К. В. Полякова, Нормали высшего порядка на многообразии,
Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2020, том 180, 85–90

https://www.mathnet.ru/into645

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 85–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-85-90

УДК 514.76

НОРМАЛИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА НА МНОГООБРАЗИИ

© 2020 г. **К. В. ПОЛЯКОВА**

Аннотация. На n-мерном гладком многообразии рассмотрены нормали высших порядков двух видов, т.е. пространства, дополняющие касательное пространство порядка 1 или $r-1$ до касательного пространства порядка r. Показано, что производные одних базисных векторов по направлению данных базисных векторов первого (второго) порядка равны значениям дифференциалов первого (второго) порядка первых векторов на данных векторах. С помощью дифференциалов базисных касательных векторов первого и второго порядков построены отображения из множества касательных векторов первого порядка во множество векторов нормалей второго и третьего порядков. Заданы отображения, порождающие горизонтальные векторы второго и третьего порядков для канонической аффинной связности первого и второго порядков соответственно.

Ключевые слова: дифференциальная форма, касательное пространство, нормаль на многообразии, аффинная связность.

HIGHER-ORDER NORMALS ON MANIFOLDS

© 2020 **K. V. POLYAKOVA**

Abstract. On an n-dimensional smooth manifold, we consider higher-order normals of two types, i.e., the spaces that complement the tangent space of orders 1 or $r-1$ to the tangent space of order r. We prove that the derivatives of some basic vectors in the direction of the given first-order (second-order) basis vectors are equal to the values on these vectors of the first-order (second-order) differentials of the first vectors. Using the differentials of basic tangent vectors of the first and second orders, we construct mappings from the set of first-order tangent vectors to the set of second- and third-orders normal vectors. Also, we introduce mappings that generate horizontal second- and third-order vectors for the canonical first- and second- order affine connections, respectively.

Keywords and phrases: differential form, tangent space, normal on a manifold, affine connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 58A10

1. Введение. Данная работа относится к дифференциальной геометрии, а методика исследования основана на применении способа Г. Ф. Лаптева (см. [7, 8]) задания связности в главных расслоениях и разработанного им метода продолжений и охватов, который обобщает метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана. Применение метода Картана—Лаптева, оперирующего структурными уравнениями и деривационными формулами, позволяет эффективно использовать тангенциальнозначные формы, т.е. дифференциальные формы со значениями в касательных пространствах различных порядков. Указанные формы широко применяются во многих разделах современной физики (см., например, [2, 15].

Отправным пунктом для построения различных тангенциальнозначных форм на расслоении линейных реперов является каноническая форма на этом расслоении; связывая касательное и кокасательное пространства этого расслоенного многообразия, она соответствует тождественным отображениям этих пространств. При этом действия тангенциальнозначных форм имеют двойственный характер: они действуют как в пространстве касательных векторов к расслоению линейных реперов, так и в пространстве ковекторов. Все тангенциальнозначные формы, возникающие в результате продолжения (внешнего дифференцирования и последующего разрешения по лемме Э. Картана), дают возможность строить касательные пространства 2-го и более высоких порядков, кроме того, эти формы задают важные отображения как касательных, так и кокасательных пространств различных порядков. В частности, отображения, определяемые дифференциалами базисных касательных векторных полей, переводят касательные векторы в нормальные векторы (см. [13]), т.е. векторы второго порядка, дополняющие касательное пространство 1-го порядка до касательного пространства 2-го порядка.

Метод Лаптева, базируясь на операции внешнего дифференцирования обычных (а также тангенциальнозначных) форм, с применением координатного задания векторов и форм дает возможность шире использовать деривационные формулы на многообразии.

Каноническая форма 1-го порядка $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ $(i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m)$ на многообразии X_m связывает касательное $TX_m = \mathrm{span}(\varepsilon_i)$ и кокасательное $T^*X_m = \mathrm{span}(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке M, а также соответствует тождественным преобразованиям этих пространств, т.е. (см. [12])

$$\theta = \mathrm{id}_{TX_m}, \quad \theta = \mathrm{id}_{T^*X_m}.$$

Каноническая форма является тензорнозначной (см. [2,5]), точнее, тангенциальнозначной. Дифференциальные 1-формы $\{\omega^i\}$ образуют кобазис, сопряженный подвижному базису $\{\varepsilon_i\}$, т.е. $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Фактически $\theta = \omega^i \otimes \varepsilon_i \in T^*X_m \otimes TX_m$, но значок тензорного умножения в форме $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ будем опускать.

Реализуем подход, связанный с координатным выражением базисных и слоевых форм, а также векторов репера в слоях. Рассмотрим некоторую окрестность m-мерного многообразия X_m, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i. Слоевые координаты x^i_j, x^i_{jk}, x^i_{jkl} на многообразии X_m (см. [8, с. 149]) удовлетворяют соотношениям $\det(x^i_j) \neq 0$, $x^i_k \overset{*}{x}{}^k_j = \delta^i_j$ и симметричны по нижним индексам. При этом базисные ω^i и слоевые ω^i_j, ω^i_{jk} формы имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega^i = x^i_j dx^j, \\ &\omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k, \\ &\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l. \end{aligned} \tag{1}$$

Структурные уравнения совокупности базисных ω^i и слоевых ω^i_j, ω^i_{jk} форм главного расслоения реперов 2-го порядка, построенного над многообразием X_m, находятся внешним дифференцированием форм (1) (см. [8]).

Относительно натурального (голономного) репера $\{\partial_i = \partial/\partial x^i,\ \partial_{ij} = \partial^2/\partial x^i \partial x^j\}$ векторы ε_i и ε_{ij} раскладываются по формулам (см. [9])

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j, \quad \varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j \partial_{kl} + x^k_{ij} \overset{*}{x}{}^l_k \partial_l. \tag{2}$$

Пространство $T^2X_m = \mathrm{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в текущей точке M многообразия X_m называется касательным пространством порядка 2, а также соприкасающимся пространством порядка 1 (см., например, [13]). Слоевые формы интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i, ε_{ij}, удовлетворяющего деривационным уравнениям

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= \varepsilon_j \omega^j_i + \omega^j \varepsilon_{ij}, \\ d\varepsilon_{ij} &= \omega^k_i \varepsilon_{kj} + \omega^k_j \varepsilon_{ik} + \omega^k_{ij}\varepsilon_k + \omega^k \varepsilon_{ijk}, \end{aligned} \tag{3}$$

которые получены дифференцированием векторов (2).

Дифференцируя каноническую форму $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ обычным образом, получим каноническую форму 2-го порядка на многообразии X_m (см., например, [1,9,16])

$$d\theta = (d\omega^i + \omega^j \omega^i_j)\varepsilon_i + \omega^i \omega^j \varepsilon_{ij},$$

причем $d\theta \in (T^2X_m)^* \otimes T^2X_m$, поскольку

$$d\omega^i + \omega^j\omega^i_j, \omega^i\omega^j \in (T^2X_m)^*, \quad \varepsilon_{ij} \in T^2X_m.$$

Пространство $(T^2X_m)^*$, сопряженное касательному пространству 2-го порядка T^2X_m, называется кокасательным пространством 2-го порядка. Репер $\{\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}\}$ и корепер $\{d\omega^i + \omega^j\omega^i_j, \omega^i\omega^j\}$ 2-го порядка являются сопряженными. Условия сопряженности для произвольных (не являющихся натуральными) базиса и кобазиса 2-го порядка имеют вид

$$(d\omega^i + \omega^j\omega^i_j)(\varepsilon_k) = \delta^i_k, \quad \omega^i\omega^j(\varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k), \quad (d\omega^i + \omega^j\omega^i_j)(\varepsilon_{kl}) = 0, \omega^i\omega^j(\varepsilon_k) = 0.$$

Известно (см. [17]), что $\{d^2x^i, dx^idx^j\}$ — натуральный корепер (см. [6, с. 54], [4, с. 175]) кокасательного пространства 2-го порядка $(T^2X_m)^*$, $\{\partial_i, \partial_{ij}\}$ — натуральный корепер касательного пространства 2-го порядка T^2X_m. Ненулевые условия сопряженности можно записать следующим образом:

$$d^2x^i(\partial_j) = \delta^i_j, \quad dx^idx^j(\partial_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k).$$

При этом

$$TX_m \subset T^2X_m, \quad \{\partial_i\} \in \{\partial_i, \partial_{ij}\};$$
$$T^*X_m \not\subset (T^2X_m)^*, \quad \{dx^i\} \notin \{d^2x^i, dx^idx^j\}.$$

Выражение обычного дифференциала канонической формы $\theta = \omega^i\varepsilon_i$ многообразия X_m относительно натуральных репера и корепера 2-го порядка принимает следующий вид:

$$d\theta = d^2x^i\partial_i + dx^idx^j\partial_{ij}.$$

2. Нормали на многообразии. *Нормалью* (см. [13, 14]) *порядка* r в точке M многообразия называется такое подпространство N^r соприкасающегося пространства O^rX_m, которое имеет пересечение нулевой размерности с пространством $O^{r-1}X_m$, и размерность которого является дополнительной по отношению к размерности $O^{r-1}X_m$, т.е.

$$N^r \oplus O^{r-1}X_m = O^rX_m.$$

Для определения порядка нормали будем использовать порядки касательных, а не соприкасающихся пространств, полагая, что соприкасающееся пространство r-го порядка — это касательное пространство $(r+1)$-го порядка, т.е. $T^{r+1}X_m = O^rX_m$. Кроме того, в качестве нормалей будем рассматривать также пространства, дополняющие пространство TX_m (а не только пространство T^rX_m) до пространства $T^{r+1}X_m$.

Нормалью порядка r касательного пространства TX_m (многообразия X_m) в точке M будем называть подпространство N^r_1, дополняющее пространство TX_m до пространства T^rX_m, т.е.

$$N^r_1 \oplus TX_m = T^rX_m.$$

В частности, для пространства TX_m имеем следующие две нормали N^2_1 и N^3_1:

$$N^2_1 \oplus TX_m = T^2X_m; \quad N^3_1 \oplus TX_m = T^3X_m.$$

Нормаль N^r_1 можно представить в следующем виде: $N^r_1 = T^rX_m \setminus TX_m$; тогда $N^2_1 = T^2X_m \setminus TX_m$, $N^3_1 = T^3X_m \setminus TX_m$.

Нормалью порядка $r+1$ касательного пространства T^rX_m в точке M будем называть подпространство N^{r+1}_r, дополняющее пространство T^rX_m до пространства $T^{r+1}X_m$, т.е. (ср. [13])

$$N^{r+1}_r \oplus T^rX_m = T^{r+1}X_m.$$

Например, для пространства T^2X_m имеем нормаль $N^3_2 = T^3X_m \setminus T^2X_m$.

Если в равенстве $\varepsilon_j(f) = df(\varepsilon_j)$ заменить функцию f векторами ε_i, то будет иметь место следующая лемма.

Лемма 1. *Для базисных касательных векторов 1-го порядка ε_i справедливо равенство $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(\varepsilon_i)$.*

При линейном отображении $d\varepsilon_i$, определяемом соотношением (3), имеем

$$d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_k\omega_i^k(\varepsilon_j) + \varepsilon_{ik}\omega^k(\varepsilon_j) = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Кроме того,

$$\varepsilon_j(\varepsilon_i) = \partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i = \partial_{\overset{*}{x}{}_j^l\partial_l}\left(\overset{*}{x}{}_i^k\partial_k\right) = \overset{*}{x}{}_i^k\overset{*}{x}{}_j^l\partial_{kl} = \varepsilon_{ij} - x_{ij}^k\varepsilon_k = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}$ удовлетворяют уравнениям $\Delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ijk}\omega^k$, т.е. инвариантны в совокупности, причем $\dot{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} - x_{ij}^l\dot{\varepsilon}_{lk} - x_{ijk}^l\varepsilon_l$, где векторы

$$\varepsilon_{ijk} = \overset{*}{x}{}_i^l\overset{*}{x}{}_j^s\overset{*}{x}{}_k^t\partial_{lst} + x_{ijk}^l\varepsilon_l + \left(\overset{*}{x}{}_l^p\overset{*}{x}{}_j^q x_{ik}^l + \overset{*}{x}{}_i^p\overset{*}{x}{}_l^q x_{jk}^l + \overset{*}{x}{}_l^p\overset{*}{x}{}_k^q x_{ij}^l\right)\partial_{pq}$$

принадлежат касательному пространству 3-го порядка T^3X_m. Дифференциальный тензорный оператор $\triangle$ имеет вид (см., например, [1, 3, 16])

$$\Delta t_{jk}^i = dt_{jk}^i + t_{jk}^l\omega_l^i - t_{lk}^i\omega_j^l - t_{jl}^i\omega_k^l.$$

Линейные отображения

$$d\varepsilon_i\colon TX_m \to N_1^2 = T^2X_m \setminus TX_m$$

определяют нормаль 2-го рода $N_1^2 = \operatorname{span}(\dot{\varepsilon}_{ij})$ для пространства TX_m.

Базисные векторы $\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - x_{ij}^k\varepsilon_k$ нормали 2-го порядка N_1^2 являются:

(i) производными векторов ε_i по их направлениям, т.е. $\dot{\varepsilon}_{ij} = \partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i$,

(ii) образами векторов ε_j при отображениях $d\varepsilon_i$, т.е. $\dot{\varepsilon}_{ij} = d\varepsilon_i(\varepsilon_j)$.

Для касательных векторов $u = u^i\varepsilon_i$, $v = v^i\varepsilon_i$ справедливо:

$$du(v) = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k}\overset{*}{x}{}_i^k\varepsilon_j + u^j\dot{\varepsilon}_{ji}\right)v^i.$$

Теорема 1. *Пусть* $u\colon X_m \to TX_m$ — *векторное поле, тогда* $du\colon TX_m \to T^2X_m$ — *линейное отображение из касательного пространства* 1*-го порядка* TX_m *в касательное пространство* 2*-го порядка* T^2X_m. *Причем для базисных векторов* $\varepsilon_i\colon X_m \to TX_m$ *линейное отображение* $d\varepsilon_i\colon TX_m \to N_1^2 \subset T^2X_m$ *поднимает касательный вектор* 1*-го порядка в нормаль* 2*-го порядка* N_1^2.

Отображение $d\varepsilon_i$ всем касательным векторам ставит в соответствие векторы нормали 2-го порядка N_1^2. Такое расщепление соприкасающегося пространства T^2X_m определяет простейшую (каноническую) аффинную связность $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^i = -x_{jk}^i$ с формами $\overset{\circ}{\tilde{\omega}}{}_j^i = \omega_j^i|_{\omega^i=0}$ (см. [10]). Эта связность является плоской и симметричной. Векторы $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ являются горизонтальными векторами для простейшей связности 1-го порядка (см. [10]), а нормаль N_1^2 — горизонтальным подпространством простейшей (канонической) связности, т.е. $HT^2X_m = N_1^2$ (см. [13, 16]).

3. Нормали 3-го порядка. Обобщим равенство $\partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i = d\varepsilon_i(\varepsilon_j)$, справедливое для базисных касательных векторов 1-го порядка, на случай базисных касательных векторов 2-го порядка.

Теорема 2 (см. [12])**.** *Для базисных касательных векторов* 1*-го и* 2*-го порядка* $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon_{ij}\}$ *справедливы равенства*

$$\partial_\varepsilon\varepsilon' = d\varepsilon'(\varepsilon), \quad \partial_{\varepsilon'}\varepsilon = d^2\varepsilon(\varepsilon'), \quad \partial_{\varepsilon'}\varepsilon' = d^2\varepsilon'(\varepsilon').$$

т.е. производные одних базисных векторов по направлению данных базисных векторов 1*-го* (2*-го*) *порядка равны значениям дифференциалов* 1*-го* (2*-го*) *порядка первых векторов на данных векторах.*

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_i}\varepsilon_{pq} = \varepsilon_i(\varepsilon_{pq})$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{pq}$ на касательные векторы ε_i, получим следующие равные выражения:

$$\partial_{\varepsilon_k}\varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}_i^s\,\overset{*}{x}{}_j^p\,\overset{*}{x}{}_k^q\,\partial_{spq} + x_{ij}^s\,\overset{*}{x}{}_k^q\,\overset{*}{x}{}_s^p\,\partial_{pq},$$

$$d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) = \varepsilon_{ijk} - \varepsilon_s\,x_{ijk}^s - \dot{\varepsilon}_{sj}\,x_{ik}^s - \dot{\varepsilon}_{is}\,x_{jk}^s,$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_k}\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) = \varepsilon_{ij,k}$.

Второй дифференциал касательных векторов ε_i, т.е. обычный дифференциал деривационной формулы (3) имеет вид (см. [11])

$$d^2\varepsilon_i = \varepsilon_{ijk}\omega^j\omega^k + \varepsilon_{ij}\left(d\omega^j + \omega^j_k\omega^k\right) + 2\varepsilon_{jk}\omega^k\omega^j_i + \varepsilon_j\left(d\omega^j_i + \omega^j_k\omega^k_i + \omega^k\omega^j_{ik}\right). \qquad (4)$$

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i = \varepsilon_{pq}(\varepsilon_i)$ или действуя линейным отображением $d^2\varepsilon_i$, определяемым по закону (4), на соприкасающиеся векторы ε_{pq}, получим следующие равные выражения:

$$\partial_{\varepsilon_{ij}}\varepsilon_k = \overset{*}{x}{}^s_i\,\overset{*}{x}{}^p_j\,\overset{*}{x}{}^q_k\,\partial_{spq} + x^s_{ij}\,\overset{*}{x}{}^q_k\,\overset{*}{x}{}^p_s\,\partial_{qp},$$
$$d^2\varepsilon_k(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{kij} - \varepsilon_s x^s_{kij} - \dot\varepsilon_{sj}x^s_{ki} - \dot\varepsilon_{si}x^s_{kj},$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_{ij}}\varepsilon_k = d^2\varepsilon_k(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{k,ij}$.

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kl}(\varepsilon_{ij})$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{ij}$ на соприкасающиеся векторы ε_{kl}, также получим равные выражения.

Поскольку слоевые координаты x^i_{jk}, x^i_{jkl} симметричны по нижним индексам, то $\varepsilon_{ij,k} = \varepsilon_{k,ij}$, причем $\Delta\varepsilon_{ij,k} = \omega^l_{ij}\dot\varepsilon_{lk}$. Векторы $\dot\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{kl,p}$ инвариантны в совокупности и определяют нормаль 3-го порядка $N^3_1 = T^3X_m \setminus TX_m$ пространства TX_m, т.е. $N^3_1 = \mathrm{span}(\dot\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl,p})$.

Векторы $\dot\varepsilon_{ij,k} = \varepsilon_{ij,k} - x^l_{ij}\dot\varepsilon_{kl}$ инвариантны сами по себе, причем для отображения, определяемого базисными векторами нормали 2-го порядка, имеем

$$d\dot\varepsilon_{ij}\colon \varepsilon_k \in TX_m \to d\dot\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) = \dot\varepsilon_{ij,k} \in N^3_2 = T^3X_m \setminus T^2X_m.$$

Векторы $\dot\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij,k}$ являются горизонтальными векторами для простейшей (канонической) связности 2-го порядка (см. [10, 11]). Эта связность является плоской, а ее тензор кручения 2-го порядка равен нулю. Действительно, горизонтальные векторы 3-го порядка

$$\tilde\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{lj}\Gamma^l_{ik} + \varepsilon_{il}\Gamma^l_{jk} + \varepsilon_l\Gamma^l_{ijk} \quad (\tilde\varepsilon_{ijk} \in T^3X_m)$$

для простейшей аффинной связности 2-го порядка $\overset{\circ}{\Gamma}{}^2$ с компонентами

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}, \quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jkl} = -x^i_{jkl} + x^i_{sk}x^s_{jl} + x^i_{js}x^s_{kl},$$

имеют вид $\overset{\circ}{\tilde\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$. Формы $\overset{\circ}{\tilde\omega}{}^i_{jk} = \omega^i_{jk}|_{\omega^i=0}$, $\overset{\circ}{\tilde\omega}{}^i_j = \omega^i_j|_{\omega^i=0}$ являются формами канонической связности 2-го порядка.

Для горизонтальных векторов простейшей связности 2-го порядка $\overset{\circ}{\Gamma}{}^2$ справедливо разложение

$$\overset{\circ}{\tilde\varepsilon}_{ijk} = x^l_{jk}\dot\varepsilon_{li} + \dot\varepsilon_{jk,i}, \quad \overset{\circ}{\tilde\varepsilon}_{ij} = \dot\varepsilon_{ij}$$

по базисным векторам $\dot\varepsilon_{ij} \in N^2_1$ и $\dot\varepsilon_{jk,i} \in N^3_2$.

Теорема 3. *Пусть $U\colon X_m \to T^2X_m$ — векторное поле. Тогда $dU\colon TX_m \to T^3X_m$ — линейное отображение из касательного пространства 1-го порядка TX_m в касательное пространство 3-го порядка T^3X_m. При этом для базисных векторов $\dot\varepsilon_{ij}\colon X_m \to N^2_1 \subset T^2X_m$ нормали 2-го порядка линейное отображение $d\dot\varepsilon_{ij}\colon TX_m \to N^3_2 \subset T^3X_m$ поднимает касательный вектор 1-го порядка в нормаль 3-го порядка N^3_2 пространства T^2X_m.*

Обобщая данный результат, можно утверждать, что отображения, задаваемые дифференциалами базисных векторов нормали N^r_{r-1}, переводят базисные касательные векторы 1-го порядка в базисные векторы нормали N^{r+1}_r.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.
2. *Бабурова О. В., Фролов Б. Н.* Математические основы современной теории гравитации. — М.: Прометей, 2012.
3. *Белова О. О.* Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 812–822.

4. *Веблен О., Уайтхед Дж.* Основания дифференциальной геометрии. — М.: ИЛ, 1949.
5. *Василюс Р. В.* Контравариантная теория дифференциального продолжения в модели пространства со связностью// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1983. — *14.* — С. 101–176.
6. *Гурса Э.* Курс математического анализа. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1933.
7. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1979. — *9.* — С. 5–246.
8. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1966. — *1.* — С. 139–189.
9. *Полякова К. В.* Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — *45.* — С. 92–104.
10. *Полякова К. В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — *46.* — С. 114–128.
11. *Полякова К. В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2016. — *47.* — С. 108–125.
12. *Полякова К. В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 1. — С. 84–94.
13. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка// Мат. заметки. — 1981. — *29*, № 2. — С. 279–290.
14. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 73–80.
15. *Сарданашвили Г. А.* Геометрия и классические поля. Современные методы теории поля. Т. 1. — М.: УРСС, 1996.
16. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград, 1998.
17. *Catuogno P.* A geometric Itô formula// Mat. Contemp. — 2005. — *33.* — P. 85–99.

Полякова Катерина Валентиновна
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград
E-mail: KaPolyakova@kantiana.ru