J. N. Nuzhin, A. V. Yakushevich, Intermediate subgroups of Chevalley groups over the field of quotients of a principal ideal ring,
Algebra Logika, 2000, Volume 39, Number 3, 347–358

Алгебра и логика, 39, N 3 (2000), 347—358

УДК 512.544.2

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЕМ ЧАСТНЫХ КОЛЬЦА ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ*)

Я. Н. НУЖИН, А. В. ЯКУШЕВИЧ

Пусть K — поле частных кольца главных идеалов R, G_K — группа Шевалле (нормального типа) над полем K. Для любого подкольца $P \subset \subset K$ через G_P обозначим подгруппу всех элементов из G_K, коэффициенты которых лежат в P.

Пусть M — промежуточная подгруппа между G_R и G_K, т. е.

$$G_R \subseteq M \subseteq G_K. \tag{1}$$

Основным результатом статьи является

ТЕОРЕМА. *Если подгруппа M удовлетворяет условию* (1), *то для некоторого промежуточного подкольца P ($R \subseteq P \subseteq K$) выполняется*

$$M = G_P.$$

Ранее для группы Шевалле типа A_l аналог этой теоремы был получен в случаях, когда R является: евклидовым кольцом (см. [1]), кольцом главных идеалов (см. [2]), дедекиндовым кольцом (см. [3]) и кольцом Безу (см. [4]). Для группы Шевалле типа C_l и евклидова кольца R аналогичный результат установлен в [5].

На важность исследования групп с условием (1) обращал внимание Ю. И. Мерзляков. В 1971 г. он выдвинул следующую проблему:

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 96-01-00409.

Дать описание (решетки) подгрупп, заключенных между заданной классической группой матриц над кольцом и подгруппой всех ее матриц с коэффициентами в подкольце.

Основная теорема настоящей статьи дает исчерпывающее решение указанной проблемы для групп Шевалле в случае, когда основное кольцо является полем частных своего подкольца главных идеалов, но трудно надеяться, что подобное описание можно получить для достаточно широких классов колец.

§ 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, K^* — его мультипликативная группа. Через $G(K)$ будем обозначать элементарную группу Шевалле над кольцом K, ассоциированную с системой корней Φ. Она порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(K), \ \ r \in \Phi.$$

Для любого $t \in K^*$ положим

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t),$$

$$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1),$$

$$H(K) = \langle h_r((t) \mid r \in \Phi, t \in K^* \rangle .$$

Если K — поле и P — его подкольцо, то через G_P обозначим подгруппу всех элементов из $G(K)$, коэффициенты которых лежат в P. Имеет место включение $G(P) \subset G_P$, если же P — поле, то группы $G(P)$ и G_P совпадают.

В следующих трех леммах предполагаем, что K — поле частных кольца главных идеалов R.

ЛЕММА 1 ([6, лемма 49(д), с. 106]). *Пусть ϕ_r — канонический гомоморфизм группы $SL_2(K)$ на группу $\langle x_r(K), x_{-r}(K)\rangle$, продолжающий* *отображение*

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_r(t), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \to x_{-r}(t), \quad \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \to h_r(t).$$

Положим $G_R^r = G_R \cap \langle x_r(K), x_{-r}(K) \rangle$, $r \in \Phi$. *Тогда* $\phi_r SL_2(R) = G_R^r$.

ЛЕММА **2**([6, следствие 2, с. 107]). *Пусть* G_R^r *— подгруппа из леммы 1. Тогда* $G_R = \langle G_R^r \mid r \in \Phi \rangle$.

ЛЕММА **3**([6, теор. 21, с. 109]). *Пусть подмножество* $H^+ \subset \subset H(K)$ *состоит из таких элементов* h, *что*

$$hx_r(1)h^{-1} = x_r(t_{r,h}) \quad \text{где } r \in \Phi^+, \quad t_{r,h} \in R.$$

Тогда $G = G_R H^+ G_R$.

Разложение группы G из леммы 3 называют разложением Картана.

§ 2. Критерий принадлежности диагонального элемента элементарной подгруппе Шевалле

ЛЕММА 4. *Пусть* $n = l+1, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 1, 1$, *если соответственно* Φ *типа* A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. *Пусть* K *— коммутативное кольцо с единицей,* P *— его подкольцо. Если из включения* $t^n \in P$ *следует включение* $t \in P$ *и диагональный элемент* $h \in H(K)$ *нормализует подгруппу* $G(P)$, *то* $h \in G(P)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Число n из леммы 4 совпадает с индексом аддитивной группы корней в группе фундаментальных весов, исключая типы D_l и E_8, для последних индекс равен 4 и 1 соответственно. Неизвестно, можно ли для типа E_8 понизить число n с 3 до 1?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 4. Приведем явный вид матриц Картана (упорядочение корней такое же, как в [7]).

$$A_l: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 0 & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & 0 & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B_l: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 0 & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & 0 & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_l: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 0 & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & 0 & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D_l: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 0 & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & 0 & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$E_6: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$E_7: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$E_8: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$F_4: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$G_2: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Элементами матриц Картана являются числа $A_{r_i,r_j} = \frac{2(r_j,r_i)}{(r_i,r_i)}$. Для системы корней Φ ранга l и $h \in H(K)$, где

$$h = h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2)\dots h_{r_l}(t_l), \quad t_i \in K^*,$$

вычислим

$$hx_{r_i}(1)h^{-1} = x_{r_i}\left(t_1^{k_1}t_2^{k_2}\dots t_l^{k_l}\right), \tag{Φ_i}$$

где $i = 1, 2, \dots, l$, а $k_j = A_{r_i,r_j}$, и отдельно находим

$$hx_{r_i+r_2+\dots+r_l}(1)h^{-1} = x_r\left(t_1^{q_1}t_2^{q_2}\dots t_l^{q_l}\right), \tag{Φ_0}$$

где $q_j = \sum\limits_{s=1}^{l} A_{r_j,r_s}$.

Отметим, что если из равенств (Φ_i) следует включение $t \in P$ для некоторого $t \in K$, то и $\frac{1}{t} \in P$, поскольку

$$hx_{-r_i}(1)h^{-1} = x_{-r_i}\left(t_1^{-k_1}t_2^{-k_2}\dots t_l^{-k_l}\right).$$

Далее этот факт мы будем использовать без пояснения.

Рассмотрим отдельно каждый из типов и покажем, что $h \in G(P)$.

Тип A_l. В силу $(A_1), (A_2), \dots, (A_l), (A_0)$ имеем соответственно

$$t_1^2t_2^{-1} \in P, \quad t_1^{-1}t_2^2t_3^{-1} \in P, \quad \dots, \quad t_{l-1}^{-1}t_l^2 \in P, \quad t_1t_l \in P.$$

Перемножим элементы из (A_1) и (A_2), получим

$$t_1t_2t_3^{-1} \in P. \tag{A_1^*}$$

Перемножим элементы из (A_1^*) и (A_3), тогда

$$t_1t_3t_4^{-1} \in P. \tag{A_2^*}$$

Продолжим этот процесс и перемножим (A^*_{l-3}) и (A_{l-1}), тогда

$$t_1 t_{l-1} t_l^{-1} \in P. \qquad (A^*_{l-2})$$

Перемножим элементы из $(A^*_1), (A^*_2), \ldots, (A^*_{l-2})$, получим

$$t_1^{l-2} t_2 t_l^{-1} \in P. \qquad (A^*_0)$$

Далее из (A^*_0) и (A_0) следует включение $t_1^{l-1} t_2 \in P$. Наконец, умножим данный элемент на элемент из (A_1), тогда $t_1^{l+1} \in P$. По условию леммы $n = l+1$, поэтому, в силу предположения, $t_1 \in P$. Из включений, указанных в начале этого абзаца, вытекает, что все t_i лежат в кольце P. Следовательно, $h \in G(P)$.

Тип B_l. В силу (B_1), (B_2), …, (B_l), (B_0) имеем соответственно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P, \quad t_1^{-1} t_2^2 t_3^{-1} \in P, \ldots, t_{l-3}^{-1} t_{l-2}^2 t_{l-1}^{-1} \in P,$$

$$t_{l-2}^{-1} t_{l-1}^2 t_l^{-2} \in P, \quad t_{l-1}^{-1} t_l^2 \in P, \quad t_1 \in P.$$

Отсюда $t_1 \in P$, $t_2 \in P, \ldots, t_{l-1} \in P$, $t_l^2 \in P$. По условию леммы $n = 2$, значит, и $t_l \in P$, т. е. $h \in G(P)$.

Тип C_l. В силу (C_1), (C_2), …, (C_l), (C_0) имеем соответственно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P, \; t_1^{-1} t_2^2 t_3^{-1} \in P, \ldots, \; t_{l-2}^{-1} t_{l-1}^2 t_l^{-1} \in P, \; t_{l-1}^{-2} t_l^2 \in P, \; t_1 t_{l-1}^{-1} t_l \in P.$$

Возведем в квадрат элемент из (C_0) и умножим на $(t_{l-1}^{-2}, t_l^2)^{-1}$, получим $t_1^2 \in P$. Отсюда в силу предположения леммы $t_1 \in P$. Из указанных выше включений находим, что все t_i лежат в кольце P, т. е. $h \in G(P)$.

Тип D_l. В силу (D_1), $(D_2), \ldots, (D_l)$ и (D_0) имеем соответственно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P, \; t_1^{-1} t_2^2 t_3^{-1} \in P, \ldots, \; t_{l-4}^{-1} t_{l-3}^2 t_{l-2}^{-1} \in P, \; t_{l-3}^{-1} t_{l-2}^2 t_{l-1}^{-1} t_l^{-1} \in P,$$

$$t_{l-2}^{-1} t_{l-1}^2 \in P, \; t_{l-2}^{-1} t_l^2 \in P, \; t_1 t_{l-2}^{-1} t_{l-1} t_l \in P.$$

Из (D_{l-1}) и (D_l) имеем

$$t_{l-1}^2 t_l^{-2} \in P, \qquad (D^*_1)$$

$$t_1 t_{l-1}^{-1} t_l \in P \text{ (из } (D_{l-1}) \text{ и } (D_0)), \qquad (D^*_2)$$

$$t_1^2 \in P \text{ (из } (D_1^*) \text{ и } (D_2^*)).$$

По условию леммы $n = 2$, поэтому и $t_1 \in P$, следовательно, все t_i лежат в кольце P, т. е. $h \in G(P)$.

Тип E_6. В силу $(E_1), (E_2), \dots, (E_6)$ и (E_0) имеем соответственно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P,\ t_1^{-1} t_2^2 t_3^{-1} \in P,\ t_2^{-1} t_3^2 t_4^{-1} t_5^{-1} \in P,\ t_3^{-1} t_4^2 \in P,$$

$$t_3^{-1} t_5^2 t_6^{-1} \in P,\ t_5^{-1} t_6^2 \in P,\ t_1 t_3^{-1} t_4 t_6 \in P.$$

Из (E_5) и (E_6) получаем

$$t_1^{-1} t_3^3 t_4^{-2} t_5^{-2} \in P, \tag{E_1^*}$$

$$t_1^{-1} t_3^2 t_5^{-2} \in P \text{ (из } (E_4) \text{ и } (E_1^*)), \tag{E_2^*}$$

$$t_3^{-1} t_6^3 \in P \text{ (из } (E_5) \text{ и } (E_6)), \tag{E_3^*}$$

$$t_4^{-2} t_6^3 \in P \text{ (из } (E_4) \text{ и } (E_3^*)), \tag{E_4^*}$$

$$t_1^{-1} t_3^2 t_6^{-4} \in P \text{ (из } (E_6) \text{ и } (E_2^*)), \tag{E_5^*}$$

$$t_1 t_4^2 t_6^{-2} \in P \text{ (из } (E_0) \text{ и } (E_5^*)), \tag{E_6^*}$$

$$t_1 t_4^{-1} t_6 \in P \text{ (из } (E_4) \text{ и } (E_0)), \tag{E_7^*}$$

$$t_1^{-2} t_6 \in P \text{ (из } (E_4^*) \text{ и } (E_7^*)), \tag{E_8^*}$$

$$t_1 t_6 \in P \text{ (из } (E_4^*) \text{ и } (E_6^*)), \tag{E_9^*}$$

$$t_1^3 \in P \text{ (из } (E_8^*) \text{ и } (E_9^*)).$$

По условию леммы $n = 3$, поэтому и $t_1 \in P$. Из равенств $(E_1), (E_2), \dots$ $\dots, (E_6)$ и (E_0) легко получаем, что и все оставшиеся элементы t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 лежат в подкольце P, т. е. $h \in G(P)$.

Далее выражения (Φ_i) для типа E_7 обозначим через $(\bar{E}_i)$, а для типа E_8 — через $(\tilde{E}_i)$.

Тип E_7. В силу $(\bar{E}_1), (\bar{E}_2), \dots, (\bar{E}_7)$ и $(\bar{E}_0)$ имеем соответственно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P, \dots,\ t_3^{-1} t_4^2 t_5^{-1} t_6^{-1} \in P,\ t_4^{-1} t_5^2 \in P,$$

$$t_4^{-1} t_6^2 t_7^{-1} \in P,\ t_6^{-1} t_7^2 \in P,\ t_1 t_4^{-1} t_5 t_7 \in P.$$

Из $(\bar{E}_1)$ и $(\bar{E}_2)$ получаем

$$t_2^3 t_3^{-2} \in P, \qquad (\bar{E}_1^*)$$

$$t_3^4 t_4^{-3} \in P \ (\text{из } (\bar{E}_1^*) \text{ и } (\bar{E}_3)), \qquad (\bar{E}_2^*)$$

$$t_3^5 t_5^{-3} t_6^{-3} \in P \ (\text{из } (\bar{E}_2^*) \text{ и } (\bar{E}_4)), \qquad (\bar{E}_3^*)$$

$$t_3^{-1} t_5^3 t_6^{-1} \in P \ (\text{из } (\bar{E}_4) \text{ и } (\bar{E}_5)), \qquad (\bar{E}_4^*)$$

$$t_3^4 t_6^{-4} \in P \ (\text{из } (\bar{E}_3^*) \text{ и } (\bar{E}_4^*)), \qquad (\bar{E}_5^*)$$

$$t_1^3 t_3^{-1} \in P \ (\text{из } (\bar{E}_1) \text{ и } (\bar{E}_2)), \qquad (\bar{E}_6^*)$$

$$t_1^{-2} t_4 t_7^{-2} \in P \ (\text{из } (\bar{E}_5) \text{ и } (\bar{E}_0)), \qquad (\bar{E}_7^*)$$

$$t_1^{-2} t_6^2 t_7^{-3} \in P \ (\text{из } (\bar{E}_7^*) \text{ и } (\bar{E}_6)), \qquad (\bar{E}_8^*)$$

$$t_1^{-4} t_6 \in P \ (\text{из } (\bar{E}_8^*) \text{ и } (\bar{E}_7)), \qquad (\bar{E}_9^*)$$

$$t_3^{-4} t_6^3 \in P \ (\text{из } (\bar{E}_6^*) \text{ и } (\bar{E}_9^*)), \qquad (\bar{E}_{10}^*)$$

$$t_6 \in P \ (\text{из } (\bar{E}_{10}^*) \text{ и } (\bar{E}_5^*)).$$

В силу $(\bar{E}_7)$ имеем $t_7^2 \in P$, следовательно, и $t_1 \in P$, $t_2 \in P, \ldots, t_7 \in P$, т.е. $h \in G(P)$.

Тип E_8. В силу $(\tilde{E}_1), (\tilde{E}_2), \ldots, (\tilde{E}_8)$ и $(\tilde{E}_0)$ имеем соответсвенно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P, \ldots, \ t_4^{-1} t_5^2 t_6^{-1} t_7^{-1} \in P, \ t_5^{-1} t_6^2 \in P, \ t_5^{-1} t_7^2 t_8^{-1} \in P,$$

$$t_7^{-1} t_8^2 \in P \text{ и } t_1 t_5^{-1} t_6 t_8 \in P.$$

Из $(\tilde{E}_1)$ и $(\tilde{E}_2)$ получаем

$$t_2^3 t_3^{-2} \in P, \qquad (\tilde{E}_1^*)$$

$$t_1^3 t_3^{-1} \in P, \qquad (\tilde{E}_2^*)$$

$$t_3^4 t_4^{-3} \in P \ (\text{из } (\tilde{E}_1^*) \text{ и } (\tilde{E}_3)), \qquad (\tilde{E}_3^*)$$

$$t_1^{12} t_4^{-3} \in P \ (\text{из } (\tilde{E}_2^*) \text{ и } (\tilde{E}_3^*)), \qquad (\tilde{E}_4^*)$$

$$t_4^5 t_5^{-4} \in P \ (\text{из } (\tilde{E}_3^*) \text{ и } (\tilde{E}_4)), \qquad (\tilde{E}_5^*)$$

$$t_4^3 t_6^{-2} t_7^{-2} \in P \ (\text{из } (\tilde{E}_5^*) \text{ и } (\tilde{E}_5)), \qquad (\tilde{E}_6^*)$$

$$t_4^{-1} t_6^3 t_7^{-1} \in P \ (\text{из } (\tilde{E}_5) \text{ и } (\tilde{E}_6)), \qquad (\tilde{E}_7^*)$$

$$t_4^7 t_7^{-8} \in P \text{ (из } (\tilde{E}_6^*) \text{ и } (\tilde{E}_7^*)), \qquad (\tilde{E}_8^*)$$

$$t_1^{-2} t_5 t_8^{-2} \in P \text{ (из } (\tilde{E}_6) \text{ и } (\tilde{E}_0)), \qquad (\tilde{E}_9^*)$$

$$t_1^{-2} t_7^2 t_8^{-3} \in P \text{ (из } (\tilde{E}_7) \text{ и } (\tilde{E}_9^*)), \qquad (\tilde{E}_{10}^*)$$

$$t_1^{-4} t_7 \in P \text{ (из } (\tilde{E}_{10}^*) \text{ и } (\tilde{E}_8)), \qquad (\tilde{E}_{11}^*)$$

$$t_4^{-3} t_7^3 \in P \text{ (из } (\tilde{E}_4^*) \text{ и } (\tilde{E}_{11}^*)). \qquad (\tilde{E}_{12}^*)$$

Наконец, из $(\tilde{E}_8^*)$ и $(\tilde{E}_{12}^*)$ получаем $t_7^3 \in P$. Значит, в силу предположения $t_7 \in P$, а следовательно, $t_1 \in P$, $t_2 \in P, \dots, t_8 \in P$, т. е. $h \in G(P)$.

Тип F_4. В силу (F_1), (F_2), (F_3), (F_4) и (F_0) имеем соответственно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P, \ t_1^{-1} t_2^2 t_3^{-2} \in P, \ t_2^{-1} t_3^2 t_4^{-1} \in P, \ t_3^{-1} t_4^2 \in P, \ t_1 t_3^{-1} t_4 \in P.$$

Из (F_4) и (F_0) следует, что

$$t_1 t_4^{-1} \in P, \qquad (F_1^*)$$

$$t_1^{-2} t_3 \in P, \qquad (F_2^*)$$

$$t_2^{-1} t_3 t_4 \in P. \qquad (F_3^*)$$

Далее, перемножая (F_1) и (F_2^*), находим

$$t_2^{-1} t_3 \in P. \qquad (F_4^*)$$

Из (F_3^*) и (F_4^*) получаем $t_4 \in P$, а используя (F_1^*), имеем $t_1 \in P$. Далее по аналогии с предыдущими случаями $t_2 \in P$, $t_3 \in P$ и, следовательно, $h \in G(P)$.

Тип G_2. В силу (G_1), (G_2) имеем соответственно

$$t_1^2 t_2^{-1} \in P, \ t_1^{-3} t_2^2 \in P.$$

Отсюда легко следует, что $t_1, t_2 \in P$, т. е. $h \in G(P)$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Итак, K — поле частных кольца главных идеалов R, и подгруппа M удовлетворяет условию (1). Покажем, что $M = G_P$ для некоторого промежуточного подкольца P ($R \subseteq P \subseteq K$).

По лемме 3 выполняется $M = \langle G_R, A\rangle$, для некоторого подмножества $A \subset H^+$. Положим

$$M \cap x_r(K) = x_r(P_r), \quad r \in \Phi,$$

и рассмотрим в M подгруппу $M_r = \langle G_R^r, x_r(P_r), x_{-r}(P_{-r})\rangle$, где подгруппа G_R^r такая же, как и в лемме 1. Подгруппа M_r удовлетворяет условию (1) (это случай Φ типа A_1), и в силу [1, 2] имеем $M_r = G_{P_r}^r$. В частности, $P_r = P_{-r}$ и является промежуточным подкольцом для любого $r \in \Phi$. Покажем, что все P_r совпадают с некоторым подкольцом P.

Мономиальная подгруппа $\langle n_r(-1) \mid r \in \Phi\rangle$ лежит в M по условию и действует транзитивно на множестве корневых подгрупп, индексированных корнями одинаковой длины. Отсюда $P_r = P_s$, если корни r и s одной длины.

Пусть корни r и s имеют разную длину. Покажем, что $P_r = P_s$. Не теряя общности, можно считать, что $(r, s) < 0$. Пусть $\frac{1}{t} \in P_r$, $t \in R$, тогда диагональный элемент $h_r(t)$ лежит в M. Поскольку

$$h_r(t)x_s(1)h_r(t)^{-1} = x_s\left(t^{2(r,s)/(r,r)}\right),$$

то $\frac{1}{t^n} \in P_s$ для некоторого целого $n > 0$. Отсюда и в силу того, что P_s является R-модулем, справедливо $\frac{1}{t} \in P_s$. Промежуточные подкольца P_r и P_s порождаются кольцом R и своими элементами вида $\frac{1}{t}$, где $t \in R$. Следовательно, $P_r \subseteq P_s$. Включение в обратную сторону показывается аналогично.

Таким образом, существует промежуточное подкольцо $P \subset K$ такое, что для любого $r \in \Phi$ справедливо $M \cap x_r(K) = x_r(P)$ и $G_P^r \subset M$. По лемме 2 подгруппы $G_P^r, r \in \Phi$, порождают подгруппу G_P и, следовательно, последняя лежит в M. Отсюда $M = \langle G_P, A\rangle$, и диагональная подгруппа

$\langle A \rangle$ нормализует элементарную группу Шевалле $G(P) \subset G_P$. Значит, по лемме 4, $A \subset G(P)$ и $M = G_P$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. С. Романовский*, Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом, Матем. заметки, **6**, N 3 (1969), 335—345.
2. *Р. А. Шмидт*, О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца главных идеалов, Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, **86** (1979), 185—187.
3. *Р. А. Шмидт*, О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца, Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, **94** (1979), 119—130.
4. *Р. А. Шмидт*, О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца Безу, в кн. "Структурные свойства алгебраических систем", Нальчик, 1981, 133—135.
5. *А. И. Шкуратский*, О подгруппах симплектической группы над полем частных евклидова кольца, Алгебра и логика, **23**, N 5 (1984), 578—596.
6. *Р. Стейнберг*, Лекции о группах Шевалле, М., Мир, 1975.
7. *R. W. Carter*, Simple groups of Lie type, London, Wiley, 1972.

Адрес авторов:

Поступило 28 декабря 1998 г.

НУЖИН Яков Нифантьевич,
ЯКУШЕВИЧ Анна Валерьевна,
РОССИЯ,
660074, г. Красноярск,
ул. Киренского, 26,
Красноярский государственный
технический университет.
e-mail: nuzhin@tect.kgtu.runnet.ru