V. I. Sushchanskii, Wreath products and factorizable groups, *Algebra i Analiz*, 1994, Volume 6, Issue 1, 203–238

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 1

СПЛЕТЕНИЯ И ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ

В. И. Сущанский

В работе предлагается общий метод построения бесконечных групп, разложимых в произведение нескольких подгрупп, основанный на использовании сплетений по бесконечным последовательностям групп подстановок в смысле [1, 2]. С его помощью конструируются финитно аппроксимируемые π-группы ($|\pi| < \infty$), которые факторизуются локально конечными π'-группами ($\pi' \subset \pi$), но сами локально конечными не являются, а также смешанные финитно аппроксимируемые группы, разложимые в произведение своих локально конечных π-подгрупп, что позволяет дать ответ на несколько известных в теории факторизуемых групп вопросов. Частный случай рассматриваемой конструкции, позволяющий строить финитно аппроксимируемые p-группы, разложимые в произведение своих локально конечных подгрупп, предложен нами ранее в [3]. Основные результаты данной работы докладывались на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти А. И. Мальцева (Новосибирск, 1989 г.) и анонсированы в [4, 5].

Более подробно, в §1 суммируются необходимые сведения о сплетениях по бесконечным последовательностям групп подстановок (так называемым l-сплетениям). В §2 изучаются подгруппы l-сплетений циклических групп простых степеней, порожденные элементами специального вида — α-таблицами и $\alpha\beta$-таблицами. Эти таблицы выделяются с помощью условий, накладываемых на определенные их характеристики. Впервые условия такого типа для автоматных отображений появились еще в работе [6]. Понятие α-таблицы было введено нами в [7]. Аналогичного вида ограничения можно выделить также в работах [8, 9] и некоторых других. Мы находим достаточно естественные условия бесконечности подгрупп, порожденных α-таблицами и периодичности подгрупп, порожденных $\alpha\beta$-таблицами (а также некоторыми их обобщениями). Тем самым возникает обширный класс не локально конечных периодических подгрупп в указанных l-сплетениях. В §3 описывается конструкция, позволяющая выделить подгруппы l-сплетений, разложимые в общее произведение нескольких множителей. В §4 строятся нужные для дальнейшего примеры конечнопорожденных бесконечных периодических групп. В §5 и 6 доказываются следующие две теоремы.

Теорема А. *Для любых конечных наборов* $\pi_1, \dots, \pi_s$ $(s \geqslant 2)$ *простых чисел существует финитно аппроксимируемая* π*-группа* $U\bigl(\pi = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \pi_i\bigr)$ *со следующими свойствами:*

Ключевые слова: сплетение групп, l-сплетения, факторизуемые группы.

1) *U раскладывается в произведение своих попарно перестановочных в целом подгрупп $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_s$;*

2) *для любого j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ выполнено равенство*

$$\mathcal{A}_j \cap \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{j-1}, \mathcal{A}_{j+1}, \dots, \mathcal{A}_s \rangle = \{1\};$$

3) *U не является локально конечной;*

4) *для каждой выборки $j_1, \dots, j_k$ из множества $\{1, 2, \dots, s\}$ $(k < s)$ подгруппа $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ группы U локально конечная.*

Теорема B. *Для любых конечных наборов $\pi_1, \dots, \pi_s$ $(s \geqslant 2)$ простых чисел существует финитно аппроксимируемая группа U со следующими свойствами:*

1) *U раскладывается в произведение своих попарно перестановочных в целом π_i-подгрупп $\mathcal{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$;*

2) *U содержит элементы бесконечного порядка;*

3) *для любого j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ выполнено равенство*

$$\mathcal{A}_j \cap \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{j-1}, \mathcal{A}_{j+1}, \dots, \mathcal{A}_s \rangle = \{1\};$$

4) *для каждой выборки $j_1, \dots, j_k$ из множества $\{1, \dots, s\}$ $(k < s)$ подгруппа $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ локально конечна.*

Из теоремы A, в частности, следует, что существуют группы, разложимые в произведение двух локально конечных подгрупп, но не являющиеся локально конечными, т.е. ответ на вопрос 2.83 из [10] отрицателен, причем даже в классе p-групп.

Из теоремы B получаем, в частности, что для любого простого числа p существует группа, разложимая в произведение p-подгрупп, но не являющаяся p-группой или разложимая в произведение локально конечных p-подгруппы и q-подгруппы, но не являющаяся $\{p, q\}$-группой. Тем самым отрицательный ответ на вопрос 1.36 из [10] получен для любого простого числа p. Ранее ответ на этот вопрос был дан при некоторых (бесконечно многих) значениях [11]. Построенная в [11] группа периодическая и не является p-группой, так как в ней имеются элементы порядка, взаимно простого с p. Пример непериодической группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами построен в [12]. Из теоремы B следует, что такие примеры существуют уже в классе финитно аппроксимируемых групп.

§1. l-сплетения групп подстановок. Орбиты и расширенные орбиты элементов l-сплетений

Сплетение по бесконечной последовательности групп подстановок $(G_1, \mathcal{M}_1)$, $(G_2, \mathcal{M}_2), \dots$ или, кратко, их l-сплетением называется [1, 2] группа $G = \wr_{i \in N} G_i$, состоящая из всевозможных преобразований φ множества $\mathcal{M} = \prod_{i \in N} \mathcal{M}_i$, действие которых на любой элемент $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условиям:

а) значение i-й координаты y_i элемента $\bar{y} = \bar{x}^{\varphi}$ зависит лишь от i первых координат $x_1, x_2, \dots, x_i$ элемента $\bar{x}$ (и преобразования φ);

б) при фиксированных значениях $x_1^0, \dots, x_{i-1}^0$ отображение $g_i(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0)\colon x_i \to y_i$, индуцируемое преобразованием φ, будет подстановкой на множестве $\mathcal{M}_i$, которая содержится в группе G_i. Из а) и б) следует, что любая подстановка, содержащаяся в $\wr_{i \in N} G_i$, однозначно характеризуется бесконечным набором вида

$$u = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots], \tag{1.1}$$

где $g_1 \in G_1$, $g_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = g_i(\bar{x}_{i-1}) \in G_i^{\mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_{i-1}}$, который, следуя [1], будем называть таблицей. Таблица (1.1) действует на элемент $(m_1, m_2, \dots) \in \mathcal{M}$, согласно равенству

$$(m_1, m_2, m_3, \dots)^u = (m_1^{g_1}, m_2^{g_2(m_1)}, m_3^{g_3(m_1, m_2)}, \dots). \tag{1.2}$$

Такому действию соответствует следующее правило умножения таблиц

$$u = [g_1, g_2(x_1), \dots], \qquad v = [h_1, h_2(x_1), \dots]:$$
$$uv = [g_1 h_1, g_2(x_1) h_2(x_1^{g_1}), g_3(x_1, x_2) h_3(x_1^{g_1}, x_2^{g_2(x_1)}), \dots]. \tag{1.3}$$

Тождественное преобразование характеризуется таблицей $e = [\varepsilon, \varepsilon, \dots]$, где ε — либо единичная подстановка (на $\mathcal{M}_1$), либо тождественно равная единичной подстановке функция. Учитывая (1.3), обратной к (1.1), будет таблица

$$u^{-1} = [g_1^{-1}, g_2^{-1}(x_1^{g_1^{-1}}), g_3^{-1}(x_1^{g_1^{-1}}, x_2^{g_2^{-1}(x_1^{g_1^{-1}})}), \dots]. \tag{1.4}$$

Пусть $\bar{x}_n$ — начало длины n последовательности $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{M}$, т.е. $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$, u_n — начальный отрезок длины n таблицы u вида (1), т.е. $u_n = [g_1, g_2(\bar{x}_1), \dots, g_n(\bar{x}_{n-1})]$, $[u]_n = g_n(\bar{x}_{n-1})$ — n-я координата таблицы u. Равенства (1.3) и (1.4) можно переписать в координатной форме:

$$[uv]_n = g_n(\bar{x}_{n-1}) h_n(\bar{x}_{n-1}^{u_{n-1}}); \tag{1.5}$$

$$[u^{-1}]_n = g_n^{-1}(\bar{x}_{n-1}^{u_{n-1}^{-1}}) \qquad (n \in N). \tag{1.6}$$

Таблица u имеет глубину n, если $u_n = \bar{e}$, $[u]_{n+1} \neq \varepsilon$. Все таблицы глубины $\geqslant n$ образуют нормальный делитель ${}^{(n)}G$ группы G, причем $G/{}^{(n)}G$ изоморфна сплетению $\wr_{i=1}^{n} G_i$ групп подстановок $(G_1, \mathcal{M}_1)$, $(G_2, \mathcal{M}_2), \dots, (G_n, \mathcal{M}_n)$.

Лемма 1.1. *l-сплетение конечных групп подстановок является финитно аппроксимируемой группой.*

Далее предполагается, что группы подстановок $(G_i, \mathcal{M}_i)$ являются конечными, т.е. $|\mathcal{M}_i| < \infty$ для всех $i \in N$.

Множество начал длины n последовательностей из $\mathcal{M}$ будем обозначать $\mathcal{M}^{(n)}$, а группу начал длины n таблиц из G — как $G^{(n)}$. Группа преобразований $(G^{(n)}, \mathcal{M}^{(n)})$ подобна сплетению $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} G_i$. Проектирование $\delta_n\colon \mathcal{M}^{(n+1)} \to \mathcal{M}^{(n)}$ кортежей из $\mathcal{M}^{(n+1)}$ по последней координате и естественный эпиморфизм $\varphi_n\colon G^{(n+1)} \to G^{(n)}$, при котором $\varphi_n([g_1, \ldots, g_{n+1}(\bar{x}_n)]) = [g_1, \ldots, g_n(\bar{x}_{n-1})]$ согласованы для всех $n \in N$. Это позволяет сводить изучение орбит преобразования u к исследованию соответствующих орбит преобразований u_n, $n \in N$. Более точно, орбита u на любой последовательности $\bar{x} \in \mathcal{M}$ однозначно определяется последовательностью k-орбит $\langle \mathcal{O}_k(u,\bar{x}) = \mathcal{O}(u_k, \bar{x}_k) | k \in N\rangle$. Соседние члены $\mathcal{O}_k(u,\bar{x})$ и $\mathcal{O}_{k+1}(u,\bar{x})$ последовательности k-орбит при любом $k \in N$ либо имеют одинаковую длину, либо дл. $\mathcal{O}_k(u,\bar{x}) <$ дл. $\mathcal{O}_{k+1}(u,\bar{x})$. В последнем случае будем говорить, что k-орбита расширяется при переходе к $k+1$-му уровню. Понятно, что при расширении выполняется соотношение дл. $\mathcal{O}_k(u,\bar{x}) |$ дл. $\mathcal{O}_{k+1}(u,\bar{x})$. Пусть k_0 — наименьшее натуральное число такое, что для всех $l > k_0$ l-орбиты $\mathcal{O}_l(u,\bar{x})$ не расширяются, т.е. выполнены равенства дл. $\mathcal{O}_l(u,\bar{x}) =$ дл. $\mathcal{O}_{k_0}(u,\bar{x})$. Тогда, очевидно, дл. $\mathcal{O}(u,\bar{x}) =$ дл. $\mathcal{O}_{k_0}(u,\bar{x})$. Если $k_1, \ldots, k_s$ — все индексы, для которых происходит расширение k-орбит $\mathcal{O}_k(u,\bar{x})$ и $t_i =$ дл. $\mathcal{O}_{k_i+1}(u,\bar{x}) /$ дл. $\mathcal{O}_{k_i}(u,\bar{x})$, то имеет место равенство

$$\text{дл.}\mathcal{O}(u,\bar{x}) = \text{дл.}\mathcal{O}_1(u,\bar{x}) t_1 t_2 \ldots t_s. \tag{1.7}$$

Отсюда сразу получаем следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Преобразование $u \in G$ имеет конечный порядок d тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\bar{x} \in \mathcal{M}$ найдется такой номер $k = k(\bar{x})$, что при любом $l > k(\bar{x})$ l-орбиты $\mathcal{O}_l(u,\bar{x})$ не расширяются, а общий наибольший делитель чисел* дл. $\mathcal{O}_{k(\bar{x})}(u,\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathcal{M}$, *равен d.*

Для l-сплетений транзитивных абелевых групп подстановок формулируется необходимое и достаточное условие нерасширяемости орбит их таблиц, удобное для дальнейших применений.

Лемма 1.3. *Пусть $u = [a_1, a_2(\bar{x}_1), \ldots]$ — таблица l-сплетения транзитивных абелевых групп $(G_i, \mathcal{M}_i)$, $i \in N$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность из $\mathcal{M}$, $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_k(u,\bar{x})$ — k-орбита преобразования u на последовательности $\bar{x}$. Орбита $\mathcal{O}_k$ не расширяется при переходе к $(k+1)$-му уровню тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$\prod_{\bar{y}_k \in \mathcal{O}_k} a_{k+1}(\bar{y}_k) = 1. \tag{1.8}$$

Доказательство см. в [3].

Сформулированные леммы позволяют дать критерий периодичности конечно порожденных подгрупп l-сплетения транзитивных абелевых групп. Пусть W — такая подгруппа, порожденная таблицами $w_i = [a_1^{(i)}, a_2^{(i)}(\bar{x}_1), \dots]$, $i = 1, 2, \dots, s$, каждая из которых имеет конечный порядок. Любой элемент может быть представлен (вообще говоря, неоднозначно) в виде

$$u = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n} (n \geqslant 1, 1 \leqslant i_l \leqslant s, l = 1, \dots, n).$$

Положим $u = [b_1, b_2(\bar{x}_1), \dots]$. Выражая $[u]_{k+1}$ через $(k+1)$-е координаты сомножителей, получим

$$b_{k+1}(\bar{x}_k) = \prod_{j=1}^{n} a_{k+1}^{(i_j)}(\bar{x}_k w_{i_1} \dots w_{i_{j-1}}) \tag{1.9}$$

(здесь и далее в таких записях предполагается, что w_{i_0} — единичная подстановка). Фиксируем некоторую последовательность $\bar{x} \in \mathcal{M}$, и пусть $\mathcal{O} = \mathcal{O}(u, \bar{x})$, $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_k(u, \bar{x}) = \{\bar{x}_k, \bar{x}_k^{u_k}, \dots, \bar{x}_k^{u_k^{r_k-1}}\}$. Действуя на обе части равенства (1.9) преобразованием u_k^r $(0 \leqslant r < r_k)$, получим

$$b_{k+1}(\bar{x}_k^{u_k^r}) = \prod_{j=1}^{n} a_{k+1}^{(i_j)}(\bar{x}_k^{u^r w_{i_1} \dots w_{i_{j-1}}}). \tag{1.10}$$

Перемножая равенства (1.10) и учитывая строение орбиты $\mathcal{O}_k$, будем иметь

$$\prod_{\bar{x}_k \in \mathcal{O}_k} b_{k+1}(\bar{x}_k) = \prod_{r=0}^{r_k-1} \prod_{j=1}^{n} a_{k+1}^{(i_j)}(\bar{x}_k^{u^r w_{i_1} \dots w_{i_{j-1}}}). \tag{1.11}$$

Учитывая (1.11) и лемму 1.3, получаем, что орбита $\mathcal{O}_k(u, \bar{x})$ не расширяется лишь в том случае, когда выполнено соотношение

$$\prod_{r=0}^{r_k-1} \prod_{j=1}^{n} a_{k+1}^{(i_j)}(\bar{x}_k^{u^r w_{i_1} \dots w_{i_{j-1}}}) = 1. \tag{1.12}$$

Число r_k при данном $u \in W$ зависит лишь от выбора последовательности $\bar{x}$ и номера k. Следовательно, выражение из левой части равенства (1.12) однозначно восстанавливается по целочисленному вектору $(i_1, \dots, i_n)$ и последовательности $\bar{x}$. Отсюда получаем следующий критерий периодичности конечно порожденных подгрупп l-сплетений транзитивных абелевых групп.

Теорема 1.1. *Пусть W — подгруппа l-сплетения транзитивных абелевых групп, ограниченных в совокупности степеней, порожденная элементами $w_1, \dots, w_s$, такими, что $[w_i]_k = a_k^{(i)}(\bar{x}_{k-1})$ $(i = 1, \dots, s;\ n \in N)$. Подгруппа W будет периодической тогда и только тогда, когда для любого набора $(i_1, \dots, i_n)$ $(n \in N;\ 1 \leqslant i_l \leqslant s,\ l = 1, \dots, n)$, при произвольном выборе последовательности $\bar{x} \in \mathcal{M}$ число значений k, для которых нарушается соотношение* (1.12), *конечно и не зависит от выбора последовательности $\bar{x}$.*

При учете условий вида (1.12) для элемента $u = w_{i_1} \dots w_{i_n} \in W$ нужно рассматривать мультимножества кортежей из $\mathcal{M}^{(k)} (k \in N)$ вида

$$x_k^{u^2 w_{i_1} \dots w_{i_{j-1}}} \qquad (r = 0, 1, \dots, r_k - 1;\ j = 1, \dots, n). \tag{1.13}$$

Следуя [9], будем называть такое мультимножество расширенной k-орбитой элемента u на последовательности $x \in \mathcal{M}$ и обозначать $\Delta_k(u, \bar{x})$. Число кортежей в этом мультимножестве (учитывая возможные повторения) назовем его длиной и обозначим дл.$\Delta_k(u, \bar{x})$. Вообще говоря, расширенная k-орбита зависит от разложения элемента u в произведение образующих $w_1, w_2, \dots, w_s$. Конкретный вид такого разложения для нас не существен. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении расширенных k-орбит элементов из W будем считать, что их разложение в произведение $w_1, w_2, \dots, w_s$ фиксировано.

Расширенную k-орбиту (1.13) элемента $u = w_{i_1} \dots w_{i_n}$ на последовательности $\bar{x} \in \mathcal{M}$ удобно представлять себе в виде таблицы, в первом столбце которой стоят элементы $\bar{x}_k, \bar{x}_k^{u_k}, \dots, \bar{x}_k^{u_k^{r_k-1}}$ из $\mathcal{O}_k(u, \bar{x})$, а в i-й строке $(0 \leqslant i \leqslant r_k - 1)$ — кортежи $\bar{x}_k^{u_i}, \bar{x}_k^{u_i w_{j_1}}, \dots, \bar{x}_k^{u_i w_{j_1} \dots w_{j_{n-1}}}$. Число элементов такой таблицы равно $n \cdot$ дл.$\mathcal{O}_k(u, \bar{x})$, т.е. выполнено равенство

$$\text{дл.}\,\Delta_k(u, \bar{x}) = n \cdot \text{дл.}\,O_k(u, \bar{x}). \tag{1.14}$$

Фиксируем порядок в $\Delta_k(u, \bar{x})$ по строкам. Учитывая сказанное, равенство (1.12) можно переписать в более компактном виде

$$\prod_{\bar{y}_k \in \Delta_k(u, \bar{x})} a_{k+1}^{(\bar{y}_k)}(\bar{y}_k) = 1, \tag{1.15}$$

где в записи $a_{k+1}^{(\bar{y}_k)}(\bar{y}_k)$ верхний индекс $(\bar{y}_k)$ совпадает с индексом i_j, который однозначно определяется номером элемента $\bar{y}_k$ при указанном упорядочении $\Delta_k(u, \bar{x})$ — он равен вычету этого номера по модулю n.

Определение 1.1. Кортеж $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{M}^{(k)}$ назовем значащим кортежем таблицы $u = [a_1, a_2(x_1), \dots] \in G$, если $a_{k+1}(t_1, \dots, t_k)$ — нееденичная подстановка. Кортеж $(t_1, \dots, t_k)$ начальный для этой таблицы, если существует такой элемент $t_{k+1} \in \mathcal{M}_{k+1}$, что $(t_1, \dots, t_k, t_{k+1})$ является значащим для нее.

Множество значащих кортежей таблицы u обозначим $T(u)$, а множество ее начальных кортежей — $B(u)$. Ряд свойств конечно порожденных подгрупп l-сплетения G выражаются в терминах зависимостей между указанными характеристиками для их порождающих.

Теорема 1.2. *Пусть подгруппа W порождена такими таблицами $w_1, \dots, w_s$ конечного порядка, что каждый кортеж из $B(w_i)$ является продолжением некоторого кортежа из $\bigcup_{i=1}^{s} B(w_i)$, длина которого на единицу меньше $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Если для любого элемента $u \in W$ при произвольном выборе $\bar{x} \in \mathcal{M}$ найдется такое число k, что $B(u) \cap \Delta_k(u, \bar{x}) = \varnothing$, то каждое преобразование из W раскладывается в произведение независимых циклов конечной длины.*

Доказательство. Согласно условию теоремы, для любого $u \in W$ и произвольного $\bar{x} \in \mathcal{M}$ найдется такой номер k_0, что при $l > k_0$ расширенная l-орбита $\Delta_l(u, \bar{x})$ не содержит кортежей из $B(u)$. Следовательно, расширенная $(l+1)$-орбита не содержит кортежей из $T(u)$, т.е. для любого $l > k_0 + 1$ справедливо равенство

$$\prod_{\bar{y}_e \in \Delta_e(u, \bar{x})} a_{e+1}^{(\bar{y}_e)}(\bar{y}_e) = 1.$$

По лемме 1.2 отсюда получаем, что при всех $l > k_0 + 1$ l-орбита $\mathcal{O}_e(u, \bar{x})$ не расширяется, т.е. дл.$\mathcal{O}(u, \bar{x}) =$ дл.$\mathcal{O}_{k_0+1}(u, \bar{x}) < \infty$. Так как это выполнено для всех $x \in \mathcal{M}$, то преобразование u раскладывается в произведение независимых циклов конечной длины и теорема доказана.

§2. Подгруппы l-сплетений циклических групп, порожденные α-таблицами

Пусть $\varkappa = \langle p_1, p_2, \dots \rangle$ — бесконечная последовательность, составленная из конечного числа простых чисел, π — множество всех компонент $\varkappa$, $f_\pi = \prod_{p \in \pi} p$. Для каждого $i \in N$ обозначим символом C_{p_i} регулярную циклическую группу степени p_i и положим $G_\varkappa = \wr_{i=1}^{\infty} C_{p_i}$. Будем считать, что циклическая группа C_{p_i} действует сдвигами $x \to x + a$ на множестве Z_{p_i} вычетов по модулю p_i, а групповая операция в ней записывается аддитивно. Поэтому нейтральным элементом $G_\varkappa$ будет таблица $e = [0, 0, \dots]$, произведением таблиц с координатами $a_i(\bar{x}_{i-1})$ и $b_i(\bar{x}_{i-1})$ будет таблица с координатами $a_i(\bar{x}_{i-1}) + b_i(x_1 + a_1, x_2 + a_2(\bar{x}_1), \dots x_{i-1} + a_{i-1}(\bar{x}_{i-2}))$, а обратной к таблице с координатами $a_i(\bar{x}_{i-1})$ будет таблица с координатами $-a_i(x_1 - a_1, x_2 - a_2(x_1 - a_1), \dots)(i \in N)$.

Пусть $Z_\varkappa = \prod_{i=1}^{\infty} Z_{p_i}$, $Z_\varkappa^{(k)} = \prod_{i=1}^{k} Z_{p_i}$, пр.$\bar{t}_k$ — проекция $\bar{t}_k \in Z_\varkappa^{(k)}$ по последней координате.

Определение 2.1. Множество кортежей $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_\varkappa^{(i)}$ назовем правильным, если из $\bar{t}_k \in \mathcal{A}$ следует пр.$\bar{t}_k \in \mathcal{A}(k > 1)$ и для любого кортежа $\bar{t}_k$ длины k из $\mathcal{A}$ существует и единственный кортеж $\bar{t}_{k+1}$ длины $k+1$ из $\mathcal{A}$ такой, что пр.$\bar{t}_{k+1} = \bar{t}_k$.

Из определения следует, что продолжения кортежей, не содержащихся в $\mathcal{A}$, сами в $\mathcal{A}$ не содержатся. Пересечение и объединение правильных множеств могут таковыми и не быть.

Определение 2.2. Таблицу $u = [a_1, a_2(x_1), \dots]$ назовем α-таблицей, если $B(u)$ содержится в правильном множестве и $B(u) \cap T(u) = \varnothing$.

α-таблицу, для которой существует бесконечно много чисел $k \in N$ таких, что при любом $\bar{t}_k \in Z_\varkappa^{(k)}$ выполнено равенство

$$\sum_{t_{k+1} \in Z_{p_{k+1}}} a(\bar{t}_k, t_{k+1}) = 0, \tag{2.1}$$

будем называть $\alpha\beta$-таблицей.

Единичная таблица удовлетворяет всем требованиям определения 2.2. Однако мы будем рассматривать лишь неединичные α и $\alpha\beta$-таблицы.

Лемма 2.1. *Любая α-таблица имеет конечный порядок, являющийся делителем числа f_π.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что любая α-таблица раскладывается в произведение независимых циклов, длины которых содержатся в π. Пусть u — α-таблица, $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots)$ — последовательность из $Z_\varkappa$, на которую u действует нетривиально, т.е. существует $k \in N$ такое, что $\bar{t}$ и $\bar{t}^u$ отличаются k-й координатой. Поскольку по определению α-таблица может изменить в последовательностях из $Z_\varkappa$ не более одной координаты, то такое число k единственное. Поэтому $\bar{t}_{k-1}^{u_{k-1}^s} = \bar{t}_{k-1}$ для любого $s \in N$ и

$$(\bar{t}^{u^s})_k = t_k + s a_k(\bar{t}_{k-1}),$$

откуда u^{p_k} действует на $\bar{t}$ тривиальным образом, причем p_k — наименьшее такое число. Итак, u имеет на последовательности t орбиту длины p_k, а так как t — произвольная, то все доказано.

Пусть $u = w_{i_1} \dots w_{i_n}$ — разложение таблицы u в произведение таблиц $w_1, \dots, w_s$, $\Delta_k(u, \bar{t})$ — расширенная k-орбита u на $\bar{t} \in Z_\varkappa$, соответствующая этому разложению.

Лемма 2.2. *Для любых $\bar{t} \in Z_\varkappa$, $k \in N$ справедливо одно из равенств*:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \text{дл.}\,\Delta_{k+1}(u, \bar{t}) = \text{дл.}\,\Delta_k(u, \bar{t}); \\ &\text{б)} \quad \text{дл.}\,\Delta_{k+1}(u, \bar{t}) = p_k\,\text{дл.}\,\Delta_k(u, \bar{t}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Доказательство. В силу (1.14) достаточно убедиться, что лишь такие соотношения возможны для чисел дл.$\,\mathcal{O}_{k+1}(u, \bar{t})$, дл.$\,\mathcal{O}_k(u, \bar{t})$. Так как $\mathcal{O}_{k+1} \subseteq \mathcal{O}_k \times Z_{p_{k+1}}$, то $|\mathcal{O}_k| \leqslant |\mathcal{O}_{k+1}| \leqslant p_{k+1}|\mathcal{O}_k|$. Пусть $u = [a_1, a_2(\bar{x}_1), \dots]$, $\mathcal{O}_k = \{\bar{t}_k, \bar{t}_k^u, \dots, \bar{t}_k^{u^{r-1}}\}$, $\bar{t}_{k+1}$ — некоторое продолжение кортежа $\bar{t}_k$. Тогда при любом $l \in N$ имеем

$$\bar{t}_{k+1}^{u^l} = (\bar{t}_k^{u_k^l},\ t_{k+1} + \sum_{i=0}^{l-1} a_{k+1}(\bar{t}_k^{u_k^i})),$$

откуда

$$\bar{t}_{k+1}^{u^r} = (\bar{t}_k,\ t_{k+1} + \sum_{i=0}^{r-1} a_{k+1}(\bar{t}_k^{u_k^i})).$$

Предположим, что $|\mathcal{O}_k| < |\mathcal{O}_{k+1}|$. Тогда $\bar{t}_{k+1}^{u^r} \neq \bar{t}_{k+1}$, т.е.

$$c = \sum_{i=0}^{r-1} a_{k+1}(\bar{t}_k^{u_k^i}) \neq 0.$$

Равенство $\bar{t}_{k+1}^{u^l} = \bar{t}_{k+1}$ возможно лишь тогда, когда r/l. Для таких значений l имеем $\bar{t}_k^{u^l} = \bar{t}_k$, т.е. $\bar{t}_{k+1}^{u^l} = (\bar{t}_k, t_{k+1} + lc/r)$. Наименьшее l, при котором $lc/r = 0$ (в $Z_{p_{k+1}}$) равно $r \cdot p_k$, т.е. $|\mathcal{O}_{k+1}| = p_{k+1}|\mathcal{O}_k|$ и лемма доказана.

По семейству $\Delta_k(u,\bar{t})$, $k \in N$, расширенных k-орбит элемента $u = w_{i_1} \dots w_{i_n}$ с фиксированным разложением в произведение таблиц $w_1, \dots, w_s$ при любом $\bar{t} \in Z_\varkappa$ определим функцию $\tau_{\bar{t},u}(k)$, значение которой в точке $k \in N$ равно числу вхождений из $B(u) = \bigcup_{j=1}^{n} B(w_{i_j})$ в $\Delta_k(u,\bar{t})$.

Лемма 2.3. *Пусть $w_1, \dots, w_s$ — такие α-таблицы, что $B(u)$ содержится в правильном множестве. Тогда при любом $\bar{t} \in Z_\varkappa$ функция $\tau_{\bar{t},u}(k)$ не возрастающая. Если при этом $B(u) \cap T(u) = \varnothing$, $T(u) = \bigcup_{j=1}^{n} T(w_{i_j})$ и k — такой номер, что* дл.$\mathcal{O}_{k-1}(u,\bar{t}) =$ дл.$\mathcal{O}_k(u,\bar{t}) <$ дл.$\mathcal{O}_{k+1}(u,\bar{t})$, *то* $\tau_{\bar{t},u}(k) < \tau_{\bar{t},u}(k-1)$.

Доказательство. Пусть $B(u)$ содержится в правильном множестве $\mathcal{A}$. Для каждого кортежа из $\Delta_k(u,\bar{t})$, который содержится в $B(u)$, существует в точности один кортеж из $\mathcal{A}$, его продолжающий. Поскольку он может и не содержаться в $B(u)$ или $\Delta_{k+1}(u,\bar{t})$, то $\tau_{\bar{t},u}(k+1) \leqslant \tau_{\bar{t},u}(k)$, откуда и следует в силу произвольности выбора k, что $\tau_{\bar{t},u}(k)$ невозрастающая. Предположим, что k — такое число, для которого дл.$\mathcal{O}_{k-1}(u,\bar{t}) =$ дл.$\mathcal{O}_k(u,\bar{t}) <$ дл.$\mathcal{O}_{k+1}(u,\bar{t})$. Так как орбита $\mathcal{O}_k(u,\bar{t})$ расширяется, то соотношение (1.8) или, что то же, (1.15) нарушается. Следовательно, в $\Delta_k(u,\bar{t})$ существуют кортежи из $T(u)$. По условию леммы ни один из них не содержится в $B(u)$, а поскольку дл.$\Delta_{k-1}(u,\bar{t}) =$ дл.$\Delta_k(u,\bar{t})$, то других кортежей, продолжающих их начала из $\Delta_{k-1}(u,\bar{t})$, в $\Delta_k(u,\bar{t})$ нет. Поэтому вхождений кортежей из $B(u)$ в $\Delta_k(u,\bar{t})$ строго меньше, чем в $\Delta_{k-1}(u,\bar{t})$, т.е. $\tau_{\bar{t},u}(k) < \tau_{\bar{t},u}(k-1)$. Лемма доказана.

Определение 2.3. Набор $\alpha\beta$-таблиц $w_1, \dots, w_s$ назовем согласованным, если выполнены следующие условия:

1) множество $\bigcup_{i=1}^{s} B(w_i)$ содержится в некотором правильном множестве;

2) для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant s)$ справедливо равенство $B(w_i) \cap T(w_j) = \varnothing$;

2) для каждого $k \in N$ найдется такой номер $l_k > k$, что при любом выборе $\bar{t} \in Z_\varkappa$ равенства (2.1) для l_k-тых координат $w_1, \dots, w_s$ выполняются одновременно, причем числа $l_k - k$ ограничены в совокупности для всех $\bar{t} \in Z_\varkappa$, $k \in N$.

Теорема 2.1. *Любая подгруппа сплетения $G_\varkappa$, порожденная согласованным набором $\alpha\beta$-таблиц является периодической.*

Доказательство. Пусть W — подгруппа сплетения $G_\varkappa$, порожденная согласованным набором $\alpha\beta$-таблиц $w_1, \ldots, w_s$. По лемме 2.1 они имеют конечный порядок, т.е. каждый элемент из W раскладывается в произведение положительных степеней порождающих. Выберем произвольный элемент $u \in W$ и фиксируем его разложение $u = w_{i_1} \ldots w_{i_n}$ $(1 \leqslant i_e \leqslant s,\ l = 1, \ldots, n)$. Таблица u имеет конечный порядок, если все интервалы подряд идущих значений k, при которых k-орбиты $\mathcal{O}_k(u, \bar{t})$ расширяются, конечны, а их количество и длины ограничены в совокупности по всем $\bar{t} \in Z_\varkappa$. Первое из требований означает, что для каждого номера $k = k(\bar{t}) \in N$ такого, что дл.$\Delta_k(u, \bar{t}) <$ дл.$\Delta_{k+1}(u, \bar{t})$ существует $l_k(\bar{t}) = l_k > k$, при котором дл.$\Delta_{l_k}(u, \bar{t}) =$ дл.$\Delta_{l_k+1}(u, \bar{t})$, причем совокупность чисел $l_k(\bar{t})$, $k \in N$, $\bar{t} \in Z_\varkappa$, ограничена сверху. Пусть при некотором выборе числа k указанного вида интервал подряд стоящих номеров расширяющихся орбит $\Delta_r(u, \bar{t})$ имеет вид $k, k+1, \ldots$. Это означает, что при $r > k$ расширенная r-орбита $\Delta_r(u, \bar{t})$ получается из $\Delta_{r-1}(u, \bar{t})$ приписыванием ко всем кортежам из Δ_{r-1} всевозможных r-х координат (по лемме 2.2). По условию (2.1) определения 2.2 для таблиц $w_1, \ldots; w_s$ существует такое натуральное $l_k > k$, что при любом $i = 1, \ldots, s$ равенство

$$\sum_{\bar{t}_{e_k} \in Z_{p_{e_k}}} a^{(i)}_{e_k}(\bar{t}_{e_k - 1}, t_{e_k}) = 0,$$

где $a^{(i)}_{e_k+1}(\bar{x}_{e_k}) = [w_i]_{e_k+1}$, выполнено для любого кортежа $\bar{t}_{e_k-1} \in Z_\varkappa^{(e_k-1)}$, причем число l_k не превышает некоторой константы c. Учитывая это, для расширенной l_k-орбиты $\Delta_{e_k}(u, \bar{t})$ имеем

$$\sum_{\bar{t}_{e_k} \in \Delta_{e_k}} a^{(\bar{t}_{e_k})}_{e_k+1}(\bar{t}_{e_k}) = \sum_{\bar{t}_{e_k-1} \in \Delta_{e_k-1}} \ \sum_{t_{e_k} \in \bar{Z}_{p_{e_k}}} a^{(\bar{t}_{e_k})}_{e_k+1}(\bar{t}_{e_k-1}, t_{e_k}) = 0,$$

поскольку каждая внутренняя сумма в выражении справа равна 0. Следовательно, для l_k-орбиты $\Delta_{e_k}(u, \bar{t})$ выполнено условие (1.15), т.е. она не расширяется. Итак, длина интервала подряд идущих значений k, при которых $\mathcal{O}_k(u, \bar{t})$ расширяется, не превышает c. Далее, если при некотором $\bar{t} \in Z_\varkappa$ переход к очередному интервалу значений k, для которых $\mathcal{O}_k(u, t)$ расширяются, происходит на m-м шаге, то выполнены соотношения дл.$\mathcal{O}_{m-1} =$ дл.$\mathcal{O}_m <$ дл.$\mathcal{O}_{m+1}$. По лемме 2.3 отсюда следует неравенство $\tau_{\bar{t},u}(m) < \tau_{\bar{t},u}(m-1)$, т.е. значение функции $\tau_{\bar{t},u}$ при переходе от одного такого интервала к другому уменьшается по крайней мере на 1. Если при каком-то k имеем $\tau_{\bar{t},u}(k) = 0$, то при $m \geqslant k$ также $\tau_{\bar{t},u}(m) = 0$ и m-орбиты $\mathcal{O}_m(u, \bar{t})$ не расширяются. Поскольку в силу леммы 2.3 функция $\tau_{\bar{t},u}$ не возрастающая, то количество интервалов подряд идущих номеров k, при которых $\mathcal{O}_k(u, t)$ расширяются, не превосходит $\tau_{\bar{t},u}(1)$, т.е. ограничено числом $\max\{\tau_{\bar{t},u}(1) | \bar{t} \in Z_\varkappa\}$. Теорема доказана.

Бесконечный набор таблиц назовем согласованным, если согласованной является любая его конечная часть.

Теорема 2.1 очевидным образом обобщается на подгруппы сплетения $G_\varkappa$, порождаемые согласованными множествами $\alpha\beta$-таблиц. Она сохраняется при некоторых обобщениях понятия $\alpha\beta$-таблицы. Таблицу u назовем квази-$\alpha\beta$-таблицей (квази-α-таблицей), если она отличается от $\alpha\beta$-таблицы (α-таблицы) некоторым своим началом. Набор квази-$\alpha\beta$-таблиц согласован, если при некотором k их k-е концы образуют согласованный набор $\alpha\beta$-таблиц.

Теорема 2.1$'$. *Любая подгруппа сплетения $G_\varkappa$, порожденная таким множеством квази-$\alpha\beta$-таблиц, каждое конечное подмножество которого согласовано, является периодической.*

Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству теоремы 2.1, и мы его проводить не будем.

Так как финитарная таблица, т.е. таблица с конечным числом ненулевых координат, является квази-$\alpha\beta$-таблицей, то из теоремы 2.1$'$ получаем

Следствие. *Любая подгруппа из $G_\varkappa$, порожденная согласованным набором $\alpha\beta$-таблиц и конечным числом финитарных таблиц, является периодической.*

Рассмотрим теперь, при каких условиях подгруппы из $G_\varkappa$, порожденные α-таблицами, будут бесконечными. Одно из условий очевидно — не все образующие подгруппы должны быть финитарными таблицами.

Символом $*$ обозначим операцию приписывания одного кортежа к другому, т.е. $\bar t_k * \bar t_l$ — кортеж длины $k + l$, первые k координат которого составляют $\bar t_k$, а последние l — кортеж $\bar t_l$. Правый множитель может быть кортежем бесконечной длины.

Пусть W — подгруппа $G_\varkappa$, порожденная α-таблицами $w_1, \dots w_s$, $\bar x_k$, $y_k \in Z_\varkappa$ — кортежи, содержащиеся в одной орбите группы W при ее действии на $Z_\varkappa^{(k)}$. Таблицу $u \in W$ назовем (x_k, y_k) минимальной, если она переводит $\bar x_k$ в $\bar y_k$, а ее разложение в произведение образующих $w_1, \dots, w_s$ имеет наименьшую возможную длину.

Лемма 2.4. *Пусть $\bar x_k, \bar y_k \in Z_\varkappa^{(k)}$ содержатся в одной орбите группы W и u — $(\bar x_k, \bar y_k)$ минимальная таблица. Тогда для любого кортежа $\bar t \in Z_\varkappa$ справедливо равенство*

$$(\bar x_k * \bar t)^u = \bar y_k * \bar t. \tag{2.3}$$

Доказательство. Фиксируем некоторое разложение $u = w_{i_1} \dots w_{i_n}$ таблицы u в произведение образующих w наименьшей возможной длины. В последовательности

$$\bar x_k, \bar x_k^{w_{i_1}}, \dots, \bar x_k^{w_{i_1} \dots w_{i_n}} = \bar x_k^u = \bar y_k$$

каждые два соседние члена различные. Действительно, если это не так, т.е. при некотором l выполнено равенство $\bar{x}_k^{w_{i_1}\dots w_{i_{e-1}}} = \bar{x}_k^{w_{i_1}\dots w_{i_e}}$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$, то букву w_{i_e} можно вычеркнуть из слова u и оставшееся слово снова переведет $\bar{x}_k$ в $\bar{y}_k$, что противоречит минимальности u. Следовательно, каждый множитель w_{i_e}, входящий в разложение u, изменяет хотя бы одну координату в соответствующем кортеже. А поскольку каждая из таблиц w_{i_e} является α-таблицей, то множитель w_{i_e} изменяет только одну координату в любой последовательности из $z_\varkappa$ с началом $x_k^{w_{i_1}\dots w_{i_{e-1}}}$, т.е. имеем

$$(\bar{x}_k * \bar{t})^{w^{i_1}\dots w_{i_e}} = \bar{x}_k^{w_{i_1}\dots w_{i_e}} * \bar{t}.$$

При $l = n$ получаем равенство (2.3) и лемма доказана.

0-спектром таблицы $w = [a_1, a_2(\bar{x}_1), \dots]$ назовем множество $\mathrm{sp}(w)$ всех номеров ее нулевых координат. Множество $\mathrm{sp}(w)$ либо пустое, либо состоит из конечного или бесконечного числа целочисленных интервалов $I_k = [n_k, n'_k](n'_k \geqslant n_k, k = 1, 2, \dots)$. Если число интервалов конечное, то крайний правый из них может быть бесконечным. В этом случае w — финитарная таблица и циклическая группа $\langle w \rangle$ — конечная. 0-спектром набора таблиц $\{\, w_i \mid i \in I \,\}$ назовем множество $\mathrm{sp}\{\, w_i \mid i \in I \,\} = \bigcap\limits_{j \in I} \mathrm{sp}(w_i)$. Очевидно следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Пусть W — подгруппа $G_\varkappa$, порожденная семейством таблиц $\{\, w_i \mid t \in I \,\}$. Тогда* $\mathrm{sp}\, W = \mathrm{sp}\{\, w_i \mid i \in I \,\}$.

Проекцией последовательности $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots) \in Z_\varkappa$ на интервал $I = [n, n']$ назовем кортеж пр.$_I\, \bar{t}(t_n, \dots, t_{n'})$, а проекцией кортежа $\bar{t}_e \in Z_\varkappa^{(e)} (l \geqslant n)$ — кортеж пр.$_I\, \bar{t}_e = (t_n, \dots t_m)$, где $m = \min(n', e)$. Аналогично определяется проекция пр.$\,\bar{t}$, $\bar{t} \in Z_\varkappa$ или $\bar{t} \in Z_\varkappa^{(e)}$ на совокупность непересекающихся интервалов, $I = \bigcup\limits_{j \in J} I_j$. При I-проектировании начала $\bar{t}_e$ длины l последовательности $\bar{t}$ от пр.$\,\bar{t}$ отсекается окончание, образованное теми координатами $\bar{t}$, номера которых больше l.

Пусть $\{I_j\}_{j \in J}$ — набор непересекающихся целочисленных интервалов, $I = \bigcup\limits_{j \in J} I_j$. Каждую последовательность $\bar{t} \in Z_\varkappa$ можно представить в виде

$$\bar{t} = \bar{t}_1 * a_1 * t_2 * a_2 * \dots, \tag{2.4}$$

где $\bar{a}_j =$ пр.$_{I_j}\, \bar{t}$ $(j \in J)$. Для фиксированного $\bar{a} = \bar{a}_1 * \bar{a}_2 * \dots$, дл.$\,a_j = |I_j|$, $j \in J$, положим $Z_{a,I} = \{\bar{t} \in Z_\varkappa |$ пр.$_I\, \bar{t} = a\}$, $0_{\bar{a},I} = \bar{0} * \bar{a}_1 * 0 * a_2 * \dots$, т.е. пр.$_I\, \bar{0}_{\bar{a}} = \bar{a}$ и $\bar{0}_{a,I} \in Z_{\bar{a},I}$, $\bar{Z}_{\bar{a},I}$ — подмножество $Z_{\bar{a},I}$, состоящее из почти совпадающих с $0_{\bar{a},I}$ последовательностей. Если $\{I_j\}_{j \in J}$ — 0-спектр таблицы w, то разложение (2.4) будем называть спектральным разложением $\bar{t}$ относительно w, а конечные или бесконечные кортежи пр.$_I\, \bar{t} = a_1 * a_2 * \dots$ и пр.$_{N'}\, \bar{t} = \bar{t}_1 * \bar{t}_2 * \dots$ — 0-компонентой и N' — компонентой $\bar{t}$ соответственно.

Определение 2.4. Набор таблиц $w_1, \dots w_s$ назовем 0-устойчивым, если координаты 0-компонент спектрального разложения любого кортежа $\bar{t}_e \in \bigcup_{i=1}^{s} T(w_i)$ относительно таблиц $w_1, \dots w_s$ постоянны (не зависят от выбора таблицы и кортежа).

В частности, 0-устойчивым будет каждый набор таблиц $w_1, \dots w_s$, удовлетворяющий условию $\mathrm{sp}(w_1, \dots w_s) = \varnothing$.

Теорема 2.2. *Любая подгруппа группы $G_\varkappa$, порожденная 0-устойчивым набором α-таблиц $w_1 = [1, 0, \dots]$, $w_2, \dots, w_s w (s \geqslant 2)$, действует транзитивно на множестве $\bar{Z}_{a,I}$, $I = \mathrm{sp}(w_1, \dots w_s)$.*

Доказательство. Пусть W — подгруппа, порожденная α-таблицами $w_1, \dots w_s$, $\mathrm{sp}(w_1, \dots w_s) = \{I_j\}_{j \in J}$, $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Покажем, что орбита этой группы, содержащая точку $\bar{0}_{\bar{a},I}$, совпадает с $\bar{Z}_{a,I}$, т.е. для любой последовательности $\bar{x} \in \bar{Z}_{a,I}$ существует такая таблица $u \in W$, что $\bar{O}^{u}_{\bar{a},I} = \bar{x}$. Воспользуемся индукцией по длине k ненулевого начала N'-компоненты последовательности $\bar{x}$. Случай $k = 1$ — база индукции. Поскольку $w_1 = [1, 0, \dots] \in W$, то $N' \ni 1$, т.е. первая координата вектора $\bar{0}_{\bar{a},I}$ нулевая. Если $\tilde{t}_1$ представитель класса вычетов $t_1 \in Z_{p_1}$, то

$$(\bar{0}_{\bar{a},I})^{w_1^{\tilde{t}_1}} = ((0, \dots 0) * \bar{a}_1 * \dots)^{w_1^{\tilde{t}_1}} = (t_1, 0, \dots, 0) * a_1 * \dots$$

и последовательность $\bar{x} = t_1 * \bar{0} * \bar{a}_1 * \dots$ содержится в той же орбите группы W, что и $\bar{0}_{\bar{a},I}$. Предположим, что доказываемое утверждение верно при $k < n$, и убедимся, что оно верно при $k = n$. Координата с номером n в N'-компоненте последовательности $\bar{x}$ имеет какой-то номер n' в самой последовательности $\bar{x}$. Число n' не содержится в 0-спектре группы W, т.е. кортеж $\bar{x}_{n'}$ имеет вид

$$\bar{x}_{n'} = \bar{t}_1 * \bar{a}_1 * \dots \bar{a}_e * \bar{t}_{e+1} * x_{n'}, x_{n'} \in Z_{p_{n'}},$$

где $a_1 * \dots * a_e$ — 0-компонента кортежа $x_{n'}$, а $\bar{t}_{e+1}$ может, в частности, быть и пустым кортежем. Так как $n' \in N'$, то существует такой образующий $w_m (2 \leqslant m \leqslant s)$ группы W, что $[w_m]_{n'} \neq 0$. Предположим, что функция $[w_m]_{n'} = f(\bar{x}_{n'-1})$ принимает ненулевое значение на кортеже $\bar{c}_{n'-1} = \bar{b}_1 * a_1 * \dots * a_e * b_{e+1}$, где $\bar{b}_{e+1}$ может быть пустым. Тогда $f(\bar{c}_{n'-1}) = f$ — подстановка на $z_{p_{n'}}$, содержащаяся в $C_{p_{n'}}$ и отличная от единичной, т.е. $\langle f \rangle = C_{p_{n'}}$. По предположению индукции существует таблица $v \in W$ такая, что

$$(\bar{0} * a_1 * \dots * \bar{0} * \bar{a}_l * 0)^v = \bar{c}_{n'-1}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что она минимальна для этой пары кортежей. Так как $(\langle f \rangle, Z_{p_{n'}})$ — транзитивная группа, то найдется номер i такой, что

$0^{f^i} = x_{n'}$. В силу того, что w — α-таблица, ее n'-я координата $f(x_1, \ldots, x_{n'-1})$ принимает ненулевое значение на кортеже $(t_1, \ldots, t_{n'-1})$, являющимся началом кортежа длины n', на последнюю координату которого w_m действует нетривиально, причем все предыдущие координаты на соответствующих началах этого кортежа принимают нулевое значение. Поэтому i-я степень таблицы w_m действует на кортеж $(t_1, \ldots, t_{n'})$, согласно равенству

$$(t_1, \ldots, t_{n'})^{w_m^i} = (t_1, \ldots, t_{n'-1}, t_{n'} + if(t_1, \ldots, t_{n'-1})).$$

Так как $(\langle f \rangle, Z_{p_{n'}})$ совпадает с $(C_{p_{n'}}, Z_{p_{n'}})$, т.е. f действует сдвигами на $Z_{p_{n'}}$, имеем

$$t_{n'} + if(t_1, \ldots, t_{n'-1}) = t_{n'}^{f^i}.$$

Применяя эти рассуждения в нужном нам случае, получим

$$(\bar{b}_1 * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{b}_{e+1} * \bar{0})^{w_m^i} = \bar{b}_1 * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{b}_{l+1} * \\ (0^{f^i}) = \bar{b}_1 * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{b}_{e+1} * x_{n'}.$$

Снова воспользовавшись предположением индукции, выберем такую таблицу v', чтобы

$$(\bar{b}_1 * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{b}_{e+1})^{v'} = \bar{t}_1 * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{t}_{e+1},$$

причем можно считать, что v' — минимальная для пары кортежей из этого равенства. Тогда имеет место соотношение

$$(\bar{0} * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{0} * 0)^{vw_m^i v'} = \bar{t}_1 * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{t}_{e+1} * x_{n'},$$

а таблица $vw_m^i v'$ минимальная для этой пары кортежей. Согласно лемме 2.5, для любого кортежа $\bar{t}$ получаем

$$(\bar{0} * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{0} * 0 * \bar{t})^{vw_m^i v'} = \bar{t}_1 * \bar{a}_1 * \cdots * \bar{a}_e * \bar{t}_{e+1} * x_{n'} * \bar{t},$$

т.е. для произвольной последовательности $\bar{x} \in \bar{Z}_{a,I}$, ненулевое начало N'-компоненты которой совпадает с $\bar{t}_1 * \cdots * t_{e+1} * x_{n'}$. Найдется такая таблица $u \in W$, что $\bar{0}^u_{\bar{a},I} = \bar{x}$. Тем самым индукционный шаг обоснован и теорема доказана.

Из этой теоремы сразу же получаем следующие условия бесконечности групп, порожденных α-таблицами.

Теорема 2.3. *Группа, порожденная* 0*-устойчивым множеством* α*-таблиц* $w_1 = [1,0,\dots]$, $w_2,\dots,w_s (s \geqslant 2)$ *будет бесконечной тогда и только тогда, когда множество* $N' = N \setminus \mathrm{sp}(w_1,\dots,w_s)$ *является бесконечным.*

Доказательство. Если N' — конечное множество, то $\mathrm{sp}(w_1,\dots,w_s)$ содержит бесконечный интервал. Следовательно, все таблицы $w_2,\dots,w_s$ финитарные и группа W конечна. Пусть N' — бесконечное множество. Тогда $\mathrm{sp}(w_1,\dots,w_s)$ состоит из конечного или бесконечного числа интервалов конечной длины, а, следовательно, для любой последовательности (или кортежа) $\bar{a}$ с разложением $\bar{a} = \bar{a}_1 * \bar{a}_2 * \dots$, компоненты которого определяются длинами интервалов, множества $Z_{\bar{a},I}$ и $\bar{Z}_{\bar{a},I}$ будут бесконечными. По теореме 2.2 группа преобразований $(W, \bar{Z}_{\bar{a},I})$ транзитивная, что возможно лишь тогда, когда W — бесконечная группа. Теорема доказана.

Следствие. *Любая группа, порожденная* α*-таблицами* $w_1 = [1,0,\dots]$, $w_2,\dots,w_s (s \geqslant 2)$ *такими, что* $\mathrm{sp}(w_1,\dots,w_s) = \varnothing$ *является бесконечной.*

Аналогичное утверждение справедливо и для подгрупп, порожденных квази-α-таблицами. Сформулируем его в ослабленной форме, соответствующей формулировке предыдущего следствия.

Теорема 2.3′. *Любая группа, порожденная квази-*α*-таблицами* $w_1 = [1,0,\dots]$, $w_2,\dots,w_s (s \geqslant 2)$ *такими, что* $\mathrm{sp}(w_1,\dots,w_s) = \varnothing$ *является бесконечной.*

§3. Факторизуемые подгруппы l-сплетений

Пусть $(G_1,\mathcal{M}_1), (G_2,\mathcal{M}_2)\dots$ — произвольная последовательность групп подстановок.

$\mathcal{M}$-сечением сплетения $G = \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ ($\mathcal{M} \subset N$, $\mathcal{M} \neq \varnothing$) назовем совокупность G_M таблиц из G, все координаты которых с номерами из $N \setminus \mathcal{M}$ единичные, а остальные — произвольные. Ясно, что G_M является подгруппой G. Каждому разбиению $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i=1}^{n}$ множества N на непересекающиеся подмножества $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_n$ соответствует n подгрупп $G_{M_1},\dots,G_{M_n}$ — сечений сплетения G по множествам $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_n$.

Лемма 3.1 [3]. *Для любого разбиения множества* N *на непересекающиеся подмножества* $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_n$ *сплетение* $G = \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ *разлагается в общее произведение своих попарно перестановочных подгрупп* $G_{M_1},\dots,G_{M_n}$, *т.е. имеет место равенство*

$$G = G_{M_1} \cdot G_{M_2} \cdot \ldots \cdot G_{M_n}. \tag{3.1}$$

Разложения (3.1) позволяют выделять различные подгруппы сплетения G, являющиеся произведением нескольких множителей.

Пусть $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i=1}^{n}$ — разбиение множества N на n частей, $G_{\mathcal{M}_1},\dots,G_{\mathcal{M}_n}$ — сечения группы G, соответствующие его компонентам. Для каждого i ($1 \leqslant i \leqslant n$) фиксируем подмножество $U_0^{(i)} \subset G_{M_i}$ и положим $H_0 = \langle U_0^{(1)},\dots,U_0^{(n)} \rangle$ — подгруппа, порожденная этими подмножествами (нулевой уровень). Если подмножества $U_k^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и подгруппа $H_k = \langle U_k^{(i)} | i = 1, 2, \dots, n\rangle$ k-го уровня уже определены, то подмножества $U_{k+1}^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и подгруппа H_{k+1} $(k+1)$-го уровня задаются равенствами

$$\begin{aligned} U_{k+1}^{(i)} &= \{ u^{[v]} \mid u \in U_k^{(i)}, v \in H_k \}, \\ H_{k+1} &= \langle U_{k+1}^{(i)} \mid i = 1, \dots, n \rangle, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где для таблицы $u = [g_1, g_2(x_1), \dots]$ и произвольной таблицы v символом $u^{[v]}$ обозначена таблица $[g_1, g_2(\bar{x}_1^v), g_3(\bar{x}_2^v), \dots]$. Пусть $U^{(i)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k^{(i)}$, $H(U_0^{(i)})$ — подгруппа, порожденная множеством $U^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $H(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(n)})$ — подгруппа, порожденная всеми множествами $U^{(1)}, \dots, U^{(n)}$. Из (3.2) следует, что $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots$, причем

$$H(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(n)}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *При любом выборе подмножеств $U_0^{(i)}$ в подгруппах $G_{\mathcal{M}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ группа $\mathcal{H}(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(n)})$ разлагается в общее произведение своих перестановочных в целом подгрупп $\mathcal{H}(U_0^{(1)}), \dots, \mathcal{H}(U_0^{(n)})$, т.е. выполнено равенство*

$$\mathcal{H}(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(n)}) = \mathcal{H}(U_0^{(1)}) \dots \mathcal{H}(U_0^{(n)}), \tag{3.4}$$

причем для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, имеем

$$\langle \mathcal{H}(U_0^{(1)}), \dots, \mathcal{H}(U_0^{(j-1)}), \mathcal{H}(U_0^{(j+1)}), \dots, \mathcal{H}(U_0^{(n)}) \rangle \bigcap \mathcal{H}(U_0^{(j)}) = \{e\}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Поскольку подгруппа $\mathcal{H}(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(n)})$ порождается множествами $U^{(1)}, \dots, U^{(n)}$, то она порождается подгруппами $\mathcal{H}(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(n)})$. Поэтому для проверки равенства (3.4) достаточно убедиться, что подгруппы $\mathcal{H}(U_0^{(1)}), \dots, \mathcal{H}(U_0^{(n)})$ попарно коммутируют в целом, т.е. для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ выполнено соотношение $\mathcal{H}(U_0^{(i)})\mathcal{H}(U_0^{(j)}) = \mathcal{H}(U_0^{(j)})\mathcal{H}(U_0^{(i)})$. Пусть $U_0^{(i)} = \{ u_{l_i}^{(i)} \mid l_i \in s_i \}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, а таблицы $u_{l_i}^{(i)}$ заданы своими координатами следующим образом

$$[u_{l_i}^{(i)}]_k = \begin{cases} a_k^{(i,l_i)}(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

($1 \leqslant i \leqslant n$; $k \in N$). Тогда множество $U^{(i)}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) состоит из всевозможных таблиц вида $(u_{l_i}^{(i)})^{[h]}$, $l_i \in s_i$, $h \in H_m$, $m \in N$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что для произвольных таблиц $u \in U^{(i)} \cup (U^{(i)})^{-1}$, $v \in U^{(j)} \cup (U^{(j)})^{-1}$ произведения uv и vu можно записать соответственно, в виде v_1u_1 и v_2u_2, где $u_1, u_2 \in U^{(i)} \cup (U^{(i)})^{-1}$, $v_1, v_2 \in U^{(j)} \cup (U^{(j)})^{-1}$. Убедимся, что это так, рассматривая всевозможные случаи.

а) Пусть $u \in U^{(i)}$, $v \in U^{(j)}$. По определению (3.2) множеств $U_k^{(i)}$, $U_k^{(j)}$, $U^{(i)}$, $U^{(j)}$ существуют таблицы h_1, h_2, содержащиеся при некотором натуральном m в подгруппе H_m и индексы $l_{i_0} \in S_i$, $l_{j_0} \in S_j$ такие, что $u = u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]}$, $v = u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2]}$. Так как $h_1, h_2 \in H_m$, то $u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]} \in U_{m+1}^{(i)}$, $u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2]} \in U_{m+1}^{(j)}$ и, следовательно, $u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]} u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2]} \in H_{m+1}$. Положим

$$h_2' = u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]} h_2, \qquad h_1' = (v_{l_{j_0}}^{(j)[h_2']})^{-1} h_1.$$

По построению имеем $h_1' \in H_{m+2}$, $h_2' \in H_{m+1}$, т.е. таблицы $u_1 = u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1']}$, $v_1 = u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2']}$ содержатся в подмножествах $U^{(i)}$ и $U^{(j)}$ соответственно. Проверим, что они и будут искомыми. Действительно, координаты таблицы uv определяются соотношением

$$[uv]_k = \left[u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]} u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2]}\right]_k = \begin{cases} a_k^{(i,l_{i_0})}(\bar{x}_{k-1}^{h_1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ a_k^{(j,l_{j_0})}\left(\bar{x}_{k-1}^{u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]} h_2}\right) & \text{при } k \in \mathcal{M}_j, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а координаты таблицы v_1u_1 — соотношением

$$[v_1u_1]_k = \left[u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2']} u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1']}\right]_k = \begin{cases} a_k^{(i,l_{i_0})}(\bar{x}_{k-1}^{h_1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ a_k^{(j,l_{j_0})}\left(\bar{x}_{k-1}^{u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]} h_2}\right) & \text{при } k \in \mathcal{M}_j, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как $u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]} h_2 = h_2'$, а $u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2']} h_1' = u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2']} (u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2']})^{-1} h_1 = h_1$, то для всех $k \in N$ выполняется равенство $[uv]_k = [v_1u_1]_k$, следовательно, $uv = v_1u_1$, что и требовалось.

Вполне аналогично проверяется, что для таблиц

$$u_2 = u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1'']}, \qquad v_2 = u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2'']}, \qquad h_1'' = u_{l_{j_0}}^{(j)[h_1]}, \qquad h_2'' = (u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1'']})^{-1} h_2$$

выполнено равенство $vu = u_2v_2$, т.е. случай а) полностью разобран.

б) Пусть $u \in U^{(i)}$, $v \in (U^{(j)})^{-1}$. Тогда $u = u_{l_{i_0}}^{(i)[h_1]}$, $v^{-1} = u_{l_{j_0}}^{(j)[h_2]}$ для некоторых $h_1, h_2 \in H_m$, $m \in N$, и каких-то $l_{i_0} \in S_i$, $l_{j_0} \in S_j$. Положим

$$a_k^{(i,l_{i_0})}(\bar{x}_{k-1}^{h_1}) = b_k(\bar{x}_{k-1})(k \in M_i), a_k^{(j,l_{j_0})}(x_{k-1}^{h_2}) = c_k(\bar{x}_{k-1})(k \in \mathcal{M}_j),$$

т.е.

$$[u]_k = \begin{cases} b_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$[v]_k = \begin{cases} c_k^{-1}(\bar{x}_{k-1}^{v}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_j, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть таблицы $u_1 \in U^{(i)}[u_1]_k = d_k(x_{k-1})(k \in N)$ и $v_1 \in (U^{(j)})^{-1}$, $[v_1]_k = f_k(\bar{x}_{k-1})$ $(k \in N)$, удовлетворяют требуемому равенству, т.е. $uv = v_1u_1$. Тогда для всех $k \in N$ имеем $[uv]_k = [v_1u_1]_k$. Однако

$$[uv]_k = \begin{cases} b_k(x_{k-1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ c_k^{-1}(\bar{x}_{k-1}^{uv}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_j, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$[v_1u_1]_k = \begin{cases} f_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ d_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_j, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому выполнены равенства

$$d_k(\bar{x}_{k-1}^{v_1}) = b_k(\bar{x}_{k-1}), \qquad c_k^{-1}(\bar{x}_{k-1}^{uv}) = f_k(\bar{x}_{k-1}).$$

Из первого равенства имеем

$$d_k(\bar{x}_{k-1}) = b_k(\bar{x}_{k-1}^{v_1^{-1}}).$$

Если $v_1 \in (U^{(j)})^{-1}$, то при некотором m $v_1 \in \mathcal{H}_m$, таблица u_1 в силу предыдущего равенства содержится в $U^{(i)}$. Поэтому достаточно убедиться, что $v_1 \in (U^{(j)})^{-1}$, т.е. $v_1^{-1} \in U^{(j)}$. Но $[v_1^{-1}]_k = c_k(\bar{x}_{k-1}^{(v_1uv)_{k-1}}) = a_k^{(j,l_{j0})}(\bar{x}_{k-1}^{(v_1uvh_2)_{k-1}})$. Так как включение $v_1^{-1} \in U^{(j)}$ равносильно бесконечной совокупности включений $(v_1^{-1})_k \in (U^{(j)})_k$, то можно воспользоваться индукцией по k. База индукции — случай, когда $k = k_0$ — наименьший элемент в $\mathcal{M}_j$. Для него имеем $(v_1)_{k_0-1} = e$, $v_{k_0-1} = e$, т.е. $[v_1^{-1}]_{k_0} = a_{k_0}^{(j,l_{j0})}(\bar{x}_{k_0-1}^{(un_2)_{k_0-1}})$ и $(v_1^{-1})_{k_0} \in (U^{(j)})_{k_0}$. Предположим, что для всех $k < l$ требуемое включение выполнено. Тогда $(v_1)_{e-1} \in (U^{(j)})^{-1}$ и элемент $(v_1uvh_2)_{e-1}$

при некотором m содержится в подгруппе $(Hm)_{e-1}$. Поэтому $(v_1^{-1})_e \in (U^{(j)})_l$, что и требовалось.

Остальные случаи рассматриваются вполне аналогично. Таким образом, учитывая (3.3) получаем, что равенство (3.4) имеет место. Осталось убедиться, что при любом j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ выполнено соотношение (3.5). Это действительно так, поскольку подгруппа $H(U_0^{(j)})$ состоит из таблиц, возможные нееденичные координаты которых имеют номера, содержащиеся в M_j, а подгруппа $\langle H(U_0^{(1)}, \dots, H(U_0^{(j-1)}, H(U_0^{(j+1)}, \dots, H(U_0^{(n)})\rangle$ — из таблиц, возможные неединичные координаты которых имеют номера из $\bigcup\limits_{i \neq j} M_i$. Следовательно, эти подгруппы имеют тривиальное пересечение. Теорема доказана.

§4. Примеры бесконечных 2-порожденных π-групп ($|\pi| < \infty$)

При доказательстве теорем A и B используются конкретные примеры бесконечных конечно порожденных π-групп. Ниже приводится их описание в зависимости от вида множества π.

1. Случай $2 \notin \pi$. Пусть $\varkappa = \langle p_1, p_2, \dots, \dots \rangle$ — бесконечная последовательность, составленная из простых чисел множества π, в которой каждое число встречается бесконечно много раз. Специальные таблицы в сплетении $G_\varkappa$ регулярных циклических групп (C_{p_i}, Z_{p_i}), $i \in N$, строим следующим образом. При любом $k \in N$ зададим функции $a_k(\bar{x}_{k-1})$, $b_k(\bar{x}_{k-1})$ из $Z_\varkappa^{(k-1)}$ в Z_{p_k} равенствами

$$a_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_{k-1} = (0, \dots, 0, 1), \\ -1 & \text{при } x_{k-1} = (0, \dots, 0, 2), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{4.1}$$

и

$$b_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x}_{k-1}(0, \dots, 0, 1), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{4.2}$$

соответственно, где 1 — канонический образующий группы C_p. Для любого подмножества $J \subseteq N \setminus \{1\}$ определим таблицу v_J из $G_\varkappa$, полагая

$$v_J = [0, c_2(\bar{x}_1), c_3(\bar{x}_2), \dots], \tag{4.3}$$

где функции $c_k(\bar{x}_{k-1})$ задаются равенствами

$$c_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} a_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in J, \\ b_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \notin J, \end{cases} \tag{4.4}$$

а $a_k(\bar{x}_{k-1})$ и $b_k(\bar{x}_{k-1})$ определены соотношениями (4.1) и (4.2) соответственно.

Обозначим символом $V_{\pi,J}$ подгруппу группы $G_\varkappa$, порожденную таблицами $u = [1, 0, \dots]$, v_J.

Лемма 4.1. *Для любого конечного набора простых чисел π такого, что $2 \notin \pi$, группа $V_{\pi,J}$ будет бесконечной при произвольном выборе подмножества $J \subseteq N \setminus \{1\}$. Она будет π-группой тогда и только тогда, когда множество J бесконечное.*

Доказательство. Для любого подмножества $J \subset N$ элементы u, v_J являются α-таблицами, причем $\mathrm{sp}(u, v_J) = \varnothing$. Поэтому группа $V_{\pi,J}$ будет бесконечной по следствию из теоремы 2.3. Согласно (4.3) и (4.4), таблица v_J будет $\alpha\beta$-таблицей в том и только в том случае, когда J — бесконечное множество. Если v_J — $\alpha\beta$-таблица, то набор u, v_J согласован в смысле определения 2.3. Следовательно, в этом случае по теореме 2.1 группа $V_{\pi,J}$ является периодической. Однако любая периодическая подгруппа сплетения $G_\varkappa$ в силу финитной аппроксимируемости является π-группой. Итак, если J — бесконечное множество, то $V_{\pi,J}$ — π-группа. Пусть теперь $|J| < \infty$. Убедимся, что в этом случае группа $V_{\pi,J}$ содержит элементы бесконечного порядка. Выберем такое наименьшее число k, что при $i \geqslant k$ имеем $[V_J]_i = b_i(\bar{x}_{i-1})$. Так как $\mathrm{sp}\, V_{\pi,J} = \varnothing$, то $V_{\pi,J}$ действует транзитивно на множестве $Z_\varkappa$, согласно теореме 2.2. Следовательно, группа $(V_{\pi,J})_k$ начал длины k таблиц из $V_{\pi,J}$ действует транзитивно на множестве $Z_\varkappa^{(k)}$. Поэтому существует таблица $w_k \in (V_{\pi,J})_k$, для которой

$$\bar{0}^w = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1) \in Z_\varkappa^{(k)}.$$

Возьмем ее минимальной для этой пары векторов, и пусть $w_k = \omega(u_k, (v_{J,k}))$. Положим $w = \omega(u, v_J)$. В силу минимальности w_k имеем

$$\bar{0}^w = \bar{e}_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots).$$

Покажем теперь, что таблица $v = wv_J$ имеет бесконечный порядок. Пусть l — порядок таблицы w. Из определения таблицы v_J следует, что

$$\bar{0}^v (\bar{0}^w)^{v_J} = \bar{e}_k^{v_J} = \bar{e}_k + \bar{e}_{k+1}.$$

Кроме того, при $1 < r < l$ имеем

$$\bar{0}^{v^r} = (\bar{e}_k + \bar{e}_{k+1})^{v^{r-1}} = (\bar{e}_k + \bar{e}_{k+1})^{w^{r-1}}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\bar{0}^{v^l} &= (\bar{0}^{v^{l-l}})^v = ((\bar{e}_k + \bar{e}_{k+1})^{w^{l-1}})^{v_J} = \bar{e}_{k+1}^{v_J} \\ &= \bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2}.\end{aligned}$$

Далее,

$$(\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2})^{wv_J} = \bar{e}_k + 2\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2}$$

и при $l+1 < r < 2l$ имеем

$$(\bar{e}_k + 2\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2})^{v^r} = (2\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} + e_k)^{w^r},$$

откуда

$$(\bar{e}_k + 2\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2})^{v^{l-1}} = (2\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2}).$$

Итак,

$$(\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2})^{v^l} = 2\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2}.$$

Аналогично проверяется, что при $1 < s < p_{k+1} - 1$ выполнено равенство

$$(\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2})^{v^{ls}} = (s+1)\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\bar{0}^{v^{l\cdot p_{k+1}}} = (p_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \bar{e}_{k+2})^{v_J} = \bar{e}_{k+2} + \bar{e}_{k+3}.$$

Продолжая этот процесс дальше, получим, что в орбите таблицы v на последовательности $\bar{0}$ содержатся последовательности вида $\bar{e}_n + \bar{e}_{n+1}$, $n \geqslant k$. Поэтому эта орбита бесконечная, т.е. элемент v имеет бесконечный порядок. Лемма доказана.

2. Случай $2 \in \pi$, $\pi \neq \{2\}$. Последовательность $\varkappa = \langle p_1, p_2, \dots \rangle$ простых чисел из π задаем следующим образом. Полагаем $p_1 \neq 2$, $p_2 \neq 2$ и определяем остальные члены последовательности $\varkappa$ так, чтобы все числа из π в ней встречались и любые два вхождения числа 2 были разделены числом, отличным от двух. Как и в первом случае $G_\varkappa = \wr_{i\in N} C_{p_i}$ — l-сплетение регулярных циклических групп (C_{p_i}, Z_{p_i}), $i \in N$, а функции $a_k(\bar{x}_{k-1})$, $b_k(\bar{x}_{k-1})$ определены равенствами (4.1) и (4.2) соответственно. Если $p_k = 2$, то функция $a_k(\bar{x}_{k-1})$ принимает лишь два значения 1,0, причем значение 1 в двух точках; если же $p_{k-1} = 2$, то функция $a_k(\bar{x}_{k-1})$ не определена. Пусть J — множество тех номеров членов последовательности $\varkappa$, которые равны двум. Положим

$$c_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} a_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k-1 \notin J, \\ b_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k-1 \in J. \end{cases} \tag{4.5}$$

Функции $c_k(\bar{x}_{k-1})$ определены для всех $k \geqslant 2$. Задаем таблицу v_J равенствами

$$[v_J]_1 = 0, \qquad [v_J]_k = c_k(\bar{x}_{k-1}), \quad k \geqslant 2. \tag{4.6}$$

Лемма 4.2. *Для любой последовательности $\varkappa$ простых чисел, удовлетворяющей отмеченным условиям, группа $V_{\pi,J}$, порожденная таблицами $u = [1,0,\dots]$ и v_J, является бесконечной π-группой.*

Доказательство. По построению последовательности $\varkappa$ и согласно равенствам (4.5) и (4.6) таблица v_J является $\alpha\beta$-таблицей, а набор u, v согласован. Поэтому группа $V_{\pi,J}$ периодическая в силу теоремы 2.1. Поскольку $G_\varkappa$ финитно аппроксимируема, $V_{\pi,J}$ — π-группа. Так как $\mathrm{sp}(u,v) = \varnothing$, то эта группа бесконечная в силу следствия из теоремы 2.3 и все доказано.

3. Случай $\pi = \{2\}$. Пусть $G_2 = \wr_{i\in N} C_2^{(i)}$ — l-сплетение регулярных циклических групп второго порядка. Порождающие таблицы для 2-порожденной бесконечной периодической подгруппы из G_2 строим следующим образом. Зададим функции $a_k(\bar{x}_{k-1})$ и $b_k(\bar{x}_{k-1})$ при $k \geqslant 3$ равенствами

$$\tilde{a}_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x}_{k-1} = (0,\dots,0,1,0),(0,\dots,0,1,1), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{4.7}$$

и

$$\tilde{b}_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x}_{k-1} = (0,\dots 0,1,0), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.8}$$

Для любого подмножества $J \subset N \setminus \{1,2\}$ определим таблицу v_J и G_2, полагая

$$v_J = [0,0,c_3(\bar{x}_2),c_4(\bar{x}_3),\dots], \tag{4.9}$$

где

$$c_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} \tilde{a}_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in J, \\ \tilde{b}_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \notin J. \end{cases}$$

По определению (4.7) и (4.8) функций $\tilde{a}_k(\bar{x}_{k-1})$, $\tilde{b}_k(\bar{x}_{k-1})$ таблица (4.9) является α-таблицей при любом J и будет $\alpha\beta$-таблицей в том и только в том случае, когда J — бесконечное множество. Пусть также $u = [1,x_1,0,\dots]$. Поскольку

$$u_2 = [1+1,x_1+(x_1+1),0,\dots] = [0,1,0,\dots],$$

то u — таблица порядка 4.

Лемма 4.3. *Для любого подмножества $J \subset N \setminus \{1,2\}$ группа $V_{2,J}$, порожденная таблицами u, v_J, будет бесконечной. Она будет периодической тогда и только тогда, когда множество J бесконечное.*

Доказательство. Так как $\mathrm{sp}(u,v) = \varnothing$, а таблицы u, v_J являются квази-α-таблицами, то группа $V_{2,J}$ будет бесконечной при любом J, согласно теореме 2.3$'$. Поскольку таблица u финитарная, а v_J является, при бесконечном J, $\alpha\beta$-таблицей, то в этом случае $V_{2,J}$ будет периодической, согласно следствию из теоремы 2.1$'$. Осталось убедиться, что в том случае, когда J бесконечное, группа $V_{2,J}$ содержит элементы бесконечного порядка. Как и при доказательстве леммы 4.1, можно проверить, что в группе $V_{2,J}$ содержится таблица, орбита которой на последовательности бесконечна. Поскольку все проверки абсолютно аналогичные, мы их опускаем.

§5. Доказательство теоремы A

Доказательство теоремы A разобьем на несколько этапов.

Этап 1. Построение группы U. Группа U строится как подгруппа сплетения по вполне определенным последовательностям регулярных циклических групп, порядки которых содержатся в множестве простых чисел π. Выбор последовательности регулярных циклических групп зависит от вида множества π. При этом используются одна из периодических групп, сконструированных в предыдущем параграфе, и общая конструкция факторизуемых групп, предложенная в §3. Для осуществления необходимых построений можно было бы взять любую из периодических групп, описанных в §1. Мы проводим все рассуждения в случае, когда такая группа задается наиболее просто. Без больших изменений они переносятся на общий случай. Тем самым возникает континуальное семейство групп, удовлетворяющих условиям теоремы A.

Для построения группы U необходимо сначала определить бесконечную последовательность регулярных циклических групп, по которой конструируется нужное l-сплетение. Такая последовательность будет задана, если мы укажем бесконечную последовательность простых чисел, являющихся порядками циклических групп. Последняя строится бесконечно кратным повторением своего начала длины $|\pi|$, которое будем называть блоком и обозначать Σ_π. Вид блока Σ_π зависит от выбора π. Поэтому при построении группы U рассмотрим следующие 3 случая.

1) $2 \in \pi$. Зафиксируем нумерацию $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots, p_{i,n_i}$ чисел из π_i ($1 \leqslant i \leqslant s$, $n_i \geqslant 1$). Блок Σ_π определяется как последовательность

$$p_{11}, \ldots, p_{1n_1}, p_{21}, \ldots, p_{2,n_2}, \ldots, p_{s1}, \ldots, p_{sn_s}.$$

Пусть $\varkappa = \langle q_1, q_2, \ldots \rangle$ — бесконечная последовательность, построенная выше указанным способом по Σ_π. Зададим разбиение множества натуральных чисел N на подмножества $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_s$, относя к $\mathcal{M}_i$ натуральные числа, являющиеся номерами членов последовательности $\varkappa$, содержащихся в π_i ($1 \leqslant i \leqslant s$). Каждое из множеств $\mathcal{M}_i$ бесконечное, число k содержится в $\mathcal{M}_i$ в том и только в том случае, когда его остаток от деления на $n = n_1 + \dots + n_s$ содержится в интервале $[m_{i-1}+1, m_{i-1}+n_i = m_i]$ $(m_r = n_1 + \dots + n_r,\ m_0 = 0)$.

l-сплетение $G_\varkappa = \wr_{i=1}^{\infty} C_{q_i}$, согласно лемме 3.1, разлагается в общее произведение своих попарно перестановочных подгрупп $G_{M_1}, \dots, G_{M_s}$. Определим теперь таблицы $u_1, \dots, u_s$ своими координатами согласно равенствам

$$[u_i]_k = \begin{cases} a_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{5.1}$$

$(k \in N \setminus \{1\},\ 1 \leqslant i \leqslant s)$, где функции $a_k(\bar{x}_{k-1})$ определены для всех $k \in N \setminus \{1\}$ равенствами (4.1). Отдельно полагаем $u_0 = [1, 0, \dots]$, $[u_1]_1 = 0$. Пусть

$$U_0^{(i)} = \{u_i\} \quad (2 \leqslant i \leqslant s), \qquad U_0^{(1)} = \{u_0, u_1\}. \tag{5.2}$$

Так как $u_i \in G_{M_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $u_0 \in G_{M_1}$, то к подмножествам $U_0^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ применима конструкция из §3. Положим $U = H(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(s)})$.

2) $2 \in \pi$, $|\pi| \geqslant 2$. Блок Σ_π строится в этом случае следующим образом. Числа из множеств π_i, не содержащих двойки, упорядочиваем произвольным образом. Если $2 \in \pi_i$, то числа из π_i располагаем в таком порядке, чтобы соответствующий отрезок блока Σ_π начинался и заканчивался числом $\neq 2$; при $|\pi| = 2$ это число придется повторить дважды. Если же $\pi_i = \{2\}$, то соответствующая часть блока Σ_π состоит из одного числа 2. Эти соглашения нужны для того, чтобы в так построенном блоке Σ_π не было подряд идущих вхождений числа 2. Тем самым части блока Σ_π, задаваемые множествами π_i, можно упорядочить так, чтобы он не начинался числом 2. При необходимости повторяя первую компоненту, можно считать также, что первые два числа из Σ_π отличны от двух. Пусть $\varkappa = \langle q_1, q_2, \dots \rangle$ — бесконечная последовательность, образованная повторением блока Σ_π, который удовлетворяет указанным условиям. Разбиению $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i=1}^{s}$ множества N, задаваемому теми же условиями, что и в случае 1), также соответствует разложение l-сплетения $G_\varkappa = \wr_{i=1}^{\infty} C_{q_i}$ в общее произведение $G_{M_1} \cdot G_{M_2} \cdot \ldots \cdot G_{M_s}$. Определим таблицы $u_1, \dots, u_s$, полагая

$$[u_i]_k = \begin{cases} a_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in M_i, p_{k-1} \neq 2, \\ b_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } M_i, p_{k-1} = 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{5.3}$$

где функции $a_k(\bar{x}_{k-1})$ и $b_k(\bar{x}_{k-1})$ определены равенствами (4.1) и (4.2) соответственно $(k \in N \setminus \{1\},\ 1 \leqslant i \leqslant s)$. Отдельно полагаем $[u_1]_1 = 0$, $u_0[1, 0, \dots]$. Подмножества $U_0^{(i)} \subset G_{M_i}$ определяем теми же равенствами (2.2). К ним применима конструкция §3 и снова полагаем $U = H(_0^{(1)}, \dots, U_0^{(s)})$.

3) $\pi = \{2\}$. Группа U в этом случае определяется как подгруппа сплетения $G_{\varkappa} = \wr_{i=1}^{\infty} C_2^{(i)}$ по бесконечной последовательности регулярных циклических групп порядка 2. Множества $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_s$, разбивающие N на части, задаем соотношениями

$$\mathcal{M}_i = \{\, k \in N \mid k \equiv i + 2 \pmod{s} \,\} \qquad (1 \leqslant i \leqslant s).$$

Таблицы u_i зададим своими координатами следующим образом

$$[u_i]_k = \begin{cases} \tilde{a}_k(\bar{x}_{k-1}) & \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{5.4}$$

где функции $\tilde{a}_k(\bar{x}_{k-1})$ определены равенствами (4.7) ($k \in N \setminus \{1,2\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$). Отдельно полагаем $[u_1]_1 = 0$, $[u_1]_2 = 0$, $u_0 = [1, x_1, 0, \ldots]$. Подмножества $U_0^{(i)} \subset G_{\mathcal{M}_i}$ зададим так же, как и в предыдущих случаях равенствами (2.2), и применяя к ним конструкцию §3, получаем группу $U = H(U_0^{(1)}, \ldots, U_0^{(s)})$. Итак, искомая группа U сконструирована для любого конечного множества π простых чисел.

Этап 2. Исследование свойств группы U. Поскольку сплетение $G_{\varkappa}$ является финитно аппроксимируемой группой для любой последовательности $\varkappa$, то построенная в п. 1)–3) группа U будет финитно аппроксимируемой. Положим $\mathcal{A}_i = H(U_0^{(i)})$ ($1 \leqslant i \leqslant s$). Тогда, согласно теореме 3.1, группа U разложима в общее произведение своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_s$, причем равенство

$$A_j \cap \langle A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_s \rangle = \{e\}$$

имеет место для любого j, $1 \leqslant j \leqslant s$. Тем самым для группы U выполнены требования 1) и 2) теоремы А.

Любая порождающая группы U имеет вид $u_j^{[h]}$, $0 \leqslant j \leqslant s$, $h \in H_m$, $m \in N$. Понятно, что при любом $h \in H_m$, $m \in N$, имеем $u_0^{[h]} = u_0$. Положим

$$\begin{aligned} a_k^{(h)}(\bar{x}_{k-1}) &= a_k(\bar{x}_{k-1}^h), \\ b_k^{(h)}(\bar{x}_{k-1}) &= b_k(\bar{x}_{k-1}^h), \\ \tilde{a}_k^{(h)}(\bar{x}_{k-1}) &= \tilde{a}_k(\bar{x}_{k-1}^h) \end{aligned} \tag{5.5}$$

($k \in N$, $h \in H_m, m \in N$). Функции $a_k^{(h)}(\bar{x}_{k-1})$ и $\tilde{a}_k^{(h)}(\bar{x}_{k-1})$ принимают вместе с $a_k(\bar{x}_{k-1})$, $\tilde{a}_k(\bar{x}_{k-1})$ только два ненулевых значения и их носитель состоит из наборов

$$(0, \ldots, 0, \lambda)^{h^{-1}}, \qquad \lambda = 1, 2 \tag{5.6}$$

или

$$(0,\dots,0,1,\mu)^{h^{-1}}, \qquad \mu = 0,1,$$

а функция $b_k^{(h)}(\bar{x}_{k-1})$ принимает только одно ненулевое значение на наборе $(0,\dots,0,1)^{h^{-1}}$.

Пусть W — множество указанных порождающих таблиц подгруппы U в каждом из случаев 1)–3). Положим $W = W_1 \cup W_2$, где W_2 — подмножество финитарных таблиц из W, т.е. $|W_2| = 2$. Множество W_1 состоит, согласно определению, из $\alpha\beta$-таблиц.

Лемма 5.1. *Для любой таблицы $h \in H_m$, $m \in N$, и произвольной таблицы $u \in W_1$ координаты таблицы $u^{[h]}$ удовлетворяют следующему условию*:

если при некотором k кортеж $\bar{t}_k \in Z_\varkappa^{(k)}$ содержится в множестве $T(u^{[h]})$ значащих кортежей таблицы $u^{[h]}$, то для всех продолжений $\bar{t}_l$ $(l > k)$ кортежа $\bar{t}_k$ имеем $t_l \notin T(u^{[h]})$.

Доказательство. Предположим от противного, что для некоторой таблицы $h \in H_m$, $m \in N$, и таблицы $u \in W_1$ это условие нарушается. Последнее означает, что при определенном $k \in N$ найдется кортеж $\bar{t}_k \in Z_\varkappa^{(k)}$, для которого выполняется одно из соотношений $a_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_k) \neq 0$, $b_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_k) \neq 0$ или $\tilde{a}_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_k) \neq 0$ (в зависимости от вида таблицы u и значения k), причем для какого-то продолжения $\bar{t}_l$ $(l > k)$ кортежа $\bar{t}_k$ также имеем соответственно $a_{l+1}^{(h)}(\bar{t}_l) \neq 0$, $b_{l+1}^{(h)}(\bar{t}_l) \neq 0$ или $\tilde{a}_{l+1}^{(h)}(\bar{t}_l) \neq 0$. Из этих соотношений и определения (5.5) следует $\bar{t}_l^{h^{-1}} = (0,\dots,0,\lambda)$, $\lambda = 1,2$ или $\bar{t}_l^{h^{-1}} = (0,\dots,0,1,\lambda)$, $\lambda = 0,1$. Отсюда по определению действия таблицы на кортеж получаем, что для всех r, $1 \leqslant r \leqslant l-1$ кортеж $\bar{t}_{r-1}^{h^{-1}}$ не является значащим для таблицы u. В частности, таковым не будет кортеж $t_k^{h^{-1}}$, что невозможно в силу условий $a_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_k) \neq 0$, $b_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_k) \neq 0$ или $\tilde{a}_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_k) \neq 0$.

Лемма 5.2. *Любая таблица вида $u^{[h]}$, $u \in W_1$, $h \in H_m$, $m \in N$, при действии на последовательности из $Z_\varkappa$ изменяет в каждой из них не более одной координаты. Порядок $u^{[h]}$ равен порядку таблицы u.*

Доказательство. Пусть $\bar{t} \in Z_\varkappa$ — такая последовательность, что $\bar{t}^{u^{[h]}} \neq \bar{t}$ и k — наименьшее число, для которого k-е координаты $\bar{t}$ и $\bar{t}^{u^{[h]}}$ различные. Тогда $[u^{[h]}]_k \neq 0$ и по лемме 5.1 отсюда следует, что для любого $l > k$ функция $[u^{[h]}]_l$ на кортеже $\bar{t}_{l-1}$ принимает нулевое значение. Поэтому при $l > k$ l-е координаты кортежей $\bar{t}_l$ и $\bar{t}_l^{u^{[h]}}$ совпадают. Тем самым таблица $u^{[h]}$ изменяет лишь k-ю координату $\bar{t}$. Так как $\bar{t}$ — произвольная последовательность, то первая часть утверждения леммы доказана. Вторая ее часть следует из того, что таблицы u, $u^{[h]}$ одновременно изменяют или нет соответствующие координаты последовательностей $\bar{t}$ и $\bar{t}^{h^{-1}}$ из $Z_\varkappa$. Поэтому подстановки u и $u^{[h]}$ раскладываются в произведение циклов одинаковой длины, а следовательно, имеют одинаковый порядок.

Из леммы 5.2 следует, что любая таблица $h \in H_m$, $m \in N$, при действии на последовательности из $Z_\varkappa$ изменяет в каждой из них лишь конечное число координат. В частности, для любой таблицы $h \in H_m$, $m \in N$, найдется такое число $r(h)$ что

$$0^{-h} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, 0, \dots). \tag{5.7}$$

Следовательно, для любой таблицы вида $u^{[h]}$, $u \in W$, $h \in H_m$, $m \in N$, при $k > r(h) + 2$ кортежи из носителей функций $[u^{[h]}]_k$ будут иметь вид

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-r-2}, \lambda), \qquad \lambda = 1, 2 \tag{5.8}$$

или

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 1, \mu), \qquad \mu = 0, 1.$$

Лемма 5.3. *Каждая таблица вида $u^{[h]}$, $u \in W_1$, $h \in H_m$, $m \in N$, является $\alpha\beta$-таблицей.*

Доказательство. Пусть $u \in W_1$, $h \in H_m$, $m \in N$, — произвольные таблицы, $B(u)$ — множество начальных кортежей таблицы u $T(u)$ — множество ее значащих кортежей. Поскольку, согласно определениям (5.2), (5.3), (5.4), любая таблица $u \in W_1$ является $\alpha\beta$-таблицей, то $B(u)$ содержится в правильном множестве, причем $B(u) \cap T(u) = \varnothing$. Но $B(u^{[h]}) = B(u)^{h^{-1}}$, $T(u^{[h]}) = T(u)^{h^{-1}}$. Поскольку сдвиг правильного множества является правильным, то $B(u^{[h]})$ также содержится в правильном семействе и $B(u^{[h]}) \cap T(u^{[h]}) = (B(u) \cap T(u))^{h^{-1}} = \varnothing$. Следовательно, $u^{[h]}$ — α-таблица. Для любой таблицы $h \in H_m$, $m \in N$, справедливы равенства

$$(0, \dots, 0, \lambda)^{h^{-1}} = ((0, \dots, 0)^{h^{-1}}, \lambda + c_k(\bar{0})), \qquad \lambda = 1, 2,$$

либо

$$(0, \dots, 0, 1, \lambda)^{h^{-1}} = ((0, \dots, 0, 1)^{h^{-1}}, \lambda + \tilde{c}_k(\bar{0})), \qquad \lambda = 0, 1,$$

где $[h^{-1}]_k = c_k(\bar{x}_{k-1})$ или $\tilde{c}_k(\bar{x}_{k-1})$ в зависимости от вида π.

Отсюда получаем в силу (5.6) и (5.7), что условия

$$\sum_{t_k \in Z_{p_k}} a_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_{k-1}, t_k) = 0, \qquad \sum_{t_k \in Z_2} \tilde{a}_{k+1}^{(h)}(\bar{t}_{k-1}, t_k) = 0$$

выполнены при любом $t_k \in Z_\varkappa^{(k)}$ для всех $k \geqslant 2$, если $\pi = \{2\}$, для всех $k \geqslant 1$, если $2 \notin \pi$, или для бесконечно многих k, если $\pi \neq \{2\}$. Итак, u — $\alpha\beta$-таблица и лемма доказана.

Лемма 5.4. *Семейство таблиц* $u^{[h]}$, $u \in W_1$, $h \in H_m$, $m \in N$, *является согласованным при любом выборе множества* π.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — конечное множество таблиц вида $u^{[h]}$, $h \in H_m$, $m \in N$. Кортежи из носителей координат таблиц $u^{[h]}$ имеют вид (5.8), где параметр r зависит лишь от выбора таблицы u. Выберем число k_0 так, чтобы для всех таблиц из $\mathcal{A}$ их координаты имели при $k > k_0$ значащие кортежи вида (5.8). Предположим для определенности, что $\pi \not\ni 2$. Согласно определению таблиц из W_1, в этом случае любая из таблиц $u^{[h]}$ при всех $s > k_0$ имеет $s+2$-ю координату, которая на всех кортежах из $(\beta_1, \dots, \beta_s, \beta)$, $\beta \in Z_p$ принимает либо значение 0, либо всего 2 ненулевых значения, которые взаимно противоположны. Это означает, что при любом $s > k_0 + 2$ выполнено требование 3) определения 2.3 согласованности таблиц. Условия 1) и 2) этого определения по крайней мере выполнены для (k_0+2)-х концов этих таблиц. Это и означает, что множество таблиц $\mathcal{A}$ согласовано. Другие возможности для множества π рассматриваются аналогично. Построенная группа U является периодической. Сплетение $G_\varkappa$ аппроксимируется конечно итерированными сплетениями $G_\varkappa = \wr_{i=1}^{k} C_{p_i}$ $(k \in N,\ \varkappa = \langle p_1, p_2, \dots \rangle)$, которые являются π-группами. Поэтому любой элемент конечного порядка в сплетении $G_\varkappa$ является π-элементом. Следовательно, группа U как подгруппа $G_\varkappa$ является π-группой.

Убедимся теперь, что группа U не будет локально конечной. Таблицы $u_1, u_2, \dots, u_s$ при любом π коммутируют между собой, а их произведение совпадает с таблицей v_j из §4, которая определена равенством (4.6) при $\pi \ni 2$, $|\pi| > 1$, а при $\pi \not\ni 2$ или $\pi = \{2\}$ задающее ее множество j совпадает с $N \setminus \{1\}$. Согласно леммам 4.1–4.3, отсюда следует, что подгруппа, порожденная таблицами u_0, u_1, $u_2, \dots, u_s$, бесконечная. Следовательно, U не является локально конечной.

Этап 3. Локальная конечность подгрупп $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$, $k < s$. Подгруппа $\mathcal{A}_1 = H(U_0^{(1)})$ при любом π разлагается в полупрямое произведение циклической подгруппы $\langle u_0 \rangle$ и нормального делителя $\bar{\mathcal{A}}_1$, порожденного таблицами $u_1^{[h]}$, $h \in H_m$, $m \in N$. Она будет локально конечной тогда и только тогда, когда локально конечной является подгруппа $\bar{\mathcal{A}}_1$. Любая подгруппа вида $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{j_2}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ группы U $(k < s)$ также раскладывается в полупрямое произведение циклической подгруппы $\langle u_0 \rangle$ и нормального делителя $\langle \bar{\mathcal{A}}_1, \mathcal{A}_{j_2}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$. Следовательно, достаточно убедиться в локальной конечности этого нормального делителя. Поэтому далее вместо подгруппы $\mathcal{A}_1$ мы будем использовать в рассуждениях подгруппу $\bar{\mathcal{A}}_1$, сохраняя прежние обозначения. Кроме того, поскольку все рассуждения в случаях $\pi \neq \{2\}$ и $\pi = \{2\}$ вполне аналогичны, можно ограничиться рассмотрением одного из этих случаев. Будем считать, что $\pi \neq \{2\}$.

Пусть $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ — фиксированное подмножество множества $\{1, 2, \dots, s\}$ $(k < s)$. Группа $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ порождается таблицами вида $u_{j_l}^{[h]}$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $h \in H_m$, $m \in N$. Множество J является по определению таблиц u_j объединением бесконечно многих целочисленных интервалов. Таким образом, для любой таблицы $u \in \langle \mathcal{A}_{j_1}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ имеем $[u]_l = 0$ при $l \in I$.

Пусть $\mathcal{K} = \{w_1, \dots, w_n\}$ — произвольное конечное множество элементов из подгруппы $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \dots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$, $\bar{\mathcal{K}}$ — подгруппа, порожденная этим множеством. Любой элемент w_i раскладывается в произведение таблиц вида $u_{j_l}^{[h]}$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $h \in H_m$, $m \in N$, для каждой из которых найдется такое число $r(h)$ (определяемое равенством (5.7)), что при $l > r(h) + 2$ кортежи из носителей ее l-й координаты имеют вид (5.8). Поэтому существует число $r(w_i)$ такое, что при $l > r(w_i) + 2$ кортежи из носителей $[w_i]_l$ имеют вид (5.8). Положим

$$r(\mathcal{K}) = \max\{\, r(w_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant k \,\}, \tag{5.9}$$

а $r = r(\mathcal{K}) + \delta$, где δ — наименьшее число такое, что $r(\mathcal{K}) + \delta + 1$ является началом интервала из I. Тогда

$$[w_i]_{r+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{5.10}$$

и при $l \geqslant r + 2$ векторы из носителей функций $[w_i]_l$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (если, конечно, эти функции ненулевые) обязательно имеют нулевые координаты с номерами $r + 1$, $r + 2, \dots, l - 2$, а их последняя координата равна 1 или 2. Учитывая это, получаем следующее утверждение.

Лемма 5.5. *Пусть $u \in \bar{\mathcal{K}}$, причем*

$$[u]_l = \begin{cases} g_l(\bar{x}_{l-1}) & \textit{при } l \notin I, \\ 0 & \textit{при } l \in I. \end{cases}$$

Тогда при $l > r + 1$ для любого вектора вида $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$ получаем

$$g_l(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-r-1}) = 0. \tag{5.11}$$

Доказательство. Индукция по длине разложения таблицы u в произведение таблиц $w_1, \dots, w_n$. База индукции — случай, когда $u = w_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — рассмотрен выше. Пусть $u = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m}$ $(1 \leqslant i_j \leqslant n,\ j = 1, 2, \dots, m)$ — элемент из $\bar{\mathcal{K}}$, раскладывающийся в произведение m элементов из $\mathcal{K}$. Тогда $u = \bar{u} w_{i_m}$, и положив

$$[\bar{u}]_l = \begin{cases} \bar{g}_l(\bar{x}_{l-1}) & \text{при } l \notin I; \\ 0 & \text{при } l \in I, \end{cases} \qquad [w_{i_m}]_l = \begin{cases} c_l(\bar{x}_{l-1}) & \text{при } l \notin I, \\ 0 & \text{при } l \in I \end{cases}$$

для ненулевых координат таблицы u, получаем равенства

$$[u]_l = \bar{g}_l(\bar{x}_{l-1}) + c_l(\bar{x}_{l-1}^{\bar{u}}).$$

По предположению индукции $g_l(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) = 0$. Но для произвольной таблицы $\bar{u} \in \bar{\mathcal{K}}$ при $l > r+1$ выполнено равенство $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)^{\bar{u}} = ((\alpha_1, \dots, \alpha_r)^u, 0, \dots, 0)$, в чем нетрудно убедиться индукцией по длине разложения $\bar{u}$, учитывая, что

$$[w_i]_{r+j+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{j}) = 0.$$

Отсюда получаем

$$c_l(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)^{\bar{u}} = c_l((\alpha_1, \dots, \alpha_r)^{\bar{u}}, 0, \dots, 0) = 0.$$

Поэтому (5.11) имеет место и лемма доказана.

Лемма 5.6. *Пусть $u \in \bar{\mathcal{K}}$ таблица глубины $\geqslant r+1$. Тогда при $l > r+2$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ имеем*

$$[w_i]_l(\bar{x}_{l-1}^u) = [w_i]_l(\bar{x}_{l-1}). \tag{5.12}$$

Доказательство. Достаточно убедиться, что наборы из носителей функции $[w_i]_l$ не изменяются под действием таблицы u. Согласно сказанному выше, эти наборы имеют вид $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0, \lambda)$, $\lambda = 1, 2$. Но при $l > r+1$ имеем в силу (5.9) и (5.10)

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0, \lambda)^u = (\alpha_1 + 0, \dots, \alpha_r + 0, 0 + 0, 0 + g_{r+2}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0), \dots),$$

где $\lambda = 1, 2$, $[u]_{r+i} = g_{r+i}(\bar{x}_{r+i-1})$. Учитывая (5.11), отсюда получаем при $l > r+2$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0, \lambda)^u = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0, \lambda)$$

и лемма доказана.

Закончим теперь рассмотрение третьего этапа, а с ним и доказательство теоремы А. Итак, установим, что группа $\bar{\mathcal{K}}$, порожденная множеством $\mathcal{K}$, является локально конечной. Пусть ${}^{(l)}\bar{\mathcal{K}}$ — подгруппа группы $\bar{\mathcal{K}}$, состоящая из всевозможных таблиц из $\bar{\mathcal{K}}$ глубины $\geqslant l$. Подгруппа ${}^{(l)}\bar{\mathcal{K}}$ является нормальным делителем в $\bar{\mathcal{K}}$, причем $\bar{\mathcal{K}}/{}^{(l)}\bar{\mathcal{K}}$ конечная, т.е. ${}^{(l)}\mathcal{K}$ конечно порождена. Фиксируем некоторое $l > r+3$, где число r определено выше и убедимся, что при таком l подгруппа ${}^{(l)}\mathcal{K}$ будет абелевой. Пусть $u = [0, \dots, 0, d_{l+1}(\bar{x}_l), \dots]$, $v = [0, \dots, 0, d'_{l+1}(\bar{x}_l), \dots] \in {}^{(l)}\bar{\mathcal{K}}$. Тогда при $t \geqslant l+1$ имеем

$$[uv]_t = d_t(\bar{x}_{t-1}) + d'_t(\bar{x}_{t-1}^u),$$
$$[vu]_t = d'_t(\bar{x}_{t-1}) + d_t(\bar{x}_{t-1}^v).$$

Поскольку $d_t(\bar{x}_{t-1})$ и $d'_t(\bar{x}_{t-1})$ выражаются через функции $[w_i]_t$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то по лемме 5.6 получаем

$$d_t(\bar{x}^v_{t-1}) = d_t(\bar{x}_{t-1}),$$
$$d'_t(\bar{x}^u_{t-1}) = d'_t(\bar{x}_{t-1}) \qquad (t \geqslant l+1).$$

Поэтому для всех $t \in N$ выполнено равенство $[uv]_t = [vu]_t$, а следовательно, $uv = vu$ и в силу произвола выбора таблиц $u, v \in^{(l)} \bar{\mathcal{K}}$ эта подгруппа абелева. Поскольку ${}^{(l)}\bar{\mathcal{K}}$ конечно порождена и периодическая, то она конечная, а значит, конечной будет и подгруппа $\bar{\mathcal{K}}$. Так как подмножество $\mathcal{K}$ из $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \ldots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ выбрано произвольно, то отсюда получаем, что эта подгруппа является локально конечной. Теорема доказана.

Отметим в качестве следствий два частных случая доказанной теоремы, поскольку они представляют самостоятельный интерес.

Следствие 1. *Для любого простого числа p существует p-группа, разложимая в произведение двух своих локально конечных подгрупп, но сама не являющаяся локально конечной.*

Следствие 2. *Для любых простых чисел p, $q(p \neq q)$ существует $\{p, q\}$-группа, разложимая в произведение двух своих подгрупп, одна из которых локально конечная p-группа, а другая — локально конечная q-группа, но сама не являющаяся локально конечной.*

§6. Доказательство теоремы B

Как и при доказательстве теоремы A группа U строится как подгруппа сплетения по бесконечной последовательности регулярных циклических групп, порядки которых содержатся в множестве $\pi = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \pi_i$, причем ее конструкция не зависит от способа определения последовательности сплетаемых групп.

Пусть $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n_i}}$ — фиксированная нумерация чисел из множества π_i $(1 \leqslant i \leqslant s, n_i \geqslant 1)$. Последовательность $\varkappa$ состоит из бесконечного числа блоков вида

$$p_{11}, \ldots, p_{1n_1}, p_{21}, \ldots, p_{2n_2}, \ldots, p_{s1}, \ldots, p_{sn_s},$$

следующих друг за другом. Тем самым простые числа из π_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ встречаются в этой последовательности на местах с номерами, содержащимися в объединении целочисленных интервалов

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} [l_i + 1 + km, l_i + n_i + km], \tag{6.1}$$

где $l_1 = 0$, $l_i = n_1 + \dots + n_{i-1}$ при $i \geqslant 2$, $m = \sum\limits_{i=1}^{s} n_i$. Фиксируем разбиение множества N на части $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_s$, относя к i-й части $\mathcal{M}_i$ числа (6.1) ($1 \leqslant i \leqslant s$). Тогда l-сплетение $G_\varkappa$ разложимо по лемме 3.1 в общее произведение $G_{\mathcal{M}_1} \cdot \ldots \cdot G_{\mathcal{M}_s}$.

Зададим теперь таблицы $u_1, u_2, \dots, u_s$ своими координатами, полагая

$$[u_i]_k = \begin{cases} b_k(\bar{x}_{k-1}) \text{при } k \in \mathcal{M}_i, \\ 0, \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{6.2}$$

($1 \leqslant i \leqslant s$, $k \in N \setminus \{1\}$), где функции $b_i(\bar{x}_{i-1})$ определяются равенствами (4.2) независимо от вида последовательности $\varkappa$ (в том числе и при $\pi = \{2\}$). Отдельно полагаем $[u_1]_1 = 0$, $u_0 = [1, 0, \dots]$. Начальные множества для применения основной конструкции задаются равенствами

$$\begin{aligned} U_0^{(1)} &= \{u_0, u_1\}, \\ U_0^{(i)} &= \{u_i\} \qquad (2 \leqslant i \leqslant s). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Так как $u_i \in G_{\mathcal{M}_i}$ ($1 \leqslant i \leqslant s$), $u_0 \in G_{\mathcal{M}_1}$, то множества (6.3) определены корректно. Пусть $U = H(U_0^{(1)}, \dots, U_0^{(s)})$. Покажем, что группа U удовлетворяет всем требованиям теоремы B.

Положим $\mathcal{A}_i = H(U_0^{(i)})$ ($1 \leqslant i \leqslant s$). Тогда, согласно теореме 3.1, группа U разложима в общее произведение своих попарно перестановочных подгрупп $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_s$, т.е. для нее выполнено требование 1) теоремы. Поскольку $\mathcal{A}_i \subset G_{\mathcal{M}_i}$ ($1 \leqslant i \leqslant s$) и для этих подгрупп при произвольном выборе j ($1 \leqslant j \leqslant s$)

$$G_{\mathcal{M}_j} \cap \langle G_{\mathcal{M}_1}, \dots, G_{\mathcal{M}_{j-1}}, G_{\mathcal{M}_{j+1}}, \dots, G_{\mathcal{M}_s} \rangle = \{e\},$$

то подгруппы $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$ группы U удовлетворяют требованию 3) теоремы. Далее, группа U будет финитно аппроксимируемой как подгруппа финитно аппроксимируемой группы $G_\varkappa$. Покажем, что группа U содержит элементы бесконечного порядка.

Лемма 6.1. *При любом $k \in N$ для произвольного $j = 1, \dots, s$ выполнено равенство*

$$b_k(\bar{x}_{k-1}^{u_j}) = b_k(\bar{x}_{k-1}).$$

Доказательство. Достаточно убедиться, что единственный кортеж из носителя функции $b_k(\bar{x}_{k-1})$ не изменяется под действием таблицы u. Согласно определению 6.2 таблиц u_j ($1 \leqslant j \leqslant s$), l-я координата кортежа

$$\bar{a}_{k-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-2}, 1)^{u_j}$$

будет, очевидно, совпадать с l-й координатой кортежа $(0,\dots,0,1)$, если $[u_j]_l = 0 (l \leqslant k-1)$. Если же это не так, т.е. $[u_j]_l = b_l(\bar{x}_{l-1})$, то для l-й координаты $\bar{a}_{k-1}$ имеем соотношение

$$(\bar{a}_{k-1})_l = \begin{cases} 0 + b_l(\bar{0}) & \text{при } l < k-1, \\ 1 + b_l(\bar{0}) & \text{при } l = k-1. \end{cases}$$

Однако $b_l(\bar{0}) = 0$ по определению функции b_l. Поэтому $\bar{a}_{k-1} = (0,\dots,0,1)$, что и требовалось.

Лемма 6.2. *Группа U содержит таблицу $u = [1, b_2(x_1), b_3(\bar{x}_2), \dots]$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $u = u_1 u_2 \dots u_s$. Так как ненулевые координаты таблиц u_1, $u_2, \dots, u_s$ стоят на различных местах, причем на любом месте, начиная со второго, встречается ненулевая координата в какой-то таблице u_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, то координаты таблицы $\bar{u}$, начиная со второй, имеют вид

$$[\bar{u}]_k = b_k(\bar{x}_{k-1}^{u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_r}}) \qquad (k \geqslant 2),$$

где $\{j_1, j_2, \dots, j_r\} \subset \{1, 2, \dots, s\}$. Но, учитывая лемму 6.1, имеем

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{k-2},1)^{u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_r}} = (0,\dots,0,1).$$

Поэтому

$$b_k(\bar{x}_{k-1}^{u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_r}}) = b_k(\bar{x}_{k-1})$$

и, следовательно, при $k \geqslant 2$ выполнены равенства

$$[\bar{u}]_k = b_k(\bar{x}_{k-1}).$$

Теперь непосредственно проверяется, что для таблицы u справедливо разложение $u = \bar{u}u_0 = u_1 \dots u_s u_0$. Следовательно, $u \in U$, что и требовалось.

Покажем теперь, что элемент u имеет бесконечный порядок. Достаточно убедиться, что одна из его орбит на множестве $Z_\varkappa$ будет бесконечной. Проверим, что таковой является орбита нулевой последовательности. А именно покажем, что в этой орбите содержатся последовательности вида

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{k},1,0,\dots), k \in N \cup \{0\}.$$

Воспользуемся индукцией по числу k. Поскольку

$$(0,0,0,\dots)^u = (1,0,0,\dots),$$

база индукции очевидна. Предположим, что при всех $l < k$ в орбите нулевой последовательности содержатся все последовательности вида

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{l},1,0,\dots) \qquad (0 \leqslant l \leqslant k).$$

Это означает, что существуют числа $n_0 = 1, n_1, \dots, n_{k-1}$ такие, что

$$(0,0,0,\dots)^{u^{n_l}} = (\underbrace{0,\dots,0}_{l},1,0,\dots) \qquad (l \geqslant 0).$$

По определению k-й координаты таблицы u имеем

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{k-2},1,0,\dots)^u = (\underbrace{0,\dots,0}_{k-2},1,1,0,\dots)$$

или

$$(0,0,0,\dots)^{u^{n_{k-1}+1}} = (\underbrace{0,\dots,0}_{k-2},1,1,0,\dots).$$

Так как кортежи вида $(0,\dots,0,1,1,0,\dots,0)$ не содержатся в носителях функций $b_k(\bar{x}_{k-1})$, то при дальнейшем действии степеней таблицы u на полученную последовательность координаты с номерами $k+1$, $k+2,\dots$ не будут изменяться до тех пор, пока ее начало длины $k-1$ не станет нулевым. Но нулевой кортеж и кортеж $(0,\dots,0,1,0,\dots)$ содержатся в той же орбите начала u_{k-1} таблицы u. Следовательно, существует число l_{k-1}такое, что

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{k-2},1)^{u_{k-1}^{l_{k-1}}} = \bar{0}.$$

Тогда, учитывая вышесказанное, имеем

$$(0,0,0,\dots)^{u^{n_k+l_{k-1}+1}} = (\underbrace{0,\dots,0}_{k-1},1,0,\dots),$$

что и требовалось. Итак, орбита элемента u на нулевой последовательности бесконечная и, следовательно, элемент u имеет бесконечный порядок. Таким образом, для группы U выполнено требование 2) теоремы.

Осталось проверить, что для этой группы выполнено требование 4). Доказательство здесь осуществляется по аналогии с соответствующей частью доказательства теоремы А. Сначала заметим, что любая подгруппа вида $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{j_2}, \ldots, \mathcal{A}_{j_s} \rangle$ раскладывается в полупрямое произведение циклической подгруппы $\langle u_0 \rangle$ и нормального делителя $\langle \bar{\mathcal{A}}_1, \mathcal{A}_{j_2}, \ldots, \mathcal{A}_{j_s} \rangle$, где $\bar{\mathcal{A}}_1$ — подгруппа, порожденная таблицами вида $u_1^{[h]}$, $h \in H_m$, $m \in N$.

Подгруппа $\langle \bar{\mathcal{A}}_1, \mathcal{A}_{j_2}, \ldots, \mathcal{A}_{j_s} \rangle$ устроена так же, как и подгруппа $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \mathcal{A}_{j_2}, \ldots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$, $1 \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$. Поэтому в дальнейших рассуждениях достаточно ограничиться этим случаем. Группа $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \ldots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ порождается таблицами $u_{j_1}^{[h]}$, $u_{j_2}^{[h]}, \ldots, u_{j_k}^{[h]}$, $h \in H_m$, $m \in N$. Так как $k < s$, то $I = \mathrm{sp}(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}) \neq \varnothing$. I — объединение целочисленных интервалов, причем для любой таблицы $u \in \langle \mathcal{A}_{j_1}, \ldots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ имеем $[u]_l = 0$ при $l \in I$. Покажем теперь, что подгруппа $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \ldots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ локально конечная. Пусть $\mathcal{K} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ — конечное подмножество таблиц из этой подгруппы, $\bar{\mathcal{K}}$ — подгруппа, порожденная $\mathcal{K}$. По определению координат таблиц u_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ для каждой из них в силу (5.7) найдется число $r(h)$ такое, что при $l > r(h) \neq 2$ кортежи из носителей l-й координаты таблицы $u_j^{[h]}$ $(1 \leqslant j \leqslant s,\ h \in H_m,\ m \in N)$ имеют вид (5.8) при $\lambda = 1$. Поэтому для любого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ существует число $r(w_j)$ такое, что при $l > r(w_j) + 2$ кортежи из носителя функции $[w_j]_l$ имеют вид (5.8). Снова определим число $r(\mathcal{K})$ равенством (5.9) и положим $r = r(\mathcal{K}) + \delta$, где δ выбрано теми же условиями. Тогда для $(r+1)$-й координаты таблицы w_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ будет выполнено равенство (5.10). Поэтому для таблиц $u \in \mathcal{K}$ справедливы утверждения лемм 5.6 и 5.7.

В силу леммы 5.7 для любой таблицы $u \in \bar{\mathcal{K}}$ глубины $\geqslant r+1$ при $l > r+2$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ выполнено соотношение 5.12. Отсюда следует, что для любого $l > r+3$ подгруппа ${}^{(l)}\bar{\mathcal{K}}$ будет абелевой. Она имеет конечный индекс в $\bar{\mathcal{K}}$, т.е. является конечно порожденной. А поскольку эта подгруппа периодическая, то $|{}^{(l)}\mathcal{K}| < \infty$. Следовательно, и $|\bar{\mathcal{K}}| < \infty$. Так как система элементов $\mathcal{K}$ выбрана в $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \ldots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ произвольным образом, то это и означает, что группа $\langle \mathcal{A}_{j_1}, \ldots, \mathcal{A}_{j_k} \rangle$ является локально конечной. Итак, группа U удовлетворяет всем требованиям теоремы В, т.е. все доказано.

Следующие частные случаи доказанной теоремы представляют самостоятельный интерес.

Следствие 1. *Для любого простого числа p существует группа, разложимая в произведение двух своих (локально конечных) p-подгрупп, но сама не являющаяся p-группой.*

Следствие 2. *Для любых простых чисел p, $q (p \neq q)$ существует смешанная группа, разложимая в произведение двух своих локально конечных подгрупп, одна из которых является p-подгруппой, а другая — q-подгруппой.*

Это утверждение показывает, в частности, что условие локальной конечности, фигурирующее в задаче 5.59 из [10], поставленной Б. Хартли, нельзя опустить.

Список литературы

[1] Калужнин Л. А., *Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрической группы*, Acta Sci. Math. Hung. **2** (1951), № 3–4, 198–221.

[2] Сущанский В. И., *Сплетения по последовательностям групп подстановок и финитно аппроксимируемые группы*, ДАН УССР (1984), № 2, 19–22.

[3] Сущанский В. И., *Сплетения и периодические факторизуемые группы*, Мат. сб. **180** (1989), № 8, 1073–1091.

[4] Сущанский В. И., *Сплетения и общие произведения групп*, ДАН СССР **316** (1991), № 5, 1054–1057.

[5] Suschansky V. I., *Wreath product and factorization of groups*, Contemporary Math. **131** (1992), pt 1, 401–407.

[6] Алешин С. В., *Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах*, Мат. заметки **11** (1972), № 3, 319–328.

[7] Сущанский В. И., Об одном способе построения конечно порожденных бесконечных периодических p-групп, УП Всесоюз. симп. по теории групп. Тез. докл. КГУ, Красноярск, 1980, с. 121.

[8] Gupta N., Sidki S., *Extention of groups by tree automorphisms*, Contemporary Math. **33** (1985), 232–246.

[9] Рожков А. В., *К теории групп алешинского типа*, Мат. заметки **40** (1986), № 5, 572–589.

[10] *Коуровская тетрадь*, (Нерешенные вопросы теории групп), 10-е изд., доп., Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1986.

[11] Сысак Я. П., *Произведения бесконечных групп*, Препринт 82.53, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982.

[12] Сучков Н. М., *Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами*, Алгебра и логика **23** (1984), № 5, 573–577.

[13] Сущанский В. И., *Периодические p-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда*, ДАН СССР **247** (1979), № 3, 557–562.

Поступило 24 февраля 1993 г.