О. М. Фоменко, Продолжимость на всю плоскость и функциональное уравнение скалярного произведения L-рядов Гекке двух квадратичных полей,
Тр. МИАН СССР, 1972, том 128, 232–241

https://www.mathnet.ru/tm3169

О. М. ФОМЕНКО

ПРОДОЛЖИМОСТЬ НА ВСЮ ПЛОСКОСТЬ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ L-РЯДОВ ГЕККЕ ДВУХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ

1. Пусть F_i $(i=1, \ldots, m)$ — поля алгебраических чисел, ξ_i — характер Гекке на группе дивизоров поля F_i,

$$L_{F_i}(s, \xi_i) = \sum_{\substack{N_{F_i/\mathbf{Q}}\mathfrak{A}_i = n \\ 1 \leqslant n < \infty}} \frac{\xi_i(\mathfrak{A}_i)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

есть L-ряд Гекке поля F_i; здесь $\mathfrak{A}_i$ пробегает целые дивизоры поля F_i.

Хорошо известно, что L-ряд Гекке продолжи́м на всю s-плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению обычного (в теории L-функций) типа (см. Гекке [1]; по поводу адельной трактовки Тейта—Ивасавы см. [2]).

Вопросы многомерной арифметики привели в 1950 г. Ю. В. Линника к введению нового интересного объекта — скалярного произведения L-рядов Гекке:

$$L_{F_1, \ldots, F_m}(s; \xi_1, \ldots, \xi_m) = \sum_{\substack{N_{F_i/\mathbf{Q}}\mathfrak{A}_i = n, \ i=1, \ldots, m \\ 1 \leqslant n < \infty}} \frac{\prod_{i=1}^m \xi_i(\mathfrak{A}_i)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1). \tag{1}$$

Ю. В. Линник предположил, что скалярное произведение (1) продолжимо на всю плоскость и имеет функциональное уравнение.

Б. З Мороз [3—5] изучал эту задачу для двух мнимых квадратичных полей и продолжил скалярное произведение немного левее прямой $\operatorname{Re} s = 1$. Затем А. И. Виноградов [6] продолжил скалярное произведение (1) до прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Б. З. Мороз [7] придал идее А. И. Виноградова изящный вид, доказав «явную формулу», связывающую скалярное произведение L-рядов Гекке двух полей с L-рядом Гекке композита этих полей. Наконец, Драксл [8] продолжил скалярное произведение (1) до прямой $\operatorname{Re} s = 0$.

В настоящей работе мы доказываем предположение Ю. В. Линника, для случая двух квадратичных полей $F_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{D_1})$, $F_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{D_2})$ $(D_1, D_2) = 1$.

Мы комбинируем метод Ранкина [9] с результатами Маасса [10] и Гекке [11]. Ранкин представлял скалярное произведение двух рядов

Дирихле, являющихся преобразованиями Меллина модулярных форм, в виде интегральной свертки (с ядром — рядом Эйзенштейна) этих модулярных форм. Для получения функционального уравнения и продолжимости применяются модулярные и аналитические свойства как ядра, так и указанных модулярных форм. Эта же идея проходит и здесь.

Мы пользуемся тем, что L-ряд Гекке квадратичного поля с неразветвленным характером является преобразованием Меллина некоторой модулярной формы. В случае мнимого квадратичного поля эта модулярная форма является обычной (комплексно аналитической) модулярной формой на верхней полуплоскости (см. Гекке [11]), в случае же вещественного квадратичного поля это волновая автоморфная функция Маасса (комплексно не аналитическая модулярная функция, являющаяся собственной функцией оператора Лапласа—Бельтрами на верхней полуплоскости; см. Маасс [10]).

В настоящей работе мы проводим вычисления для несколько более трудного случая двух вещественных квадратичных полей, причем ради простоты изложения будем рассматривать следующий частный случай: $D_i = p_i$ — нечетное простое, $p_1 \neq p_2$; $N(\varepsilon_i) = -1$, где ε_i — основная единица поля F_i; F_i — одноклассные поля ($i = 1, 2$); предположим также, что характеры Гекке неразветвлены. Вычисления в смешанном случае и в случае двух мнимых квадратичных полей проще.

В последнем пункте статьи делаются некоторые замечания, связанные со случаем двух произвольных квадратичных полей, и обсуждаются возможные обобщения.

2. Ниже речь идет о двух полях, поэтому $i = 1, 2$. Пусть $F_i = \mathbf{Q}(\sqrt{D_i})$ — вещественное квадратичное поле с дискриминантом D_i, причем $D_i = p_i > 2$ — простое число, $p_1 \neq p_2$. Будем предполагать, что $N(\varepsilon_i) = -1$, где $\varepsilon_i > 1$ — основная единица поля F_i; предположим также, что поля F_i одноклассны. Пусть $\mathfrak{o}_i$, E_i, E_i^+ означают соответственно кольцо целых чисел, группу единиц и группу вполне положительных единиц поля F_i. В силу наших предположений любой целый идеал $\mathfrak{A}_i$ поля F_i имеет вид (α_i), где $\alpha_i \in \mathfrak{o}_i$.

Для простоты мы будем рассматривать неразветвленные характеры Гекке поля F_i, а именно,

$$\lambda_i^{m_i}(\mathfrak{a}_i) = \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_i'}\right|^{m_i\sqrt{-1}\,k_i} = \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_i'}\right|^{\nu_i},$$

где $\nu_i = \sqrt{-1}\,m_i k_i$, $k_i = \frac{\pi}{\log \varepsilon_i}$, $m_i \in \mathbf{Z}$; мы всегда предполагаем, что $m_i \neq 0$.

Пусть $\chi_i = \chi_i(n, D_i)$ — характер поля F_i, тогда $\chi = \chi_1\chi_2$ — характер $(\operatorname{mod} D)$, $D = D_1 D_2$. Ясно, что χ, χ_1, χ_2 — первообразные характеры.

L-ряд Гекке поля F_i можно записать в виде

$$L_{F_i}(s, \lambda_i^{m_i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(i)}}{n^s}, \tag{2}$$

где $t_n^{(i)} = \sum\limits_{|N\alpha_i| = n} \lambda_i^{m_i}(\alpha_i)$ и суммирование идет по неассоциированным целым числам поля F_i; скалярное произведение этих L-рядов Гекке L_{F_1}, L_{F_2}

записывается в виде

$$L_{F_1, F_2}(s;\ \lambda_1^{m_1},\ \lambda_2^{m_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(1)} t_n^{(2)}}{n^s}. \tag{3}$$

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $\Omega(s) = \pi^{-2s} L(2s, \chi)\, \Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2 \pm s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_1 - \nu_2 + s}{2}\right) \times$ $\times\, \Gamma\left(\frac{-\nu_1 + \nu_2 + s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\nu_1 - \nu_2 + s}{2}\right) L_{F_1, F_2}(s;\ \lambda_1^{m_1},\ \lambda_2^{m_2})$.

Произведение $L(2s, \chi)\, L_{F_1, F_2}(s;\ \lambda_1^{m_1},\ \lambda_2^{m_2})$ *голоморфно продолжается на всю плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\Omega(s) = D^{2\left(s - \frac{1}{2}\right)} \Omega(1 - s). \tag{4}$$

Замечание. Для скалярного произведения (3) можно предположить аналог гипотезы Римана.

3. Начнем доказательство теоремы. Представим сначала скалярное произведение (3) (при $\operatorname{Re} s > \sigma_C^*$) в виде интеграла от волновых автоморфных функций Маасса по области

$$S = \left\{\tau = x + iy \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ \ 0 \leqslant y < \infty\right\}.$$

Для этого введем и сформулируем основные свойства волновых автоморфных функций Маасса [10]. Пусть $\tau = x + iy$, $y > 0$, — комплексная переменная в верхней полуплоскости H. Волновая автоморфная функция Маасса, ассоциированная с $L_{F_i}(s, \lambda_i^{m_i})$, может быть задана рядом

$$g_i(\tau) = g_i(\tau, \lambda_i^{m_i}) = \sum_{\substack{\mu_i \in \mathfrak{D}/E_i^+ \\ \mu_i \neq 0}} \lambda_i^{m_i}(\mu_i)\, y^{\frac{1}{2}} K_{\sqrt{-1}\, m_i k_i}(2\pi\, |N\mu_i|\, y)\, e^{2\pi \sqrt{-1}\, \mu_i x}; \tag{5}$$

здесь $K_\nu(z)$ — функция Макдональда.

Напомним интегральное представление функции Макдональда [12]: если $|\arg z| < \frac{3\pi}{2}$, $2\nu \neq$ нечетное целое, то

$$2\pi^2 i K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \cos(\nu\pi) \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(z)\, \Gamma\left(\frac{1}{2} - s - \nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \nu\right) (2z)^s\, ds. \tag{6}$$

Мы будем применять $K_\nu(z)$ в случае вещественного $z > 0$ и чисто мнимого ν; при этих ограничениях

$$K_\nu(z) \ll \frac{1}{\sqrt{z}}\, e^{-z}. \tag{7}$$

Свойства $g_i(\tau)$:

1) $g_i(\tau)$, $\tau \in H$, — вещественно аналитическая функция по x, y, причем

$$\begin{aligned} g_i(\tau) &\ll y^{c_1^{(i)}}, && \text{если } y \to \infty; \\ g_i(\tau) &\ll y^{-c_2^{(i)}}, && \text{если } y \to 0; \end{aligned} \tag{8}$$

---

* В этой работе σ_C означает достаточно большое положительное постоянное число, разное для разных неравенств.

($c_1^{(i)} > 0$, $c_2^{(i)} > 0$ — подходящие константы; оценки равномерны по x).

2) $g_i(\tau)$ является параболической модулярной функцией относительно группы $\Gamma(D_i)$, причем

$$g_i\left(\frac{a_i\tau+b_i}{c_i\tau+d_i}\right)=\chi(d_i,\,D_i)\quad g_i(\tau), \tag{9}$$

если

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \Gamma_0(D_i);$$

напомним, что

$$\Gamma(A)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, A)\right\},$$

$$\Gamma_0(A)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, A)\right\};$$

3)

$$g_i\left(\frac{-1}{D_i\tau}\right)=g_i(\tau). \tag{10}$$

Доказательства см. у Маасса [10].

Легко видеть, что

$$\int_{-1/2}^{1/2} g_i(\tau)\,g_2(\tau)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(1)} t_n^{(2)}\, yK_{im_1k_1}(2\pi ny)\,K_{im_2k_2}(2\pi ny). \tag{11}$$

Умножая обе части в (11) на y^{s-2} и беря $\int\limits_0^\infty \dots dy$, а затем меняя порядок $\int$ и $\sum$, получаем (пока формально)

$$\int_0^\infty y^{s-2}\left(\int_{-1/2}^{1/2} g_1(\tau)\,g_2(\tau)\,dx\right)dy =$$

$$=2\int_0^\infty y^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(1)} t_n^{(2)} K_{im_1k_1}(2\pi ny)\,K_{im_2k_2}(2\pi ny)\right)dy =$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(1)} t_n^{(2)} \int_0^\infty K_{im_1k_1}(2\pi ny)\,K_{im_2k_2}(2\pi ny)\,y^{s-1}dy =$$

$$=2\Phi(s)\,L_{F_1,\,F_2}(s;\ \lambda_1^{m_1},\ \lambda_2^{m_2}),$$

где

$$\Phi(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1-\nu_2+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\nu_1+\nu_2+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\nu_1-\nu_2+s}{2}\right)}{8\pi^s\Gamma(s)}.$$

Все члены этих равенств абсолютно сходятся при $\mathrm{Re}\, s > \sigma_C$. Поэтому перемена порядка суммирования и интегрирования закона при $\mathrm{Re}\, s > \sigma_C$. Остается обосновать переход от третьего члена равенства к четвертому.

Мы воспользовались следующей известной формулой (см. [12], стр. 101):

$$\int_0^\infty K_\mu(\alpha t) K_\nu(\alpha t) t^{-\rho} dt = \frac{1}{2^{\rho+2}\Gamma(1-\rho)} \alpha^{\rho-1} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu+\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu-\rho}{2}\right),$$

которая верна при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}(-\rho \pm \mu \pm \nu + 1) > 0$. В нашем случае $\rho = 1 - s$, $\alpha = 2\pi n y$, μ и ν — чисто мнимые; поэтому эта формула верна при $\operatorname{Re} s > 2$.

Итак, мы доказали, что при $\operatorname{Re} s > \sigma_C$

$$\int_0^\infty \int_{-1/2}^{1/2} g_1(\tau) g_2(\tau) y^{s-2}\, dx dy = 2\Phi(s) L_{F_1, F_2}(s;\ \lambda_1^{m_1},\ \lambda_2^{m_2}). \tag{12}$$

4. Преобразуем теперь двойной интеграл в (12) в интеграл по фундаментальной области $\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)}$* группы $\Gamma_0(D)$ $(D = D_1 D_2)$. Используя стандартные вычисления, приведенные у Ранкина [9] с использованием модулярных свойств функций $g_i(\tau)$, получаем $(\operatorname{Re} s > \sigma_C)$

$$\iint_S g_1(\tau) g_2(\tau) y^{s-2} dx dy = \iint_{\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)}} y^{s-2} g_1(\tau) g_2(\tau) \sum_{\substack{c=0 \\ c\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, D) \\ (c,\, d)=1}}^{\infty} \sum_{d=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\chi(d,\ D)}{|c\tau + d|^{2s}} dx dy.$$

Умножая обе части этого равенства на $2L(2s,\ \chi)$ ($L(s,\ \chi)$ — L-функция Дирихле), имеем

$$2L(2s,\ \chi) \iint_S y^{s-2} g_1(\tau) g_2(\tau)\, dx dy = \iint_{\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)}} y^{s-2} g_1(\tau) g_2(\tau) E_1(s,\ \tau,\ \chi)\, dx dy, \tag{13}$$

где

$$E_1(s,\ \tau,\ \chi) = \sum_{\substack{c,\, d \\ c\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, D)}}{}' \frac{\chi(d,\ D)}{|c\tau + d|^{2s}}$$

есть ряд Эйзенштейна; $\operatorname{Re} s > \sigma_C$.

Пусть $\Theta_1(s,\ \tau,\ \chi) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) E_1(s,\ \tau,\ \chi)$. Функция $E_1(s,\ \tau,\ \chi)$ голоморфно продолжается на всю плоскость; для нее известно функциональное уравнение (его мы докажем ниже)

$$\Theta_1(s,\ \tau,\ \chi) = D^{\frac{1}{2} - 2s} \Theta_2(1 - s,\ \tau,\ \chi), \tag{14}$$

где

$$\Theta_2(s,\ \tau,\ \chi) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) E_2(s,\ \tau,\ \chi),$$

$$E_2(s,\ \tau,\ \chi) = \sum_{c,\, d}{}' \frac{\chi(c,\ d)}{|c\tau + d|^{2s}}.$$

---

* Область $\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)}$ всегда выбираем так, чтобы она содержала точку $i\infty$.

Однако этого мало для аналитического продолжения скалярного произведения и для получения его функционального уравнения. Надо использовать некоторое интегральное представление для $E_1(s, \tau, \chi)$, с помощью которого ряд E_1 продолжается на всю плоскость. Для голоморфной продолжимости на всю плоскость произведения $L(2s, \chi) L_{F_1, F_2}(s; \lambda_1^{m_1}, \lambda_2^{m_2})$ этого достаточно. К сожалению, для вывода функционального уравнения (4) нужны дополнительные соображения. Причина этого — «несимметричность» функционального уравнения (14).

Эта «несимметричность» имеет причиной наличие у группы $\Gamma_0(A)$, $A > 1$, более одной параболической вершины (а с каждой параболической вершиной связан свой ряд Эйзенштейна). В этом случае функциональное уравнение для рядов Эйзенштейна, вообще говоря, имеет вид соотношения между значениями вектора (компонентами которого являются все ряды Эйзенштейна веса s для $\Gamma_0(A)$) в точках $1-s$ и s. Для получения функционального уравнения (4) необходимо использовать поведение функций Маасса относительно преобразования $\tau \to \frac{-1}{D_i \tau}$.

Итак, голоморфно продолжим на всю плоскость ряды $\Theta_1(s, \tau, \chi)$, $\Theta_2(s, \tau, \chi)$ и получим для них функциональное уравнение (14).

Здесь и ниже нам будут необходимы леммы 1, 2 и 3 из работы Ранкина [9]:

1) если $H(\tau)$ — параболическая форма некоторого веса относительно $\Gamma(N)$ и $\mathscr{D}_{\Gamma(N)}$ — фундаментальная область для $\Gamma(N)$, содержащая $i\infty$, то интеграл

$$\iint\limits_{\mathscr{D}_{\Gamma(N)}} y^{-\gamma} |H(\tau)|^2 \, dx dy$$

абсолютно сходится для любого γ;

2) если $\tau = x + iy$, где $y > 0$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi w}{\beta\gamma y} |m\beta\tau + n\gamma + \lambda\tau + \mu|^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{w} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi}{\beta\gamma y w} |m\beta\tau + n\gamma|^2 + \frac{2\pi i}{\beta\gamma}(m\beta\mu - n\gamma\lambda)\right\},$$

где β, γ, w — положительные, λ, μ — вещественные числа, причем оба ряда абсолютно сходятся;

3) в прежних обозначениях

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi w}{\beta\gamma y} |m\beta\tau + n|^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + A_1\left(1 + w^{-1} + y^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}}\right)\left(e^{-\pi\beta y w/2\gamma} + e^{-\pi w/2\beta\gamma y}\right),$$

где A_1 — константа, зависящая лишь от β, γ, но не от w, τ.

Применяя формулу $\frac{1}{C^z}\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty u^{z-1} e^{-Cu} du$ $(\operatorname{Re} z > 0;\ C > 0)$ и эти леммы, получаем нужные нам интегральные представления:

$$\Theta_1(s,\ \tau,\ \chi)=D^{-2s}\int\limits_1^\infty\left(w^{s-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)\exp\left\{-\frac{\pi w}{D^2y}\,|mD\tau+n|^2\right\}+\right.$$

$$\left.+D^{\frac{1}{2}}w^{-s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(m)\exp\left\{-\frac{\pi w}{y}\,|m\tau+n|^2\right\}\right)dw; \qquad (15)$$

$$\Theta_2(1-s,\ \tau,\ \chi)=\int\limits_1^\infty\left(w^{-s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(m)\exp\left\{-\frac{\pi w}{y}\,|m\tau+n|^2\right\}+\right.$$

$$\left.+D^{-\frac{1}{2}}w^{s-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)\exp\left\{-\frac{\pi w}{D^2y}\,|mD\tau+n|^2\right\}\right)dw. \qquad (16)$$

Отсюда следует голоморфная продолжимость на всю плоскость обоих рядов Θ_1, Θ_2 и функциональное уравнение (14).

Используя (12), (13), (15), леммы Ранкина и свойства $g_i(\tau)$, голоморфно продолжаем $L(2s,\ \chi)L_{F_1,\,F_2}(s;\ \lambda_1^{m_1},\ \lambda_2^{m_2})$ на всю плоскость.

5*. Переходим теперь к доказательству функционального уравнения (4). Для этого надо использовать поведение функции $g_i(\tau)$ при преобразовании $\tau\to\frac{-1}{D_i\tau}$. Прежде всего приведем формулу

$$\Theta_1\left(s,\ \frac{-1}{D\tau},\ \chi\right)=D^{\frac{3}{2}-3s}\Theta_1(1-s,\ \tau,\ \chi).$$

Доказательство ее тривиально (с использованием, конечно, функционального уравнения (14)).

Поскольку функции $g_1(\tau)$, $g_2(\tau)$ обладают инвариантностью относительно разных преобразований $\tau\to\frac{-1}{D_i\tau}$, мы вместо них будем рассматривать следующие функции:

$$g_1^{(0)}(\tau)=g_1(\tau)+g_1(D_2\tau),$$
$$g_2^{(0)}(\tau)=g_2(\tau)+g_2(D_2\tau).$$

Очевидно,

1) $g_i^{(0)}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\chi(d,\ D_i)\,g_i^{(0)}(\tau)$, где $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(D)$;

2) $g_i^{(0)}\left(\frac{-1}{D\tau}\right)=g_i^{(0)}(\tau)$.

Имеет место формула ($\mathrm{Re}\,s>\sigma_C$)

$$\iint\limits_S g_1^{(0)}(\tau)\,g_2^{(0)}(\tau)\,y^{s-2}dxdy=$$
$$=2\Phi(s)\left(1+D_1^{\frac{1}{2}-s}\right)\left(1+D_2^{\frac{1}{2}-s}\right)L_{F_1,\,F_2}(s;\ \lambda_1^{m_1},\ \lambda_2^{m_2}), \qquad (17)$$

вполне аналогичная формуле (12). Справедлив и аналог формулы (13):

$$2L(2s,\ \chi)\iint\limits_S y^{s-2}g_1^{(0)}(\tau)\,g_2^{(0)}(\tau)\,dxdy=\iint\limits_{\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)}} y^{s-2}g_1^{(0)}(\tau)\,g_2^{(0)}(\tau)\,E_1(s,\ \tau,\ \chi)\,dxdy,$$

* Ниже под Θ_i мы понимаем интегральные представления (15), (16).

который легко преобразуется к виду $(\operatorname{Re} s > \sigma_C)$

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi^s} 2L(2s, \chi) \iint\limits_S y^{s-2} g_1^{(0)}(\tau) g_2^{(0)}(\tau)\, dx dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)}} y^{-2} g_1^{(0)}(\tau) g_2^{(0)}(\tau) \Theta_1(s, \tau, \chi)\, dx dy. \tag{18}$$

Пусть $\Gamma^*(D)$ — группа, порожденная группой $\Gamma_0(D)$ и преобразованием $\omega(D) \left(= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \right)$; $\mathscr{D}_{\Gamma^*(D)}$ — ее фундаментальная область, содержащая точку $i\infty$. Легко видеть, что

$$\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)} = \mathscr{D}_{\Gamma^*(D)} \smile \omega(D) \mathscr{D}_{\Gamma^*(D)}. \tag{19}$$

В соответствии с (19) разобьем интеграл справа в (18) на сумму двух интегралов:

$$\iint\limits_{\mathscr{D}_{\Gamma_0(D)}} \cdots = \iint\limits_{\mathscr{D}_{\Gamma^*(D)}} \cdots + \iint\limits_{\omega(D)\mathscr{D}_{\Gamma^*(D)}} \cdots .$$

Преобразуем второй из них, пользуясь правилами замены переменных в интеграле и свойствами $g_i^{(0)}(\tau)$ и $\Theta_1(s, \tau, \chi)$ при преобразовании $\tau \to \frac{-1}{D\tau}$. Имеем

$$\iint\limits_{\omega(D)\mathscr{D}_{\Gamma^*(D)}} y^{-2} g_1^{(0)}(\tau) g_2^{(0)}(\tau) \Theta_1(s, \tau, \chi)\, dx dy =$$

$$= D^{\frac{3}{2}-3s} \iint\limits_{\mathscr{D}_{\Gamma^*(D)}} y^{-2} g_1^{(0)}(\tau) g_2^{(0)}(\tau) \Theta_1(1-s, \tau, \chi)\, dx dy.$$

Итак, при $\operatorname{Re} s > \sigma_C$ мы доказали, что

$$2L(2s, \chi) \frac{\Gamma(s)}{\pi^s} \iint\limits_S y^{s-2} g_1^{(0)}(\tau) g_2^{(0)}(\tau)\, dx dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathscr{D}_{\Gamma^*(D)}} y^{-2} g_1^{(0)}(\tau) g_2^{(0)}(\tau) \Theta(s, \tau, \chi)\, dx dy, \tag{20}$$

где $\Theta(s, \tau, \chi) = \Theta_1(s, \tau, \chi) + D^{-s}\Theta_2(s, \tau, \chi)$.

В отличие от $\Theta_i(s, \tau, \chi)$ функция $\Theta(s, \tau, \chi)$ переходит в себя при замене $s \to 1-s$, имея функциональное уравнение

$$\Theta(1-s, \tau, \chi) = D^{3s-\frac{3}{2}} \Theta(s, \tau, \chi). \tag{21}$$

Напомним, что под Θ_i мы понимаем интегральные представления (15), (16). Подставляя функциональное уравнение (21) в (20), получаем после несложных выкладок и рассуждений функциональное уравнение (4). Теорема доказана.

6. Как уже говорилось в начале статьи, использованный выше метод легко переносится на случай произвольных квадратичных полей. Для того чтобы убедиться в этом, сформулируем результаты Гекке [11] и Маасса [10] в необходимой общности. Пусть $F = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$, где $D < 0$ — дискриминант — мнимое квадратичное поле, $\mathfrak{a}\,(\neq 0)$ — целый идеал в F,

$N(\mathfrak{a}) = A$, $\lambda^{k-1}(\alpha)$ — (неразветвленный) характер Гекке; здесь $\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|}$, $k - 1 = gk_1 > 0$, g — порядок группы единиц в F.

$$L(s,\ \lambda^{k-1},\ \mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}) = \sum_{(\mu)\in\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}} \left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^{k-1} |N(\mu)|^{-s} \tag{22}$$

есть L-ряд Гекке класса идеальных чисел $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}$, содержащего идеал $\mathfrak{a}^{-1}$, причем суммирование идет по всем неассоциированным целым идеальным числам класса $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}$. Этот ряд $\left(\text{а точнее, } L\text{-ряд со сдвинутым аргументом: } L\left(s - \frac{k-1}{2},\ \lambda^{k-1},\ \mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}\right)\right)$ является преобразованием Меллина функции (мы сохраняем обозначения Гекке)

$$\vartheta_{k-1}(\tau,\ 0,\ \mathfrak{a},\ \sqrt{D}) = \sum_{\mu\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}\sqrt{D})}{}' \mu^{k-1} e^{2\pi i\tau\frac{N(\mu)}{A|D|}}, \tag{23}$$

где $y = \mathrm{Im}\,\tau > 0$ и суммирование идет по системе ненулевых целых чисел из F, которые $\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}\sqrt{D})$. Гекке [11] показал, что $\vartheta_{k-1}(\tau,\ 0,\ \mathfrak{a},\ \sqrt{D})$ является обычной (т. е. комплексно аналитической) параболической формой типа $(-k,\ |D|,\ \chi(n,\ D))$.

Сформулируем теперь соответствующие результаты для случая произвольного вещественного квадратичного поля $F = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$, $D > 0$ — дискриминант, принадлежащие Маассу [10]. Пусть $\varepsilon > 1$ — основная единица, $\lambda(\mu) = \left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{ik}$, $k = \frac{\pi}{\log\varepsilon}$, $\mathfrak{a}$ — целый идеал в F с нормой A. Рассмотрим L-ряд Гекке класса $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}$:

$$L(s,\ \lambda^n,\ \mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}) = \sum_{(\mu)\in\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}} \lambda^n(\mu)\,|N(\mu)|^{-s}; \tag{24}$$

здесь $n > 0$ и суммирование идет по всем целым неассоциированным идеальным числам из класса $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}^{-1}}$. Этот L-ряд является преобразованием Меллина так называемой волновой автоморфной функции (мы сохраняем обозначения Маасса)

$$g(\tau,\ 0,\ \mathfrak{a},\ \lambda^n,\ \sqrt{D}) = \frac{1}{\lambda^n(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\mu\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}\sqrt{D}) \\ (\mu)_{\sqrt{D}p_\infty}}}{}' \lambda^n(\mu)\sqrt{y}K_{ink}\left(\frac{2\pi\,|N\mu|}{AD}\,y\right) e^{2\pi i\frac{N\mu}{AD}x}. \tag{25}$$

Здесь $y > 0$ и суммирование идет по системе ненулевых неассоциированных $(\mathrm{mod}\,\sqrt{D}p_\infty)$ целых чисел из F, которые $\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}\sqrt{D})$.

Поясним, что два числа из F называются ассоциированными $(\mathrm{mod}\,\sqrt{D}p_\infty)$, если они отличаются на множитель, являющийся единицей $(\mathrm{mod}\,\sqrt{D}p_\infty)$ (т. е. вполне положительной единицей в F, которая $\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,\sqrt{D})$). Функция g является вещественно аналитической; ее модулярные свойства изучил Маасс [10]. Они (для случая одноклассных полей) уже были сформулированы в п. 3.

Результаты настоящей статьи можно распространить на случай двух квадратичных расширений любого глобального поля k, поскольку А. Вейль, Жаке и Ленглендс [13] уже обобщили теорию Гекке—Маасса на случай любого квадратичного расширения основного поля k. Известно интегральное представление L-функции его любого квадратичного расширения как преобразования Меллина автоморфной формы на группе аделей *.

Кроме того, есть основания полагать, что L-ряд Гекке произвольного поля алгебраических чисел является преобразованием Меллина некоторой вещественно аналитической гильбертовой модулярной формы. Это позволит доказать предположение Ю. В. Линника (по крайней мере) для двух произвольных полей алгебраических чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hecke. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. — Math. Z., 1930, 6, 11—51.
2. С. Ленг. Алгебраические числа. М., изд-во «Мир», 1966.
3. Б. З. Мороз. Аналитическое продолжение скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей и его применение. — Докл. АН СССР, 1963, 150, № 4, 752—754.
4. Б. З. Мороз. О продолжимости скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей. — Докл. АН СССР, 1964, 155, № 6, 1265—1267.
5. Б. З. Мороз. Композиция бинарных квадратичных форм и скалярное произведение рядов Гекке. — Труды МИАН СССР, 1965, 80, 102—109.
6. А. И. Виноградов. О продолжимости в левую полуплоскость скалярного произведения L-рядов Гекке с характерами величины. — Изв. АН СССР, серия матем., 1965, 29, № 2, 485—491.
7. Б. З. Мороз. О дзета-функциях полей алгебраических чисел. — Матем. заметки, 1968, 4, № 3, 333—339.
8. P. K. J. Draxl. L-Funktionen algebraischer Tori.—J. Number Theory, 1971, 3, № 4, 444—467.
9. R. G. Rankin. Contributions to the theory of Ramanuijan's functions $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, 35, N 4, 357—372.
10. H. Maass. Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. — Math. Ann., 1949, 121, 141—183.
11. E. Hecke. Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. — Math. Ann., 1926, 97, 210—242.
12. W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. 3rd ed. Berlin—Heidelberg—N. Y., Springer-Verlag, 1966.
13. H. Jacquet, R. P. Langlands. Automorphic forms on GL (2). Lecture Notes in Mathematics, 114. Berlin—Heidelberg—N. Y., Springer-Verlag, 1970.

* На возможность подобного обобщения указал автору И. И. Пятецкий-Шапиро.