n^2(\bar{D})$, *то для* $\hat{q}(t,a) = \hat{q}(t)(a)$ *выполнены уравнения Эйлера-Остроградского* (26) *для плотности лагранжиана* $\mathscr{L}$ *, вычисляемой по* (34).

Запишем уравнения (26) для плотности (34). Очевидно,

$$\partial\mathscr{L} / \partial u^i = 0, \quad \partial\mathscr{L} / \partial v^i = \rho_0(a) v^i, \quad 1 \le i \le n.$$

Из вычислений §2 следует

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial}{\partial w_j^i}\rho_0(a)\left[\frac{v^2}{2} - \varepsilon\left(\frac{\rho_0}{\det[w_j^i]}, S_0(a)\right)\right]\right) = \frac{\partial P}{\partial a_j} A_j^i, \quad 1 \le i \le n.$$

Учитывая $\partial J / \partial w_j^i = A_j^i$, получим

$$\frac{\partial}{\partial w_j^i}\left[-\frac{1}{8\pi J}\sum_{k=1}^{n}\left(w_s^k H_0^s(a)\right)^2\right] = -\frac{1}{4\pi J}\left(w_s^i H_0^s(a)\right) H_0^j(a) + \frac{1}{8\pi J^2}\sum_{k=1}^{n}\left(w_s^k H_0^s(a)\right)^2 A_j^i =$$
$$= -(4\pi)^{-1} H^i H_0^j(a) + (8\pi)^{-1} H^2 A_j^i.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(-\frac{H^i}{4\pi} H_0^j(a) + \frac{H^2}{8\pi} A_j^i\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial H^i}{\partial a_j} H_0^j(a) - \frac{H^i}{4\pi}\frac{\partial H_0^j}{\partial a_j} +$$
$$+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H^2}{\partial a_j} A_j^i + \frac{H^2}{8\pi}\frac{\partial A_j^i}{\partial a_j} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial H^i}{\partial a_j} H_0^j + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial H^2}{\partial a_j} A_j^i,$$

где использованы результат **Леммы 2.**2) и тождество $\partial H_0^j / \partial a_j \equiv 0$ (иначе, $\mathrm{div}\mathbf{H}_0 = 0$).

Таким образом, уравнения Эйлера-Остроградского (26) для плотности лагранжиана $\mathscr{L}$, вычисляемого по (34) на экстремальной достаточно гладкой (см. выше) функции $\hat{q}$ принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0(a)\hat{U}^i) + A_j^i \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\hat{P} + \frac{\hat{H}^2}{8\pi}\right) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \hat{H}^i}{\partial a_j} H_0^j(a) = 0, \quad 1 \le i \le n, \qquad (35)$$

где $\hat{\mathbf{U}} = \partial\hat{q} / \partial t$, $\hat{P} = \hat{\rho}^2 \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}(\hat{\rho}, \hat{S})$, $\hat{\rho} = \rho_0(a) / \hat{J}$, $\hat{S} = S_0(a)$, $\hat{H}^i = \dfrac{1}{\hat{J}}\dfrac{\partial\hat{q}^i}{\partial a_j} H_0^j(a)$, $J = \det[\partial\hat{q}^i / \partial a^i]$.

Учитывая равенство (30) и тождество $\dfrac{\partial x^k}{\partial a_j} A_j^i = J\delta^{ki}$, получим

$$\frac{\partial H^i}{\partial a_j} H_0^j(a) = \frac{\partial H^i}{\partial x_k}\frac{\partial x^k}{\partial a_j} H_0^j = J\frac{\partial H^i}{\partial x_k} H^k,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right) A_j^i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right)\cdot\frac{\partial x^k}{\partial a_j} A_j^i = J\frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right).$$

Поэтому в эйлеровых координатах уравнения (35) перейдут в тождество (см. конец §2)

$$\rho\left(\partial\mathbf{U}/\partial t + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right) + \nabla\left(P + (8\pi)^{-1}H^2\right) - (4\pi)^{-1}\mathbf{H}\cdot\nabla\mathbf{H} = 0,$$

которое совпадает с уравнением импульсов из системы (29).

Подведём итог. Было установлено, что *если* $\hat{q} \in M(q_0, q_1)$ – *locextr функционала действия* $S[q]$, *определяемого формулами* (21), (34) *и* $\hat{q} \in C_E^2[0, T_0]$, $\hat{q}([0, T_0]) \subseteq C_n^2(\bar{D})$, $E = C_n^1(\bar{D})$, *то функции, задаваемые в лагранжевых координатах равенствами* $\hat{\mathbf{U}} = \partial\hat{q}/\partial t$, $\hat{\rho} = \rho_0(a)/\hat{J}$, $\hat{S} = S_0(a)$, $\hat{H}^i = \dfrac{\partial\hat{q}^i}{\partial a_j} H_0^j(a)/\hat{J}$, $\hat{J} = \det[\partial\hat{q}^i/\partial a_j]$, *при переходе к эйлеровым координатам дают решение уравнений классической МГД* (29). Здесь $\rho_0(a) > 0$, $S_0(a)$, $\mathbf{H}_0(a)$, $a \in \bar{D}$ – произвольные гладкие функции, подчинённые условию $\mathrm{div}\mathbf{H}_0 = 0$ в $\bar{D}$.

§4. Вариационный принцип для электромагнитной гидродинамики плазмы

Для исследования плазменных процессов постулируем гидродинамическую модель плазмы, имеющую в бездиссипативном случае в гауссовской системе единиц вид:

$$\begin{gathered}
\partial\rho_\pm/\partial t + \mathrm{div}\rho_\pm\mathbf{v}_\pm = 0,\\
\rho_\pm\left(\partial\mathbf{v}_\pm/\partial t + \mathbf{v}_\pm\cdot\nabla\mathbf{v}_\pm\right) + \nabla P_\pm = e_\pm n_\pm\left(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_\pm, \mathbf{H}]\right), \quad \rho_\pm = m_\pm n_\pm,\\
\partial S_\pm/\partial t + \mathbf{v}_\pm\cdot\nabla S_\pm = 0,\\
T_\pm dS_\pm = d\varepsilon_\pm + P_\pm d\left(1/\rho_\pm\right)\text{ (термодинамическое тождество)},\\
c^{-1}\partial\mathbf{H}/\partial t + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0\text{ (закон Фарадея)}, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0,\\
-c^{-1}\partial\mathbf{E}/\partial t + \mathrm{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}\text{ (закон Ампера)}, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\sigma,\\
\mathbf{j} = e_+ n_+\mathbf{v}_+ + e_- n_-\mathbf{v}_-, \quad \sigma = e_+ n_+ + e_- n_-.
\end{gathered} \tag{36}$$

Считается, что полностью ионизованная плазма образована двумя взаимопроникающими сжимаемыми жидкостями – электронной и ионной, параметры которых имеют привычный смысл и отмечены индексами “±”, в

частности, $m_\pm$, $e_\pm$ – массы и заряды электронов и ионов ($m_- = m_e = 9.1086\cdot 10^{-28}$ г, $e_- = -e$, $e = 4.80294\cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ). Предполагается, что термодинамики электронов и ионов не зависят друг от друга и от электромагнитного поля. Система (36) должна быть дополнена уравнениями состояния для электронов и ионов. Для наших целей удобно считать заданными функции $\varepsilon_\pm = \varepsilon_\pm(\rho_\pm, S_\pm)$. Тогда (см. §2) термодинамические тождества для электронов и ионов равносильны соотношениям $T_\pm = \partial\varepsilon_\pm / \partial S_\pm$, $P_\pm = \rho_\pm^2 \partial\varepsilon_\pm / \partial\rho_\pm$ и система уравнений (36) является определённой и замкнутой относительно неизвестных функций $\rho_\pm$, $S_\pm$, $\mathbf{v}_\pm$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$. (Напомним, что уравнения $\mathrm{div}\mathbf{H} = 0$, $\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\sigma$ являются ограничением только на начальные значения неизвестных функций.) Система (36), дополненная, если надо, диссипативными слагаемыми [12], часто рассматривается как теоретическая база при исследовании динамики плазмы. Однако, с одной стороны, система (36) не пригодна для исследования релятивистских процессов в плазме, поскольку гидродинамика и термодинамика в (36) нерелятивистские, так что в итоге система (36) не инвариантна ни относительно преобразований Лоренца, ни относительно преобразований Галилея, что физически недопустимо. Этот недостаток можно исправить, введя релятивистские поправки в гидродинамические и термодинамические слагаемые в (36) (см. [13]), и тогда приходим к системе уравнений релятивистской электромагнитной гидродинамики плазмы (РЭМГД), существенно более сложной, чем (36). С другой стороны, система (36) непригодна и для исследования низкочастотных, нерелятивистских процессов в плазме, ибо она учитывает ток смещения и разделение зарядов, роль которых в этом случае ничтожна. Поэтому при изучении низкочастотных, нерелятивистских процессов в плазме необходимо руководствоваться существенно более простой системой уравнений электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД), впервые предложенной в [1]:

$$\begin{gathered}
\partial\rho_\pm / \partial t + \mathrm{div}\rho_\pm \mathbf{v}_\pm = 0, \\
\rho_\pm\left(\partial\mathbf{v}_\pm / \partial t + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla\mathbf{v}_\pm\right) + \nabla P_\pm = e_\pm n_\pm\left(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_\pm, \mathbf{H}]\right), \quad \rho_\pm = m_\pm n_\pm, \\
\partial S_\pm / \partial t + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla S_\pm = 0, \quad P_\pm = \rho_\pm^2 \partial\varepsilon_\pm / \partial\rho_\pm, \\
c^{-1}\partial\mathbf{H} / \partial t + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \\
\mathrm{rot}\mathbf{H} = 4\pi c^{-1}(e_+ n_+ \mathbf{v}_+ + e_- n_- \mathbf{v}_-), \; e_+ n_+ + e_- n_- = 0 \text{ (условие квазинейтральности)},
\end{gathered} \tag{37}$$

где функции $\varepsilon_\pm = \varepsilon_\pm(\rho_\pm, S_\pm)$ заданы. В системе (37) “±”-уравнения неразрывности эквивалентны в силу остальных уравнений системы. Поэтому, если считать только независимые уравнения, то система (37) состоит из 8 уравнений относительно 8 неизвестных функций $\rho_\pm$, $S_\pm$, $\mathbf{v}_\pm$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, из которых эти функции, в принципе, могут быть найдены.

Наша цель – получить вариационный принцип для ЭМГД-уравнений (37). Попутно будет получен и вариационный принцип для системы (36). Первый шаг построения состоит в неформальных наводящих соображениях. Как известно [9], лагранжиан электромагнитного поля, локализованного в области D и порождаемого токами $\mathbf{j}$ и зарядами σ, даётся выражениями:

$$\int_D \left[(8\pi)^{-1}\left(E^2 - H^2\right) + c^{-1}\langle \mathbf{j}, \mathbf{A}\rangle - \sigma\varphi \right] dx,$$

где $\mathbf{A}$ и φ – векторные и скалярный потенциалы электромагнитного поля: $E = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\varphi$, $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$. Лагранжиан каждой – электронной и ионной – компоненты плазмы, заполняющей в каждый момент времени область D и не покидающей её с течением времени, как установлено в §2, даётся выражением:

$$\int_D \rho_\alpha \left(v_a^2/2 - \varepsilon_\alpha(\rho_\alpha, S_\alpha) \right) dx, \quad \alpha = \pm.$$

Естественно ожидать, что лагранжиан гидродинамической плазмы, динамика которой подчиняется системе (36), будет равен сумме перечисленных выше лагранжианов. С учётом соотношений

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad \sigma = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha, \quad \rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$$

получим следующее выражение для предполагаемого лагранжиана:

$$L = \int_D \left[\frac{1}{8\pi}\left(E^2 - H^2\right) + \sum_{\alpha=\pm} \left\{ e_\alpha n_\alpha \left[\frac{\langle \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{A}\rangle}{c} - \varphi \right] + m_\alpha n_\alpha \left[\frac{v_\alpha^2}{2} - \varepsilon_\alpha(\rho_\alpha, S_\alpha) \right] \right\} \right] dx, \tag{38}$$
$$\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\varphi, \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}.$$

Пусть D – стандартная область. Считается, что в каждый момент времени электронная и ионная жидкости по отдельности заполняют область D и не покидают её с течением времени. Тогда в области D возникают два комплекта лагранжевых координат $x = q_\alpha(t,a)$, $a \in D$, $\alpha = \pm$. Второй шаг в построении вариационного принципа – переход в каждый момент времени в интеграле (38) к лагранжевым координатам в слагаемых с индексом α, при этом используется комплект лагранжевых координат тоже с индексом α:

$$\begin{aligned} L = (8\pi)^{-1}\int_D \left[\left| c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t + \nabla\varphi \right|^2 - \left|\mathrm{rot}\mathbf{A}\right|^2 \right] dx + \\ + \sum_{\alpha=\pm}\int_D e_\alpha n_{\alpha 0}(a)\left[c^{-1}\left\langle \partial q_\alpha/\partial t, \mathbf{A}(t, q_\alpha(t,a)) \right\rangle - \varphi(t, q_\alpha(t,a)) \right] da + \\ + \sum_{\alpha=\pm}\int_D m_\alpha n_{\alpha 0}(a)\left[\left(\partial q_\alpha/\partial t\right)^2/2 - \varepsilon_\alpha\left(m_\alpha n_{\alpha 0}(a)/J_\alpha, S_{\alpha 0}(a)\right) \right] da \underset{\mathrm{def}}{=} \end{aligned} \tag{39}$$

$$\underset{\text{def}}{=} L\left(q_+, \partial q_+ / \partial t, q_-, \partial q_- / \partial t, \mathbf{A}, \partial \mathbf{A} / \partial t, \varphi\right),$$

где использованы полученные в §2 тождества $n_\alpha(t,a) = n_{\alpha 0}(a) / J_\alpha$, $S_\alpha(t,a) = S_{\alpha 0}(a)$, $J_a = \det[\partial q_\alpha^i / \partial a_j]$ и очевидные равенства $dx = J_\alpha da$. Здесь $n_{\alpha 0}(a) > 0$, $S_{\alpha 0}(a)$ – произвольные заданные непрерывные функции. Лагранжиан L, определяемый (39), задаёт отображение $L : (\mathrm{Diff}D \times E)^2 \times E^2 \times \hat{E} \to \mathbb{R}$, $E = C_n^1(\bar{D})$, $\hat{E} = C^1(\bar{D})$, $\mathrm{Diff}D \subseteq E$. Оказывается, что вариационный принцип для функционала действия

$$S[q_+, q_-, \mathbf{A}, \varphi] \underset{\text{def}}{=} \int_0^{T_0} L(q_+(t), q_+'(t), q_-(t), q_-'(t), \mathbf{A}(t), \mathbf{A}'(t), \varphi(t)) dt \to \text{locextr}, \quad (40)$$

$$q_\pm(0) = q_0^\pm,\ q_\pm(T_0) = q_1^\pm,\ \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0,\ \mathbf{A}(T_0) = \mathbf{A}_1,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi(T_0) = \varphi_1,$$

$$q_\pm \in C_E^1[0, T_0],\ q_\pm([0, T_0]) \subseteq \mathrm{Diff}D,\ \mathbf{A} \in C_E^1,\ \varphi \in C_{\hat{E}}^1$$

в задаче с закреплёнными концами, где L вычисляется по (39), приводит к системе (36). А к системе ЭМГД-уравнений (37) приводит вариационный принцип в задаче с закреплёнными концами (40) для укороченного функционала действия $S_{\text{ЭМГД}}$, вычисляемого по укороченному лагранжиану $L_{\text{ЭМГД}}$:

$$\begin{aligned}
&S_{\text{ЭМГД}}[q_+, q_-, \mathbf{A}, \varphi] \underset{\text{def}}{=} \int_0^{T_0} L_{\text{ЭМГД}}(q_+(t), q_+'(t), q_-(t), q_-'(t), \mathbf{A}(t), \varphi(t)) dt \to \text{locextr}, \\
&L_{\text{ЭМГД}}(q_+, \partial q_+ / \partial t, q_-, \partial q_- / \partial t, \mathbf{A}, \varphi) \underset{\text{def}}{=} -(8\pi)^{-1} \int_D |\mathrm{rot}\mathbf{A}|^2 dx + \\
&+ \sum_{\alpha=\pm} \int_D e_\alpha n_{\alpha 0}(a) \left[c^{-1} \left\langle \partial q_\alpha / \partial t, \mathbf{A}(t, q_\alpha(t,a)) \right\rangle - \varphi(t, q_\alpha(t,a)) \right] da + \\
&+ \sum_{\alpha=\pm} \int_D m_\alpha n_{\alpha 0}(a) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial t} \right)^2 - \varepsilon_\alpha \left(\frac{m_\alpha n_{\alpha 0}(a)}{J_\alpha}, S_{\alpha 0}(a) \right) \right] da,\ e_+ n_0^+(a) = e n_0^-(a).
\end{aligned} \quad (41)$$

Сначала будут выполнены все вычисления для функционала действия (40), приводящие к системе (36), а затем будут указаны изменения и упрощения в приведённых вычислениях, приводящие к ЭМГД-системе (37).

Функционал действия (40) определён на множестве $M(q_0^+, q_1^+) \times M(q_0^-, q_1^-) \times \Lambda(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) \times \Lambda(\varphi_0, \varphi_1)$ (см. обозначения в §2). Если точка $(\hat{q}_+, \hat{q}_-, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\varphi})$ из указанного множества доставляет locextr функционалу S, то, согласно **Теореме 2**, следующие первые вариации по Лагранжу равны нулю, если существуют:

$$\delta_{q_\pm} S\left(\hat{q}_+, \hat{q}_-, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\varphi}; h\right) = 0, \quad h \in C^1_{E_0}, \quad h(0) = h(T_0) = 0,$$
$$\delta_{\mathbf{A}} S\left(\hat{q}_+, \hat{q}_-, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\varphi}; h\right) = 0, \quad h \in C^1_{E}, \quad h(0) = h(T_0) = 0, \qquad (42)$$
$$\delta_{\varphi} S\left(\hat{q}_+, \hat{q}_-, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\varphi}; h\right) = 0, \quad h \in C^1_{\hat{E}}, \quad h(0) = h(T_0) = 0,$$

причём соотношения каждой строки равенств (42) должны быть выполнены для любых указанных h.

Чтобы доказать существование указанных выше первых вариаций по Лагранжу и вычислить их (что позволит из соотношений (42) получить необходимые условия locextr в задаче (40)), продолжим лагранжиан L и функционал действия S на открытые подмножества произведений соответствующих банаховых пространств. Для продолжения L представим этот лагранжиан в виде:

$$L(q_+, \dot{q}_+, q_-, \dot{q}_-, \mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, \varphi) = L_1(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, \varphi) + \sum_{\pm} L_0^{\pm}(q_\pm, \dot{q}_\pm, \mathbf{A}, \varphi) + \sum_{\pm} L_2^{\pm}(q_\pm, \dot{q}_\pm),$$
$$L_1 : E^2 \times \hat{E} \to \mathbb{R}, \quad L_1(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, \varphi) = (8\pi)^{-1} \int_D \left[\left| \dot{\mathbf{A}} / c + \nabla\varphi \right|^2 - \left| \mathrm{rot}\mathbf{A} \right|^2 \right] dx,$$
$$L_0^{\pm} : \mathrm{Diff}D \times E^2 \times \hat{E} \to \mathbb{R},$$
$$L_0^{\pm}(q_\pm, \dot{q}_\pm, \mathbf{A}, \varphi) = \int_D e_\pm n_0^{\pm}(a) \left[c^{-1} \left\langle \dot{q}_\pm(a), \mathbf{A}(q_\pm(a)) \right\rangle - \varphi(q_\pm(a)) \right] da, \qquad (43)$$
$$L_2^{\pm} : \mathrm{Diff}D \times E \to \mathbb{R}, \quad L_2^{\pm}(q_\pm, \dot{q}_\pm) = \int_D m_\pm n_0^{\pm}(a) \left[\frac{\dot{q}_\pm(a)^2}{2} - \varepsilon_\pm \left(\frac{m_\pm n_0^{\pm}(a)}{J_\pm}, S_0^{\pm}(a) \right) \right] da,$$
$$J_\pm(a) = \det \nabla q_\pm(a),$$

где точка над буквой в (43) – это не дифференцирование, а часть символа. Лагранжианы L_1, $L_2^{\pm}$ относятся к локальным полям. Лагранжиан $L_2^{\pm}$ продолжается той же самой формулой на открытое подмножество $\mathcal{U} \times E$ произведения $E \times E$, где $\mathcal{U} \underset{\mathrm{def}}{=} \{ f \in C_n^1(\bar{D}) \mid \det \nabla f(x) > 0$ для любого $x \in \bar{D} \} \subseteq E$, очевидно, открытое подмножество. Это продолжение обозначим $\tilde{L}_2^{\pm}$. Лагранжианы $L_0^{\pm}$ не являются локальными полями. Для их продолжения воспользуемся **Теоремой 1**, согласно которой существуют линейные непрерывные отображения $C_n^1(\bar{D}) \to C_n^1(\mathbb{R}^3)$, $f \mapsto \tilde{f}$ (с нормой $C > 0$) и $C^1(\bar{D}) \to C^1(\mathbb{R}^3)$, $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ (с нормой $\hat{C} > 0$), удовлетворяющие условию $\tilde{f}|_D = f$, $\tilde{\varphi}|_D = \varphi$ для любых $f \in C_n^1(\bar{D})$, $\varphi \in C^1(\bar{D})$. Выберем и зафиксируем указанные линейные непрерывные отображения и положим $\tilde{L}_0^{\pm} : E^3 \times \hat{E} \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{L}_0^{\pm}(q,p,\mathbf{A},\varphi) \underset{\text{def}}{=} \int_D e_{\pm} n_0^{\pm}(a)\left[c^{-1}\left\langle p(a),\tilde{\mathbf{A}}(q(a))\right\rangle - \tilde{\varphi}(q(a))\right]da.$$

Очевидно $\tilde{L}_0^{\pm}|_{\mathrm{Diff}D\times E^2\times\hat{E}} = L_0^{\pm}$, $\tilde{L}_2^{\pm}|_{\mathrm{Diff}D\times E} = L_2^{\pm}$. Поэтому L продолжается до лагранжиана $\tilde{L}:(\mathcal{U}\times E)^2\times E^2\times\hat{E}\to\mathbb{R}$ формулой

$$\tilde{L}(q_+,\dot{q}_+,q_-,\dot{q}_-,\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}},\varphi) \underset{\text{def}}{=} L_1(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}},\varphi) + \sum_{\pm}\tilde{L}_0^{\pm}(q_{\pm},\dot{q}_{\pm},\mathbf{A},\varphi) + \sum_{\pm}\tilde{L}_2^{\pm}(q_{\pm},\dot{q}_{\pm}), \quad (44)$$

а функционал действия S продолжается до функционала действия

$$\tilde{S}:\mathscr{U}\times\mathscr{U}\times C_E^1\times C_{\hat{E}}^1\to\mathbb{R},$$

где $\mathscr{U} \underset{\text{def}}{=} \{q\in C_E^1[0,T_0] \mid q(t)\in\mathcal{U}$ для любого $t\in[0,T_0]\}\subseteq C_E^1$ – открытое, формулой

$$\tilde{S}(q_+,q_-,\mathbf{A},\varphi) \underset{\text{def}}{=} \int_0^{T_0}\tilde{L}(q(t)_+,q'_+(t),q_-(t),q'_-(t),\mathbf{A}(t),\mathbf{A}'(t),\varphi(t))dt.$$

Основные дифференциальные свойства лагранжианов L_1, $\tilde{L}_0^{\pm}$, $\tilde{L}_2^{\pm}$ собраны в следующей теореме.

Теорема 4. 1) *Лагранжианы* $\tilde{L}_0^{\pm}(q,p,\mathbf{A},\varphi)$ *непрерывны по совокупности переменных, дифференцируемы* (*по Фреше*) *по каждому аргументу, частные производные* $\partial\tilde{L}_0^{\pm}/\partial q$, $\partial\tilde{L}_0^{\pm}/\partial p$, $\partial\tilde{L}_0^{\pm}/\partial\mathbf{A}$, $\partial\tilde{L}_0^{\pm}/\partial\varphi$ *непрерывны по совокупности переменных и задаются следующими формулами в произвольной точке* $((q(a),p(a),\mathbf{A}(a),\varphi(a))\in E^3\times\hat{E}$:

$$\frac{\partial\tilde{L}_0^{\pm}}{\partial q}h = \int_D e_{\pm}n_0^{\pm}(a)\left[\frac{1}{c}p^i(a)\frac{\partial\tilde{A}^i}{\partial x_j}(q(a)) - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_j}(q(a))\right]h^j(a)da, \quad h\in E,$$

$$\frac{\partial\tilde{L}_0^{\pm}}{\partial q}h = \int_D \frac{e_{\pm}n_0^{\pm}(a)}{c}\tilde{A}^i(q(a))h^i(a)da, \quad h\in E, \quad (45)$$

$$\frac{\partial\tilde{L}_0^{\pm}}{\partial\mathbf{A}}h = \int_D \frac{e_{\pm}n_0^{\pm}(a)}{c}p^i(a)\tilde{h}^i(q(a))da,\ h\in E,\ \frac{\partial\tilde{L}_0^{\pm}}{\partial\varphi}h = -\int_D e_{\pm}n_0^{\pm}(a)\tilde{h}(q(a))da,\ h\in\hat{E},$$

где, напомним, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

2) *Лагранжианы* $\tilde{L}_2^{\pm}(q,p)$ *непрерывны по совокупности переменных, дифференцируемы* (*по Фреше*) *по каждому аргументу, частные производные* $\partial\tilde{L}_2^{\pm}/\partial q$, $\partial\tilde{L}_2^{\pm}/\partial p$ *непрерывны по совокупности переменных и в каждой точке* $(\hat{q}(a),\hat{p}(a))\in\mathcal{U}\times E$ *вычисляются по формулам*

$$\frac{\partial \tilde{L}_2^{\pm}}{\partial q} h = \int_D \frac{\partial \hat{\mathscr{L}}_{\pm}}{\partial w_j^i} \frac{\partial h^i}{\partial a_j} da, \quad \frac{\partial \tilde{L}_2^{\pm}}{\partial p} h = \int_D \frac{\partial \hat{\mathscr{L}}_{\pm}}{\partial v^i} h^i da, \quad h \in E,$$

где $\mathscr{L}_{\pm}(a, v^i, w_j^i) = m_{\pm} n_0^{\pm}(a) \left[\frac{1}{2} v^2 - \varepsilon_{\pm} \left(\frac{m_{\pm} n_0^{\pm}(a)}{\det[w_j^i]}, S_0^{\pm}(a) \right) \right]$, *а домик на* $\mathscr{L}$ *указывает, что все частные производные этой функции вычисляются на векторе* $(a, \hat{q}(a), \hat{p}(a), \nabla \hat{q}(a))$, $\nabla \hat{q}(a) = \left[\partial \hat{q}^i(a) / \partial a_j \right]$.

3) *Лагранжиан* $L_1(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, \varphi)$ *непрерывен по совокупности переменных, дифференцируем* (*по Фреше*) *по каждому аргументу, частные производные* $\partial L_1 / \partial \mathbf{A}$, $\partial L_1 / \partial \dot{\mathbf{A}}$, $\partial L_1 / \partial \varphi$ *непрерывны по совокупности переменных и в каждой точке* $(\mathbf{A}(x), \dot{\mathbf{A}}(x), \varphi(x)) \in E^2 \times \hat{E}$ *вычисляются по формулам*

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{A}} h = \int_D \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_j^i} \frac{\partial h^i}{\partial x_j} dx, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\mathbf{A}}} h = \int_D \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} h^i dx, \ h \in E, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \varphi} h = \int_D \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_j^i} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx, \ h \in \hat{E},$$

где суммирование по i *под знаком интеграла идёт от* 1 *до* n=3,

$$\mathscr{L}\left(v^i, [w_j^i]_{\substack{0 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}} \right) = \frac{1}{8\pi} \left[\sum_{i=1}^{3} \left(v^i / c + w_i^0 \right)^2 - \left(w_1^3 - w_3^1 \right)^2 - \left(w_1^2 - w_2^1 \right)^2 - \left(w_2^3 - w_3^2 \right)^2 \right]$$

и частные производные $\mathscr{L}$ *вычисляются на векторе* $v^i = \dot{A}^i(x)$, $w_j^i = \partial A^i(x) / \partial x_j$, $1 \le i, j \le 3$, $w_j^0 = \partial \varphi(x) / \partial x_j$, $1 \le j \le 3$.

Из **Теоремы 4** следует, что продолженный лагранжиан $\tilde{L} : \mathcal{U}^2 \times E^4 \times \hat{E} \to \mathbb{R}$ непрерывен и непрерывно дифференцируем по совокупности переменных по каждому аргументу. Отсюда стандартными рассуждениями выводится факт непрерывной дифференцируемости всюду в области определения продолженного функционала действия $\tilde{S}$ и формула для его производной:

$$\tilde{S}'[\hat{q}_+, \hat{q}_-, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\varphi}](h_+, h_-, h, k) = \int_0^{T_0} \left[\sum_{\pm} \left(\frac{\partial \hat{\tilde{L}}}{\partial q_{\pm}} h_{\pm}(t) + \frac{\partial \hat{\tilde{L}}}{\partial \dot{q}_{\pm}} h'_{\pm}(t) \right) + \frac{\partial \hat{\tilde{L}}}{\partial \mathbf{A}} h(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \hat{\tilde{L}}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} h'(t) + \frac{\partial \hat{\tilde{L}}}{\partial \varphi} k(t) \right] dt, \quad h_{\pm}, h \in C_E^1, \quad k \in C_{\hat{E}}^1, \tag{46}$$

где домик над $\tilde{L}$ означает, что все частные производные вычисляются на векторе $(\hat{q}_+(t), \hat{q}'_+(t), q_-(t), q'_-(t), \hat{\mathbf{A}}(t), \hat{\mathbf{A}}'(t), \hat{\varphi}(t))$, а равенство (46) справедливо для любых указанных $h_{\pm}$, h, k. Из тождества (46), по тривиальным соображениям,

вытекает существование первых вариаций по Лагранжу (43), а их равенство нулю даёт, согласно (43), (46), соотношения:

$$\int_0^{T_0}\left[(\partial\hat{\tilde{L}}/\partial q_\pm)h(t)+(\partial\hat{\tilde{L}}/\partial\dot{q}_\pm)h'(t)\right]dt=0,\quad h\in C^1_{E_0},\quad h(0)=h(T_0)=0,$$

$$\int_0^{T_0}\left[(\partial\hat{\tilde{L}}/\partial\mathbf{A})h(t)+(\partial\hat{\tilde{L}}/\partial\dot{\mathbf{A}})h'(t)\right]dt=0,\quad h\in C^1_{E},\quad h(0)=h(T_0)=0,\qquad (47)$$

$$\int_0^{T_0}(\partial\hat{\tilde{L}}/\partial\varphi)h(t)dt=0,\quad h\in C^1_{\hat{E}},\quad h(0)=h(T_0)=0,$$

справедливые для всех указанных в (47) h. Из (47) и **Основной леммы** [9] вариационного исчисления для банаховых пространств следует $\partial\hat{\tilde{L}}/\partial\dot{q}_\pm\in C^1_{E_0^*}$, $\partial\hat{\tilde{L}}/\partial\dot{\mathbf{A}}\in C^1_{E^*}$ и справедливы равенства (уравнения Эйлера):

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\dot{q}_\pm}\right)+\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial q_\pm}=0,\quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\dot{\mathbf{A}}}\right)+\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\mathbf{A}}=0,\quad \frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\varphi}=0\ \text{ всюду на } [0,T_0].$$

Отсюда, наконец, вытекают тождества

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\dot{q}_\pm}h\right)+\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial q_\pm}h=0,\ h\in E_0,\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\dot{\mathbf{A}}}h\right)+\frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\mathbf{A}}h=0,\ h\in E,\ \frac{\partial\hat{\tilde{L}}}{\partial\varphi}k=0,\ k\in\hat{E},\ (48)$$

справедливые для любых $h\in E_0$, $h\in E$, $k\in\hat{E}$ и $t\in[0,T_0]$.

Тождества (48) – кульминационная точка каждого анализа. Подставляя в (48) формулы для частных производных из **Теоремы 4**, приходим, как сейчас будет показано, к системе (36). Для экстремальных функций $\hat{q}_\pm,\hat{A}\in C^1_E$, $\hat{\varphi}\in C^1_{\hat{E}}$, $\hat{q}_\pm(t)\in\mathrm{Diff}D$, $0\le t\le T_0$, обозначим

$$\hat{A}(t,x)=\hat{A}(t)(x),\quad \hat{\varphi}(t,x)=\hat{\varphi}(t)(x),\quad \hat{q}_\pm(t,a)=\hat{q}_\pm(t)(a),\quad t\in[0,T_0],\ x\in\bar{D},\ a\in\bar{D}.$$

Ниже считается, что $\hat{q}_\pm$, $\hat{A}$, $\hat{\varphi}$ удовлетворяют *стандартным условиям гладкости* (ср. [9]):

$$\hat{q}_\pm,\hat{A}\in C^2_E[0,T_0],\ \hat{q}_\pm([0,T_0])\subseteq C^2_n(\bar{D}),\ \hat{A}([0,T_0])\subseteq C^2_n(\bar{D}),\ \hat{\varphi}([0,T_0])\subseteq C^2_n(\bar{D}).\ (49)$$

При выполнении условий (49) (нетрудно проверить) все частные производные функций $\hat{A}(t,x)$, $\hat{q}_\pm(t,a)$ до второго порядка включительно существуют в $[0,T_0]\times D$, причём все они, кроме производных $\partial^2/(\partial x_i\partial x_j)$ (или $\partial^2/(\partial a_i\partial a_j)$),

непрерывны в $[0,T_0]\times D$ и непрерывно продолжаются на $[0,T_0]\times\bar{D}$, а указанные производные при любом фиксированном $t\in[0,T_0]$ непрерывны в D и непрерывно продолжаются на $\bar{D}$. Кроме того, первые частные производные функции $\hat{\varphi}(t,x)$ и смешанные вторые частные производные $\partial^2/(\partial t\partial x_i)$, $\partial^2/(\partial x_i\partial t)$ (очевидно равные между собой) существуют и непрерывны в $[0,T_0]\times D$ и непрерывно продолжаются на $[0,T_0]\times\bar{D}$, наконец, при любом фиксированном t существуют непрерывные в D производные $\partial^2\hat{\varphi}/(\partial x_i\partial x_j)$, непрерывно продолжаемые на $\bar{D}$.

Рассмотрим теперь первое равенство (48). Подставляя в него значения производных из **Теоремы 4**, получим:

$$-\frac{d}{dt}\int_D\left[\frac{e_\pm n_0^\pm(a)}{c}\hat{A}^i(t,x)+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}_\pm}{\partial v^i}\right]\Bigg|_{x=\hat{q}_\pm}h^i(a)da+ \tag{50}$$

$$+\int_D e_\pm n_0^\pm(a)\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\hat{A}^i(t,x)}{\partial x_j}\frac{\partial\hat{q}_\pm^i}{\partial t}-\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x_j}(t,x)\right]\Bigg|_{x=\hat{q}_\pm}h^j(a)da+\int_D\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}_\pm}{\partial w_j^i}\frac{\partial h^i}{\partial a_j}da=0,\quad h\in E_0.$$

Поскольку $\hat{q}_\pm(t)\in\mathrm{Diff}D$ при любом $t\in[0,T_0]$, то значения $\tilde{\hat{A}}^i$, $\tilde{\hat{\varphi}}$ и их производные в точках $x=\hat{q}_\pm(t,a)$, $a\in\bar{D}$ совпадают с соответствующими значениями $\hat{A}^i$, $\hat{\varphi}$ и их производных. Равенство (50) должно быть выполнено для любого $h\in E_0$. В §2 были получены в лагранжевых координатах соотношения:

$$\partial\mathscr{L}_\pm/\partial w_j^i=P_\pm A_{\pm,j}^i,\quad \partial\mathscr{L}_\pm/\partial v^i=m_+n_0^\pm\partial q_\pm^i/\partial t=m_\pm n_0^\pm v_\pm^i,$$

где $A_{\pm,j}^i$ – алгебраическое дополнение элемента $\partial q_\pm^i/\partial a_j$ в матрице Якоби $[\partial q_\pm^s/\partial a_k]$. Из стандартного условия гладкости (49) следует, во-первых, правомерность применения формулы Остроградского-Гаусса при преобразовании последнего интеграла в левой части равенства (50):

$$\int_D\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}_\pm}{\partial w_j^i}\frac{\partial h^i}{\partial a_j}da=\int_D\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}_\pm}{\partial w_j^i}\ell^jh^id\sigma-\int_D\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}_\pm}{\partial w_j^i}\right)h^ida=$$

$$=-\int_D\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\hat{P}_\pm\hat{A}_{\pm,j}^i\right)h^ida=-\int_D\frac{\partial\hat{P}_\pm}{\partial a_j}\hat{A}_{\pm,j}^ih^ida,$$

где $\ell=(\ell^1,\ldots,\ell^n)$ – единичная внешняя нормаль к D в точках границы ∂D, $d\sigma$ – элемент риманова объёма на ∂D и использованы равенство $h|_{\partial D}=0$ и результат **Леммы 2.**2). Во-вторых, из стандартных условий гладкости (49)

вытекает законность внесения производной d/dt под знак первого интеграла в (50) (ср. [9]). После элементарных преобразований и группировки слагаемых получим

$$\int_D \left\{ e_\pm n_0^\pm(a) \left[-\frac{1}{c}\frac{\partial \hat{A}^i}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \hat{A}^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \hat{A}^j}{\partial x_i} \right) v_\pm^j \right] \Bigg|_{x=\hat{q}_\pm} - \frac{\partial \hat{P}_\pm}{\partial a_j} \hat{A}^i_{\pm,j} - m_\pm n_0^\pm(a) \frac{\partial \hat{v}_\pm^i}{\partial t} \right\} \cdot$$

$$\cdot h^i(a) da = 0.$$

Последнее равенство выполнено для любого $h \in E_0$. Поэтому, по лемме Лагранжа для многомерной области [9], отсюда следует, что все фигурные скобки в последнем интеграле обращаются в нуль. Приравнивая указанные фигурные скобки нулю, получим, с учётом тождеств $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial \mathbf{A}/\partial t - \nabla\varphi$, $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\left(\partial \hat{A}^i / \partial x_j - \partial \hat{A}^j / \partial x_i\right) v^j = [\mathbf{v}, \mathrm{rot}\mathbf{A}]^i$, $\left(\partial P_\pm / \partial a_j\right) A^i_{\pm,j} = J_\pm \partial P_\pm / \partial x_i$ (см. §2), векторное равенство:

$$e_\pm n_0^\pm(a) \left(\hat{\mathbf{E}} + c^{-1}[\hat{\mathbf{v}}_\pm, \hat{\mathbf{H}}] \right) \Big|_{x=\hat{q}_\pm} - \hat{J}_\pm \nabla \hat{P}_\pm - m_\pm n_0^\pm(a) \partial \hat{\mathbf{v}}_\pm / \partial t = 0.$$

Переходя в последнем соотношении к эйлеровым координатам и используя при этом тождества $\partial \mathbf{v}_\pm(t,a)/\partial t = \partial \mathbf{v}_\pm(t,x)/\partial t + \mathbf{v}_\pm(t,x) \cdot \nabla \mathbf{v}_\pm(t,x)$, $n_0^\pm(a)/J_\pm = n_\pm(t,a) = n_\pm(t, q_\pm(t,a)) = n_\pm(t,x)|_{x=q_\pm}$, окончательно получим в эйлеровых координатах уравнение импульсов системы (36):

$$\rho_\pm \left(\partial \mathbf{v}_\pm / \partial t + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla \mathbf{v}_\pm \right) + \nabla P_\pm = e_\pm n_\pm \left(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_\pm, \mathbf{H}] \right).$$

Рассмотрим второе равенство (48). Подстановка в него выражений для производных из **Теоремы 4** даёт:

$$-\frac{d}{dt}\int_D \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} h^i dx + \int_D \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w^i_j} \frac{\partial h^i}{\partial x_j} dx + \sum_\pm \int_D \frac{e_\pm n_0^\pm(a)}{c} \frac{\partial \hat{q}^i_\pm}{\partial t} h^i(\hat{q}_\pm(t,a)) da = 0. \qquad (51)$$

(Поскольку $\hat{q}_\pm(t) \in \mathrm{Diff}D$, $0 \le t \le T_0$, то значение $\tilde{h}(q_\pm(t,a))$ совпадает со значением $h(\hat{q}_\pm(t,a))$ для всех $t \in [0, T_0]$, $a \in \bar{D}$.) Прямое вычисление для плотности лагранжиана $\mathscr{L}$ приводит к формулам [9]:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = -\frac{E^i}{4\pi c}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w^i_j} \right) = \frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}\mathbf{H})^i, \qquad (52)$$

$$(\partial \mathscr{L} / \partial w^i_j) \ell^j h^i = \langle [\ell, \mathbf{H}], h \rangle,$$

причём второе равенство использует условие гладкости (49). Из условия гладкости (49) также следует, во-первых, законность дифференцирования по t под знаком первого интеграла в (51). И, во-вторых, правомерность использования формулы Остроградского-Гаусса при преобразовании второго интеграла в (51). С учётом соотношений (52) равенство (51) преобразуется к виду

$$\int_D \left[(4\pi c)^{-1} \partial E^i / \partial t - (4\pi)^{-1} (\mathrm{rot}\mathbf{H})^i \right] h^i(x) dx + \sum_{\pm} \int_D c^{-1} e_{\pm} n_0^{\pm}(a) \hat{v}_{\pm}^i h^i(\hat{q}_{\pm}(t,a)) da + \\ + \int_{\partial D} \langle [\ell, \mathbf{H}], h \rangle d\sigma = 0, \tag{53}$$

где ℓ – внешняя единичная нормаль к D в точках границы ∂D. Делая замену переменных $x = \hat{q}_{\pm}(t,a)$ и возвращаясь к эйлеровым переменным в каждом из двух интегралов, входящих в сумму $\sum_{\pm}$ в (53), получим с учётом соотношений $da = dx / J_{\pm}$, $n_0^{\pm}(a) / J_{\pm} = n_{\pm}(t, \hat{q}_{\pm}(t,a))$, $\mathbf{j} = \sum_{\pm} e_{\pm} n_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}$ окончательное выражение

$$\int_D \left\langle (4\pi c)^{-1} \partial \mathbf{E} / \partial t - (4\pi)^{-1} \mathrm{rot}\mathbf{H} + c^{-1} \mathbf{j}, h \right\rangle dx + \int_{\partial D} \langle [\ell, \mathbf{H}], h \rangle d\sigma = 0. \tag{54}$$

Равенство (54) выполнено для любого $t \in [0, T_0]$ и любого $h \in E$. В частности, оно выполнено для любого $h \in E_0$, но для таких h второй интеграл в (54) обращается в нуль, а из равенства нулю первого интеграла в (54) для любого $h \in E_0$, по лемме Лагранжа для многомерной области [9] вытекает закон Ампера из уравнений электродинамики Максвелла

$$(4\pi c)^{-1} \partial \mathbf{E} / \partial t - (4\pi)^{-1} \mathrm{rot}\mathbf{H} + c^{-1} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_+ + e_- n_- \mathbf{v}_-. \tag{55}$$

С учётом последнего соотношения равенство нулю интеграла по ∂D для любого $h \in E$ даёт по лемме Лагранжа для многообразий [9] равенство $[\ell, \mathbf{H}] = 0$ и, значит, на границе ∂D вектор $\mathbf{H}$ ортогонален границе ∂D.

Наконец, рассмотрим третье уравнение (48). Подставляя в него выражения для производных из **Теоремы 4**, получим

$$\int_D \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_j^0} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx + \sum_{\pm} \int_D e_{\pm} n_0^{\pm}(a) h(\hat{q}_{\pm}(t,a)) da = 0. \tag{56}$$

Прямое вычисление показывает [9] $\partial \mathscr{L} / \partial w_j^0 = -(4\pi)^{-1} E^j$. При выполнении условий гладкости (49), дословно повторяя рассуждения, относящиеся выше ко второму равенству (48), с учётом $\sigma = \sum_{\pm} e_{\pm} n_{\pm}$, сведём (56) к уравнению

$$\int_D \left((4\pi)^{-1}\mathrm{div}\mathbf{E}-\sigma\right)hdx-\int_{\partial D}(4\pi)^{-1}\langle\mathbf{E},\ell\rangle hd\sigma=0. \qquad (57)$$

Равенство (57) верно для любого $h\in\hat{E}$ и $t\in[0,T_0]$. В частности, оно верно для любого $h\in\hat{E}_0$, для которого $h|_{\partial D}=0$. Но для таких h второй интеграл в (57) обращается в нуль, а равенство нулю первого интеграла для любого $h\in\hat{E}_0$ приводит, в силу леммы Лагранжа для многомерных областей [9], к тождеству:

$$(4\pi)^{-1}\mathrm{div}\mathbf{E}-\sigma=0,\quad \sigma=e_+n_++e_-n_-. \qquad (58)$$

С учётом доказанного равенства (58) обращение в нуль интеграла по границе ∂D в (57) для любого $h\in\hat{E}$, по лемме Лагранжа для многообразий [9], приводит к равенству $\langle\mathbf{E},\ell\rangle=0$, и, значит, электрическое поле $\mathbf{E}$ на границе ∂D касается последней.

Итак, согласно (55), (58) справедлива первая пара уравнений Максвелла в (36). Справедливость второй пары уравнений Максвелла следует из явных выражений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, $\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E}=-c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t-\nabla\varphi$.

Подведём итог.

Если $(\hat{q}_+,\hat{q}_-,\hat{\mathbf{A}},\hat{\varphi})\in M_*=M(q_0^+,q_1^+)\times M(q_0^-,q_1^-)\times\Lambda(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1)\times\Lambda(\varphi_0,\varphi_1)$ – *locextr функционала действия* S, *задаваемого формулами* (39), (40) *на множестве* M_*, *причём* $\hat{q}_\pm$, $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\varphi}$ *удовлетворяют стандартным условиям гладкости* (49), *то функции, заданные в лагранжевых координатах формулами* $\hat{\mathbf{v}}_\pm=\partial\hat{q}_\pm/\partial t$, $\hat{\rho}_\pm=m_\pm n_\pm^0(a)/\hat{J}_\pm$, $\hat{S}_\pm=S_0^\pm(a)$, $\hat{J}_\pm=\det[\partial\hat{q}_\pm^i/\partial a_j]$, *в эйлеровых координатах* $x=\hat{q}_\pm(t,a)$ *вместе с функциями* $\mathbf{H}=\mathrm{rot}\hat{\mathbf{A}}$, $\mathbf{E}=-c^{-1}\partial\hat{\mathbf{A}}/\partial t-\nabla\hat{\varphi}$, *задающими электромагнитное поле, дают решение системы* (36) *в области* D *с естественными условиями на границе* ∂D: $\mathbf{H}\perp\partial D$, $\mathbf{E}\perp\ell$, *где* ℓ – *внешняя единичная нормаль к* D *в точках* ∂D, *наконец,* $n_0^\pm(a)>0$, $S_0^\pm(a)$ – *произвольные непрерывные в* $\bar{D}$ *функции.*

Вывод системы (37) ЭМГД-уравнений для задачи с закреплёнными концами с функционалом действия $S_{\text{ЭМГД}}$, задаваемого формулой (41), проходит по упрощённой схеме рассуждений, приведённых выше для вывода системы (36). Лагранжиан $L_{\text{ЭМГД}}$ равен $L_{\text{ЭМГД}}=L_1^*+\sum_\pm L_0^\pm+\sum_\pm L_2^\pm$, $L_1^*:E\to\mathbb{R}$ – укороченный лагранжиан:

$$L_1^*(\mathbf{A})\underset{\text{def}}{=}-(8\pi)^{-1}\int_D\left|\mathrm{rot}\mathbf{A}\right|^2dx,$$

а $L_0^{\pm}$, $L_2^{\pm}$ вычисляются по старым формулам (43). Поэтому продолжения $L_{\text{ЭМГД}}$, $S_{\text{ЭМГД}}$ определяются очевидными формулами $\tilde{L}_{\text{ЭМГД}} \underset{\text{def}}{=} L_1^* + \sum_{\pm} \tilde{L}_0^{\pm} + \sum_{\pm} \tilde{L}_2^{\pm}$, $\tilde{L}_{\text{ЭМГД}} : (\mathcal{U} \times E)^2 \times E \times \hat{E} \to \mathbb{R}$, а $\tilde{S}_{\text{ЭМГД}} : \mathscr{U} \times \mathscr{U} \times C_E^1 \times C_{\hat{E}}^1 \to \mathbb{R}$ равно

$$\tilde{S}_{\text{ЭМГД}}[q_+, q_-, \mathbf{A}, \varphi] \underset{\text{def}}{=} \int_0^{T_0} \tilde{L}_{\text{ЭМГД}}(q_+(t), q_+'(t), q_-(t), q_-'(t), \mathbf{A}(t), \varphi(t))dt.$$

В **Теореме 4** меняется только третья часть, относящаяся к укороченному лагранжиану $L_1^*(\mathbf{A})$, задающему локальное поле с плотностью $\mathscr{L} = \mathscr{L}([w_j^i]_{1 \le i,j \le 3}) = -(8\pi)^{-1}[(w_1^3 - w_3^1)^2 + (w_1^2 - w_2^1)^2 + (w_2^3 - w_3^2)^2]$, в частности, $\partial L_1^* / \partial \dot{\mathbf{A}} = 0$, $\partial L_1^* / \partial \varphi = 0$. Поэтому ключевые равенства (48) упрощаются и переходят в такие:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{\tilde{L}}_{\text{ЭМГД}}}{\partial \dot{q}_{\pm}} h\right) + \frac{\partial \hat{\tilde{L}}_{\text{ЭМГД}}}{\partial q_{\pm}} h = 0, h \in E_0, \ \frac{\partial \hat{\tilde{L}}_{\text{ЭМГД}}}{\partial \mathbf{A}} h = 0, h \in E, \ \frac{\partial \hat{\tilde{L}}_{\text{ЭМГД}}}{\partial \varphi} k = 0, k \in \hat{E}. \quad (59)$$

Как следствие, упрощаются стандартные условия гладкости (49):

$$\hat{q}_{\pm} \in C_E^2[0, T_0], \quad \hat{q}_{\pm}([0, T_0]) \subseteq C_n^2(\bar{D}), \quad \mathbf{A}([0, T_0]) \subseteq C_n^2(\bar{D}). \qquad (60)$$

Первое из равенств (59) совпадает с первым равенством (48) и приводит к уравнениям импульсов в системе (37). Второе уравнение (59) сводится к более простому, чем ранее, равенству

$$\int_D \left\langle -(4\pi)^{-1} \operatorname{rot}\mathbf{H} + c^{-1}\mathbf{j}, h \right\rangle dx + \int_D \left\langle [\ell, \mathbf{H}], h \right\rangle d\sigma = 0, \quad h \in E, \ t \in [0, T_0],$$

откуда вытекает закон Ампера в (37) $-(4\pi)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} + c^{-1}\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_{\pm} + e_- n_- \mathbf{v}_-$ с естественным граничным условием $[\ell, \mathbf{H}]|_{\partial D} = 0$. Третье уравнение (59) тоже редуцируется к более простому равенству:

$$\int_D \sigma h dx + \int_{\partial D} (4\pi)^{-1} \left\langle \mathbf{E}, \ell \right\rangle h d\sigma = 0, \quad h \in \hat{E}, \ t \in [0, T_0],$$

откуда следует условие квазинейтральности $\sigma = e_+ n_+ + e_- n_- = 0$ и естественное граничное условие $\left\langle \mathbf{E}, \ell \right\rangle|_{\partial D} = 0$. Вторая пара уравнений Максвелла, как и выше, получается из явных выражений напряжённостей электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через векторный и скалярный потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Из условий квазинейтральности, в частности, следует $e_+ n_0^+(a) \equiv e n_0^-(a)$, $a \in \bar{D}$.

В итоге приходим к следующему результату. *Если* $(\hat{q}_+, \hat{q}_-, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\varphi}) \in M_*$ – *locextr функционала действия* $S_{\text{ЭМГД}}$, *определяемого формулой* (41), *на множестве* M_*, *причём* $\hat{q}_\pm$, $\hat{\mathbf{A}}$ *удовлетворяют стандартным условиям гладкости* (60), *то функции, заданные в лагранжевых координатах формулами* $\hat{\mathbf{v}} = \partial \hat{q}_\pm / \partial t$, $\hat{\rho}_\pm = m_\pm n_0^\pm(a) / \hat{J}_\pm$, $\hat{S}_\pm = S_0^\pm(a)$, $\hat{J}_\pm = \det[\partial \hat{q}_\pm^i / \partial a_j]$, *в эйлеровых координатах* $x = q_\pm(t,a)$ *вместе с функциями* $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\hat{\mathbf{A}}$, $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\hat{\mathbf{A}} / \partial t - \nabla\hat{\varphi}$ *дают решение системы* (37) *в области* D *с естественными условиями на границе* ∂D: $\mathbf{H} \perp \partial D$, $\mathbf{E} \perp \ell$, *где* ℓ *– единичная внешняя нормаль к* D *в точках* ∂D, *наконец,* $n_0^\pm(a) > 0$, $S_0^\pm(a)$ *– произвольные непрерывные в* $\bar{D}$ *функции, удовлетворяющие условию* $e_+ n_0^+(a) \equiv e n_0^-(a)$ $(e_- = e)$.

Доказательство Теоремы 4. Утверждения 2) и 3) следуют из свойств локальных полей и были доказаны в [9]. Дадим набросок доказательства утверждения 1). Пусть

$$L(q,p,A,\varphi) \underset{\text{def}}{=} \int_D n_0(a)\Big[\big\langle p(a), \tilde{A}(q(a))\big\rangle - \tilde{\varphi}(q(a))\Big]da : E^3 \times \hat{E} \to \mathbb{R},$$

где $n(a) > 0$ – непрерывная в $\bar{D}$ функция. Проверим непрерывность L в произвольной точке $(q_0, p_0, A_0, \varphi_0) \in E^3 \times \hat{E}$, используя вспомогательное утверждение: *если* $f \in C_m^k(\mathbb{R}^n)$, *то* f *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}^n$. Имеем оценки:

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{\varphi}(q(a)) - \tilde{\varphi}_0(q_0(a))\right| \le \left|\tilde{\varphi}(q(a)) - \tilde{\varphi}_0(q(a))\right| + \left|\tilde{\varphi}_0(q(a)) - \tilde{\varphi}_0(q_0(a))\right| \le \\
&\le \left\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0\right\| + \left|\tilde{\varphi}_0(q(a)) - \tilde{\varphi}_0(q_0(a))\right| \le \hat{C}\left\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0\right\| + \left|\tilde{\varphi}_0(q(a)) - \tilde{\varphi}_0(q_0(a))\right|,
\end{aligned}$$

и аналогичная оценка для A:

$$\left\|\tilde{A}(q(a)) - \tilde{A}_0(q_0(a))\right\|_\infty \le C\left\|A - A_0\right\| + \left\|\tilde{A}_0(q(a)) - \tilde{A}_0(q_0(a))\right\|_\infty.$$

Далее, из **Теоремы 1** и неравенства Коши следует:

$$\begin{aligned}
&\left|\big\langle p(a), \tilde{A}(q(a))\big\rangle - \big\langle p_0(a), \tilde{A}_0(q_0(a))\big\rangle\right| \le \left|\big\langle p(a) - p_0(a), \tilde{A}(q(a)) - \tilde{A}_0(q_0(a))\big\rangle\right| + \\
&+\left|\big\langle p(a) - p_0(a), \tilde{A}_0(q_0(a))\big\rangle\right| + \left|\big\langle p_0(a), \tilde{A}(q(a)) - \tilde{A}_0(q_0(a))\big\rangle\right| \le n\left\|p - p_0\right\| \cdot \\
&\cdot\left\|\tilde{A}(q(a)) - \tilde{A}_0(q_0(a))\right\|_\infty + n\left\|p - p_0\right\|\left\|\tilde{A}_0\right\| + n\left\|p_0\right\|\left\|\tilde{A}(q(a)) - \tilde{A}_0(q_0(a))\right\|_\infty \le \\
&\le \left(C\left\|A - A_0\right\| + \left\|\tilde{A}_0(q(a)) - \tilde{A}_0(q_0(a))\right\|_\infty\right) n\left\|p - p_0\right\|\left(1 + C\left\|A_0\right\| + \left\|p_0\right\|\right).
\end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{\varphi}_0$, $\tilde{A}_0$ – финитные функции, то, по вспомогательному утверждению, они равномерно непрерывны на $\mathbb{R}^n$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

найдётся $\delta > 0$, для которого: $\|x - x'\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |\tilde{\varphi}_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x')| < \varepsilon / 2$, $\left\|\tilde{A}_0(x) - \tilde{A}_0(x')\right\|_\infty < \varepsilon / 2$. Пусть теперь $\|q - q_0\| < \delta$, $\|p - p_0\| < \varepsilon$, $\|A - A_0\| < \varepsilon / (2C)$, $\|\varphi - \varphi_0\| < \varepsilon / (2\hat{C})$. Тогда из полученных оценок следуют неравенства

$$|\tilde{\varphi}(q(a)) - \tilde{\varphi}_0(q_0(a))| < \varepsilon,$$

$$\left|\left\langle p(a), \tilde{A}(q(a))\right\rangle - \left\langle p_0(a), \tilde{A}_0(q_0(a))\right\rangle\right| < n\varepsilon\left(1 + C\|A_0\| + \|p_0\|\right)$$

для всех $a \in \bar{D}$. Отсюда и из определения L автоматически следует непрерывность этой функции в точке $(q_0, p_0, A_0, \varphi_0)$.

Легко вычисляются первые вариации по Лагранжу функционала L в точке $(pt.) = (q, p, A, \varphi) \in E^3 \times \hat{E}$ вдоль направлений h и k:

$$\delta_q L(pt.;h) = \int_D n_0(a)\left[p^i(a)\frac{\partial \tilde{A}^i}{\partial x_j}(q(a)) - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j}(q(a))\right]h^j(a)da,$$

$$\delta_\varphi L(pt.;k) = -\int_D n_0(a)\tilde{k}(q(a))da, \quad \delta_p L(pt.;h) = \int_D n_0(a)\tilde{A}^i(q(a))h^i(a)da, \quad (61)$$

$$\delta_A L(pt.;h) = \int_D n_0(a)p^i(a)\tilde{h}^i(q(a))da, \quad h \in E, \ k \in \hat{E}.$$

Очевидно, что все первые производные по Лагранжу (61) – линейные и непрерывные по h и k функционалы. Поэтому в каждой точке $E^3 \times \hat{E}$ существуют частные производные по Гато, совпадающие с соответствующими первыми вариациями по Лагранжу: $\left(\partial L / \partial q\right)_\Gamma h = \delta_q L(pt.;h)$, $\left(\partial L / \partial \varphi\right)_\Gamma k = \delta_\varphi L(pt.;k)$ и т.д. Для доказательства существования частных производных по Фреше достаточно убедиться в непрерывности (по совокупности переменных) частных производных по Гато. Отсюда, кроме того, будут вытекать равенства $\partial L / \partial q = (\partial L / \partial q)_\Gamma$, $\partial L / \partial \varphi = (\partial L / \partial \varphi)_\Gamma$ и т.д. и, значит, непрерывность частных производных L по совокупности аргументов. Для $(\partial L / \partial \varphi)_\Gamma$, $(\partial L / \partial A)_\Gamma$ факт непрерывности следует из формул (61) и следующих оценок, где используются результат **Леммы 1**:

$$\left|\tilde{k}(q(a)) - \tilde{k}(q_0(a))\right| \le n\left\|\tilde{k}\right\|\|q(a) - q_0(a)\|_\infty \le n\hat{C}\|k\|\|q - q_0\|, \quad k \in \hat{E},$$

$$\left|\tilde{h}(q(a)) - \tilde{h}(q_0(a))\right|_\infty \le n\left\|\tilde{h}\right\|\|q(a) - q_0(a)\|_\infty \le n\hat{C}\|h\|\|q - q_0\|, \quad h \in E.$$

Поэтому для $\|k\| \le 1$, $\|h\| \le 1$ получим неравенства:

$$\left|\left(\left(\partial L / \partial \varphi\right)_\Gamma(\ldots) - \left(\partial L / \partial \varphi\right)_\Gamma(\ldots)_0\right)k\right| \le \int_D n_0(a)\left|\tilde{k}(q(a)) - \tilde{k}(q_0(a))\right|da \le$$

$$\le n\hat{C}\|k\|\|q-q_0\|\int_D n_0(a)da \le C_1\|q-q_0\|, \quad \left|\left((\partial L/\partial A)_\Gamma(\ldots)-(\partial L/\partial A)_\Gamma(\ldots)_0\right)h\right| \le$$

$$\le \int_D n_0(a)\left[\left|p^i(a)-p_0^i(a)\right|\left|\tilde{h}^i(q(a))\right|+\left|p_0^i(a)\right|\left|\tilde{h}^i(q(a))-\tilde{h}^i(q_0(a))\right|\right]da \le \qquad (62)$$

$$\le \left(n\|p-p_0\|C\|h\|+\|p_0\|n^2C\|h\|\|q-q_0\|\right)\int_D n_0(a)da \le C_2\|p-p_0\|+C_3\|q-q_0\|,$$

где константы C_1, C_2, C_3 не зависят от k и h и $(\ldots)=(q,p,A,\varphi)$, $(\ldots)_0=(q_0,p_0,A_0,\varphi_0)$:

$$C_1=n\hat{C}_1\int_D n_0(a)da, \quad C_2=nC\int_D n_0(a)da, \quad C_3=n^2C\|p_0\|\int_D n_0(a)da.$$

Переходя к sup по $\|k\|\le 1$, $\|h\|\le 1$ в левых частях неравенств (62), получим оценки:

$$\left|(\partial L/\partial\varphi)_\Gamma(\ldots)-(\partial L/\partial\varphi)_\Gamma(\ldots)_0\right| \le C_1\|q-q_0\|,$$

$$\left|(\partial L/\partial A)_\Gamma(\ldots)-(\partial L/\partial A)_\Gamma(\ldots)_0\right| \le C_2\|p-p_0\|+C_3\|q-q_0\|,$$

откуда следует непрерывность $(\partial L/\partial\varphi)_\Gamma$, $(\partial L/\partial A)_\Gamma$ по совокупности переменных.

Для $(\partial L/\partial q)_\Gamma$, $(\partial L/\partial p)_\Gamma$ непрерывность проверяется ещё проще, поскольку коэффициенты при $h^i(a)$ в подынтегральных выражениях в (61) для этих производных суть непрерывные на $\bar{D}$ функции, непрерывно зависящие от точки $E^3\times\hat{E}$, что проверяется дословным повторением рассуждений первой части доказательства при установлении непрерывности функции L.

Наконец, докажем вспомогательное утверждение. Пусть $f:\mathbb{R}^n\to B$ – непрерывное финитное отображение в нормированное пространство B. Установим равномерную непрерывность f. Если $f\equiv 0$, это очевидно. Пусть $f\ne 0$ и $P=\mathrm{supp}f$ – носитель f, тогда $P\subseteq\mathbb{R}^n$ – непустой компакт. Выберем произвольно открытое множество $\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ с компактным замыканием и содержащее P. Тогда $\delta_0=\rho(P,\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{U})>0$, т.к. P – компакт. Пусть $\varepsilon>0$. Поскольку f непрерывно на компакте $\bar{\mathrm{U}}$, то по теореме Кантора, f равномерно непрерывно на $\bar{\mathrm{U}}$, и, значит, найдётся $\delta>0$: $x,x'\in\bar{\mathrm{U}}$, $\|x-x'\|_\infty<\delta$ $\Rightarrow$ $\|f(x)-f(x')\|<\varepsilon$. Тогда легко проверить, что для любых $x,\dot{x}'\in\mathbb{R}^n$ из $\|x-x'\|_\infty<\min\{\delta,\delta_0\}$ вытекает $\|f(x)-f(x')\|<\varepsilon$, что доказывает равномерную непрерывность f на $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. #

Заключение. Выше был построен вариационный принцип для системы уравнений (37), составляющей содержание ЭМГД-теории плазмы. Отметим

нерешённую задачу о нахождении вариационного принципа для ЭМГД-уравнений в одножидкостной форме [2], которая получается, если в системе (37) сделать замену неизвестных $\{\mathbf{v}_{\pm},\rho_{\pm}\}\to\{\mathbf{U},\rho\}$, $\rho=\rho_{+}+\rho_{-}$, $\mathbf{U}=(\rho_{+}\mathbf{v}_{+}+\rho_{-}\mathbf{v}_{-})/\rho$. Неудачная, на наш взгляд, попытка была предпринята в [14]. Основная проблема при этом в выборе лагранжевых координат. Отметим математический смысл этого понятия применительно к нашей ситуации. Пусть $\mathbf{v}(t,x)$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\bar{D}$ – непрерывно дифференцируемое векторное поле на компакте $\bar{D}$, касающееся границе ∂D в каждой её точке. Для $x\in\bar{D}$, $s\in\mathbb{R}$ пусть $\gamma_{s,x}(t)$ – непродолжаемая интегральная кривая поля $\mathbf{v}$ с начальным условием $\gamma_{s,x}(s)=x$. Из компактности $\bar{D}$ и теоремы существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения следует, что $\gamma_{s,x}$ определена на всей прямой и значит определён поток $\Phi_s^t(x)$, $s,t\in\mathbb{R}$, $x\in\bar{D}$ поля $\mathbf{v}$, $\Phi_s^t(x)\underset{\text{def}}{=}\gamma_{s,x}(t)$, обладающий групповым свойством: $\Phi_t^{\tau}\circ\Phi_s^t=\Phi_s^{\tau}$ для любых $\tau,t,s\in\mathbb{R}$ и $\Phi_t^t(x)=x$ для всех $t\in\mathbb{R}$, $x\in\bar{D}$. В частности, $\Phi_s^t\in\mathrm{Diff}D$ для любых $t,s\in\mathbb{R}$. *Лагранжевой координатой поля* $\mathbf{v}$ называется отображение $q(t,a)\underset{\text{def}}{=}\Phi_0^t(a)$, $a\in\bar{D}$. Тогда, очевидно, $\mathbf{v}(t,q(t,a))=\partial q/\partial t$, а $x=q(t,a)$ называется *эйлеровой координатой*. Гидродинамическая интерпретация этих понятий очевидна.

Список литературы

1. Гавриков М.Б. Линейные волны в нерелятивистской магнитной гидродинамике // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 190. 1988. 28 с.
2. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. – М.: КРАСАНД, 2018. – 584 с.
3. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 203 с.
4. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. – М.: Издательство МЦНМО, 2007. – 392 с.
5. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. – М.: Мир, 1968. –131 с.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
7. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969.
8. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975.
9. Гавриков М.Б. Вариационный принцип для локальных полей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 14. 39 с.
10. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М.: ИЛ, 1952. 291 с.

11. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
12. Брагинский С.И. Явление переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183–272.
13. Соловьёв Л.С. К релятивистской гидродинамике / Собрание трудов в двух томах. Т. II. М.: Наука, 2001. 414 с.
14. I. Keramidas Charidakos, M. Lingman, P.J. Morrison, R.L. White, and A. Wurm Action principles for extended magnetohydrodynamic models // AIP. Physics of Plasmas. 21. 092118 (2014); doi: 10.1063/1.4896336.

Оглавление

Введение 3
§1. Множество диффеоморфизмов 7
§2. Вариационный принцип для бездиссипативной газовой динамики 18
§3. Вариационный принцип для классической МГД 26
§4. Вариационный принцип для электромагнитной гидродинамики плазмы 31
Список литературы 47