УДК 513.8

Я. Кубарски, А. С. Мищенко

Алгеброиды Ли: спектральные последовательности и сигнатура

Доказывается, что для произвольного транзитивного алгеброида Ли L на компактном ориентированном связном многообразии, у которого изотропные алгебры унимодулярны, а монодромия тривиальна, его алгебра когомологий является алгеброй Пуанкаре с тривиальной сигнатурой. Примерами таких алгеброидов являются алгеброиды на односвязном многообразии, а также алгеброиды, у которых группа внешних автоморфизмов изотропной алгебры Ли совпадает с внутренними автоморфизмами или присоединенное расслоение алгебр Ли $\boldsymbol{g}$ индуцирует тривиальное расслоений гомологий $H^*(\boldsymbol{g})$ в категории плоских расслоений.

Библиография: 27 названий.

§ 1. Введение

1.1. Категория алгеброидов Ли.

1.1.1. Алгеброиды Ли возникают как инфинитезимальные объекты для группоидов Ли, главных расслоений, векторных расслоений (см. [1], а также [2]–[4]), трансверсально полных слоений (кратко, ТС-слоений), незамкнутых подгрупп Ли (см. [5], а также [6], [7]), многообразий Пуассона (см. [8]) и др. Их алгебраические аналоги известны как псевдоалгебры Ли [9], называемые также алгебрами Ли–Райнхарта [10].

1.1.2. *Алгеброид Ли* на многообразии M состоит из тройки $L=(L,[\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!],\gamma_L)$, где L есть векторное расслоение на многообразии M, на пространстве сечений $(\operatorname{Sec}L,[\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!])$ которого задана структура $\mathbb{R}$-алгебры Ли, отображение $\gamma_L\colon L\to TM$, называемое *анкером*, является линейным гомоморфизмом векторных расслоений, для которого выполняется следующее условие Лейбница:

$$[\![\xi,f\cdot\eta]\!]=f\cdot[\![\xi,\eta]\!]+\gamma_L(\xi)(f)\cdot\eta,\qquad f\in C^\infty(M),\quad \xi,\eta\in\operatorname{Sec}L.$$

Анкер сохраняет операцию коммутирования сечений: $\gamma_L\circ[\![\xi,\eta]\!]=[\gamma_L\circ\xi,\gamma_L\circ\eta]$ [9], [11].

Работа была частично представлена на Международном Конгрессе математиков в Пекине, август 2002 г.

Работа первого автора поддержана грантом, присужденным факультетом технической физики, вычислительной техники и прикладной математики Технического университета г. Лодзи.

Работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 02-01-00574) и программой "Университеты России" (грант № УР.04.03.009).

Алгеброид Ли называется *транзитивным алгеброидом*, если анкер γ_L является послойным эпиморфизмом. Для транзитивных алгеброидов Ли имеет место точная последовательность Атья

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \longrightarrow 0,$$

в которой ядро анкера $\boldsymbol{g} := \ker \gamma_L$ образует векторное расслоение, являющееся расслоением алгебр Ли (для краткости LAB-расслоение). Это расслоение называется *присоединенным к расслоению* L. Слоем $\boldsymbol{g}_x$ расслоения $\boldsymbol{g}$ в каждой точке $x \in M$ служит алгебра Ли, операция коммутирования в которой задается по формуле

$$[v, w] = [\![\xi, \eta]\!](x), \qquad \xi, \eta \in \operatorname{Sec} L, \quad \xi(x) = v, \quad \eta(x) = w, \quad v, w \in \boldsymbol{g}_x.$$

Алгебра Ли $\boldsymbol{g}_x$ называется *изотропной алгеброй Ли алгеброида* L *в точке* $x \in M$. Ясно, что размерность расслоения L равна сумме размерностей многообразия M и расслоения $\boldsymbol{g}$,

$$\operatorname{rank} L = \dim M + \dim \boldsymbol{g}_x.$$

Любой транзитивный алгеброид Ли L на стягиваемом многообразии M изоморфен тривиальному алгеброиду Ли [12], [13], который задается в виде декартова произведения $TM \times \mathfrak{g}$, анкером которого служит естественная проекция pr_1, а коммутатор сечений задается по формуле

$$[\![(X, \sigma), (Y, \eta)]\!] = \big([X, Y], X(\eta) - Y(\sigma) + [\sigma, \eta]\big),$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma, \eta \in C^\infty(M; \mathfrak{g})$.

Если $\gamma_L = 0$, то алгеброид L называется *вполне нетранзитивным*. Например, если расслоение $\boldsymbol{g}$ является LAB-расслоением, присоединенным к транзитивному алгеброиду, $\boldsymbol{g}$ является вполне нетранзитивным алгеброидом.

Расщепление $\lambda\colon TM \to L$ точной последовательности Атья $0 \to \boldsymbol{g} \to L \underset{\lambda}{\rightleftarrows} TM \to 0$ называется *связностью в алгеброиде Ли* L. В случае алгеброида Ли главного расслоения P имеется взаимно однозначное соответствие между связностями в алгеброиде и обычными связностями в расслоении P. Каждая связность $\lambda\colon TM \to L$ задает ковариантный градиент ∇ в присоединенном расслоении $\boldsymbol{g}$ по формуле $\nabla_X \sigma = [\![\lambda X, \sigma]\!]$, причем форма кривизны $\Omega \in \Omega^2(M; \boldsymbol{g})$ задается по формуле $\Omega(X, Y) = \lambda[X, Y] - [\![\lambda X, \lambda Y]\!]$. Если изотропные алгебры Ли являются абелевыми алгебрами, то ковариантный градиент ∇ в расслоении $\boldsymbol{g}$ является плоским, не зависит от выбора связности λ и называется *характеристическим градиентом для абелевого алгеброида Ли* L.

1.1.3. Алгеброиды Ли формируют категорию алгеброидов Ли со строгими и нестрогими гомоморфизмами. (Напомним, что под строгим гомоморфизмом векторных расслоений понимается гомоморфизм, тождественный по базе расслоения.)

Пусть L и L' – два алгеброида Ли на многообразии M. Строгий гомоморфизм $H\colon L' \to L$ векторных расслоений (т.е. тождественный по базе, $\mathrm{id}_M\colon M \to M$)

называется (*строгим*) *гомоморфизмом алгеброидов Ли*, если $\gamma \circ H = \gamma'$, а $\operatorname{Sec} H\colon \operatorname{Sec} L' \to \operatorname{Sec} L$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Пусть $(L, [\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!], \gamma)$ и $(L', [\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!]', \gamma')$ суть два алгеброида Ли соответственно на многообразиях M и M'. Под (*нестрогим*, вообще говоря) *гомоморфизмом между этими алгеброидами*

$$H\colon (L', [\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!]', \gamma') \to (L, [\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!], \gamma)$$

будем понимать такой гомоморфизм векторных расслоений $H\colon L' \to L$, скажем, над отображением $f\colon M' \to M$, что выполнены следующие условия.

a) Справедливо равенство $\gamma \circ H = f_* \circ \gamma'$.

b) Пусть $\xi, \xi' \in \operatorname{Sec} L'$ – два произвольных сечения расслоения L', а $\eta_1, \dots, \eta_n$ – некоторые сечения расслоения L, образующие базис пространства $\operatorname{Sec} L$ над некоторым открытым подмножеством $U \subset M$. Тогда сечения $H \circ \xi$ и $H \circ \xi'$ (над множеством $f^{-1}[U]$) можно записать в виде линейных комбинаций

$$\begin{aligned} H \circ \xi_{f^{-1}[U]} &= \sum_i f^i \cdot (\eta_i \circ f)_{f^{-1}[U]}, \\ H \circ \xi'_{f^{-1}[U]} &= \sum_j f'^j \cdot (\eta_j \circ f)_{f^{-1}[U]} \end{aligned}$$

для подходящих функций $f^i, f'^j \in C^\infty(M')$. Потребуем, чтобы

$$H \circ [\![\xi, \xi']\!]_{f^{-1}[U]} = \biggl(\sum_{i,j} f^i \cdot f'^j [\![\eta_i, \eta_j]\!] \circ f + \sum_j [(\gamma' \circ \xi)(f'^j) - (\gamma' \circ \xi')(f^j)] \cdot \eta_j \circ f\biggr)_{f^{-1}[U]}.$$

Тангенциальное отображение $f_*\colon TM' \to TM$ к C^∞-гладкому отображению многообразий $f\colon M' \to M$ служит примером (нестрогого) гомоморфизма регулярных алгеброидов Ли.

Вышеприведенное определение, достаточно запутанное и не интуитивное, становится вполне наглядным с точки зрения группоидов Ли: понятие нестрогого гомоморфизма вполне очевидно, оно должно быть совместимо с источниками и образами, а также с частичными композициями. Переходя к инфинитезимальным объектам (алгеброидам Ли), получаем вышеопределенный нестрогий гомоморфизм алгеброидов Ли.

В случае алгеброидов Ли L и L' на одном многообразии M понятие гомоморфизма $H\colon L' \to L$ над тождественным отображением $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ (т.е. так называемого строгого гомоморфизма) совпадает с описанным выше.

1.1.4. Пусть $L' = (L', [\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!]', \gamma')$ и $L = (L, [\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!], \gamma)$ – два алгеброида Ли на многообразиях M' и M соответственно. *Декартовым произведением алгеброидов* L' и L называется алгеброид Ли $(L' \times L, [\![\,\cdot\,,\cdot\,]\!]^\times, \gamma' \times \gamma)$ над многообразием $M' \times M$, где $L' \times L$ есть декартово произведение векторных расслоений, а для сечений $\overline{\xi} = (\xi^1, \xi^2), \overline{\eta} = (\eta^1, \eta^2) \in \operatorname{Sec}(L' \times L)$ скобка

$$[\![\overline{\xi}, \overline{\eta}]\!]^\times = ([\![\overline{\xi}, \overline{\eta}]\!]^1, [\![\overline{\xi}, \overline{\eta}]\!]^2)$$

задается формулами

$$\begin{aligned}
[\![\overline{\xi},\overline{\eta}]\!]^1_{(x,y)} &= [\![\xi^1(\,\cdot\,,y),\eta^1(\,\cdot\,,y)]\!]'_x + (\gamma\circ\xi^2)_{(x,y)}(\eta^1(x,\,\cdot\,)) - (\gamma\circ\eta^2)_{(x,y)}(\xi^1(x,\,\cdot\,)),\\
[\![\overline{\xi},\overline{\eta}]\!]^2_{(x,y)} &= [\![\xi^2(x,\,\cdot\,),\eta^2(x,\,\cdot\,)]\!]_y + (\gamma'\circ\xi^1)_{(x,y)}(\eta^2(\,\cdot\,,y)) - (\gamma'\circ\eta^1)_{(x,y)}(\xi^2(\,\cdot\,,y)).
\end{aligned}$$

Ясно, что изоиморфизм расслоений $TM \times TN = T(M\times N)$ является изоморфизмом алгеброидов Ли.

1.1.5. Пусть L и L' – два регулярных алгеброида Ли на многообразиях M и M' соответственно, и пусть $\phi, \phi' \colon L' \to L$ – два гомоморфизма алгеброидов Ли. Под *гомотопией, соединяющей гомоморфизмы ϕ и ϕ'*, мы понимаем гомоморфизм алгеброидов Ли

$$H\colon T\mathbb{R}\times L' \to L,$$

для которого $H(\theta_0,\,\cdot\,)=\phi$ и $H(\theta_1,\,\cdot\,)=\phi'$, где θ_0 и θ_1 суть касательные нулевые векторы к $\mathbb{R}$ в точках 0 и 1 соответственно [14]. Это определение можно применять и к алгебрам Ли. Гомотопия H индуцирует оператор цепной гомотопии и как следствие равенство гомоморфизмов $\phi^{\#}=\phi'^{\#}$ на уровне когомологий [14].

1.1.6. С каждым алгеброидом Ли L мы можем связать алгебру когомологий $H_L(M)$ [15], задаваемую с помощью дифференциальной градуированной алгебры L-дифференциальных форм (с вещественными коэффициентами) $(\Omega_L(M), d_L)$, у которой

$$\begin{gathered}
\Omega_L(M)=\operatorname{Sec}\wedge L^*,\qquad d_L\colon \Omega^*_L(M)\to\Omega^{*+1}_L(M),\\
\begin{aligned}
(d_L\Theta)(\xi_0,\dots,\xi_k) &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j(\gamma_L\circ\xi_j)(\Theta(\xi_0,\dots,\widehat{\xi}_j,\dots,\xi_k))\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Theta([\![\xi_i,\xi_j]\!],\xi_0,\dots,\widehat{\xi}_i,\dots,\widehat{\xi}_j,\dots,\xi_k),\\
&\quad\Theta\in\Omega^k_L(M),\quad \xi_i\in\operatorname{Sec}L.
\end{aligned}
\end{gathered}$$

Здесь L^* обозначает пространство, дуальное к пространству L, в то время как знак “$*$” в Ω^*_L обозначает градуировку дифференциальных форм.

Внешний дифференциал d_L порождает алгебру когомологий

$$H_L(M)=H(\Omega_L(M),d_L).$$

Для тривиального алгеброида Ли TM – касательного расслоения многообразия M – дифференциал d_{TM} есть обычный дифференциал де Рама d_M дифференциальных форм на многообразии M. В случае, когда $L=\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли, дифференциал $d_{\mathfrak{g}}$ совпадает с обычным дифференциалом Шевалле–Эйленберга, т.е. $d_{\mathfrak{g}}=\delta_{\mathfrak{g}}$. Произвольный (вообще говоря, нестрогий) гомоморфизм $H\colon L'\to L$ над отображением многообразий $f\colon M'\to M$ определяет обратный образ дифференциальных форм $H^*\colon \Omega_L(M)\to\Omega_{L'}(M')$ по формуле

$$H^*(\Theta)_{x'}(v_1,\dots,v_k)=\Theta_{f(x')}(H(v_1),\dots,H(v_k)).$$

Обратный образ дифференциальных форм коммутирует с внешним дифференциалом и задает гомоморфизм в когомологиях $H^{\#}\colon H_L(M)\to H_{L'}(M')$.

1.2. Функторы Ли. Так называемые функторы Ли действуют из различных категорий дифференциальных объектов, упоминавшихся вначале, таких как категория группоидов Ли, главных расслоений, векторных расслоений, трансверсально полных слоений, незамкнутых подгрупп Ли и др., в категорию алгеброидов Ли. Они обобщают функтор Ли для групп Ли.

Пример 1. Алгеброид Ли $A(P)$ G-главного расслоения $P = P(M, G)$. Имеется три различных эквивалентных определения алгеброида $A(P)$ [2]. Одно определение алгеброида $A(P)$ базируется на векторном расслоении TP/G, введенном в работе М. Атья [16], и состоит в следующем: пространство $A(P) = TP/G$ есть пространство орбит правого действия группы G на касательном расслоении TP, порожденном дифференциалами правых трансляций (см. [3], [12], [2]). Анкер задается формулой $\gamma([v]) = \pi_*(v)$. Коммутатор сечений конструируется на основе следующего наблюдения: для каждого сечения $\eta \in \operatorname{Sec} A(P)$ существует в точности одно C^∞-гладкое правоинвариантное векторное поле $\eta' \in \mathfrak{X}^R(P)$ такое, что $[\eta'(z)] = \eta(\pi z)$, $z \in P$, а отображение $\operatorname{Sec} A(P) \to \mathfrak{X}^R(P)$, $\eta \mapsto \eta'$, является изоморфизмом C^∞-модулей. Коммутатор $[\![\xi, \eta]\!]$ для $\xi, \eta \in \operatorname{Sec} A(P)$ определяется таким образом, чтобы $[\![\xi, \eta]\!]' = [\xi', \eta']$. Говорят, что транзитивный алгеброид Ли порожден главным расслоением.

Структура алгеброида Ли $A(P)$ проще, чем структура главного расслоения P. А именно, неизоморфные главные расслоения могут иметь изоморфные алгеброиды Ли. Например, существует нетривиальное главное расслоение, для которого соответствующий алгеброид Ли тривиален (нетривиальная $\mathrm{Spin}(3)$-структура тривиального главного расслоения $\mathbb{R}(5) \times SO(3)$ обладает таким свойством [2]).

Пример 2. Основная форма транзитивного алгеброида Ли. Любой транзитивный алгеброид Ли с точностью до изоморфизма представляется в следующем виде, который был описан в работе Маккензи [12] и независимо в работе Кубарски [2].

Пусть дана система $(\boldsymbol{g}, \nabla, \Omega_b)$, состоящая из LAB-расслоения $\boldsymbol{g}$ на многообразии M, ковариантного градиента ∇ в расслоении $\boldsymbol{g}$ и 2-формы $\Omega_b \in \Omega^2(M, \boldsymbol{g})$ на многообразии M со значениями в расслоении $\boldsymbol{g}$, которые удовлетворяют условиям:

1) $\nabla^2 \sigma = -[\Omega_b, \sigma]$, $\sigma \in \operatorname{Sec} \boldsymbol{g}$;
2) $\nabla_X[\sigma, \eta] = [\nabla_X \sigma, \eta] + [\sigma, \nabla_X \eta]$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma, \eta \in \operatorname{Sec} \boldsymbol{g}$;
3) $\nabla \Omega_b = 0$.

Тогда сумма расслоений $TM \oplus \boldsymbol{g}$ образует транзитивный алгеброид Ли, коммутаторная скобка в котором задается по формуле

$$[\![(X, \sigma), (Y, \eta)]\!] = ([X, Y], -\Omega_b(X, Y) + \nabla_X \eta - \nabla_X \sigma + [\sigma, \eta]),$$

а анкер определяется как проекция на первое слагаемое.

Как заметил К. Маккензи [12], эта теорема приводит к начальному шагу (имеющему название *алгебраического*) решения давно стоящей проблемы А. Вейля: выяснить, когда заданная 2-форма $\Omega_b \in \Omega^2(M; \boldsymbol{g})$ является тензором кривизны некоторой связности некоторого главного расслоения $P(M, G)$ над многообразием M, у которого расслоение $\boldsymbol{g}$ служит в качестве расслоения Ad-ассоциированных алгебр Ли.

Второй (конечный) шаг заключается в теореме [12], [17], устанавливающей препятствие к интегрируемости построенного алгеброида Ли $TM \oplus \boldsymbol{g}$.

Пример 3. Алгеброид Ли $A(\mathfrak{f})$ векторного расслоения $\mathfrak{f}$ [12], [18]. Слоем $A(\mathfrak{f})_x$ расслоения $A(\mathfrak{f})$ служит пространство таких линейных гомоморфизмов $l\colon \operatorname{Sec}\mathfrak{f} \to f_x$, для которых существует такой вектор $u \in T_xM$, называемый анкером гомоморфизма l, что

$$l(f\cdot\nu) = f(x)\cdot l(\nu) + u(f)\cdot\nu_x,$$
$$f \in C^\infty(M), \quad \nu \in \operatorname{Sec}\mathfrak{f}.$$

Тогда сечение $\xi \in \operatorname{Sec} A(\mathfrak{f})$ естественным образом задает ковариантный дифференциальный оператор в расслоении $\mathfrak{f}$. Коммутаторная скобка сечений расслоения $A(\mathfrak{f})$ задается стандартным образом для дифференциальных операторов. Алгеброид Ли $A(\mathfrak{f})$ естественным образом изоморфен алгеброиду Ли $\mathrm{GL}(V)$-главного расслоения (где V есть типичный слой расслоения $\mathfrak{f}$) всех реперов расслоения $\mathfrak{f}$. Локально, т.е. над некоторой окрестностью U некоторой точки многообразия M, алгеброид Ли $A(\mathfrak{f})_U$ изоморфен тривиальному алгеброиду $TU \times \operatorname{End}(V)$ [18; 5.4.4]. К. Маккензи [12] дает другое эквивалентное определение $\mathrm{CDO}(\mathfrak{f})$ для алгеброида Ли векторного расслоения $\mathfrak{f}$.

Понятие алгеброида Ли $A(\mathfrak{f})$ позволяет задать представление алгеброида Ли в векторном расслоении. А именно, под *представлением алгеброида Ли L в векторном пространстве* $\mathfrak{f}$ (над одним и тем же многообразием) [12] (см. также [18]) будем понимать (строгий) гомоморфизм алгеброидов Ли

$$T\colon L \to A(\mathfrak{f}).$$

Эквивалентным образом его можно задать с помощью плоского L-ковариантного градиента $\nabla_\xi\sigma$, $\xi \in \operatorname{Sec} L$, $\sigma \in \operatorname{Sec}\mathfrak{f}$, в расслоении $\mathfrak{f}$, т.е. с помощью оператора, удовлетворяющего аксиомам Кошуля, с естественным отличием в том, что $\nabla_\xi f\sigma = f\nabla_\xi\sigma + \gamma(\xi)(f)\sigma$, $\gamma(\xi) \in \mathfrak{X}(M)$, есть анкер сечения ξ, а тензор кривизны R^∇ этого градиента $\nabla_\xi\sigma$ равен нулю, $R^\nabla(\xi_1,\xi_2) = \nabla_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]} - [\![\nabla_{\xi_1},\nabla_{\xi_2}]\!] = 0$.

Любое представление $T\colon L \to A(\mathfrak{f})$ индуцирует *внешнюю степень* $\bigwedge^k T\colon L \to A\bigl(\bigwedge^k \mathfrak{f}\bigr)$, определяемую таким образом, что

$$\bigwedge^k T(\xi)(\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_k) = \sum_{i=1}^k \sigma_1\wedge\dots\wedge T(\xi)(\sigma_i)\wedge\dots\wedge\sigma_k,$$

$\xi \in \operatorname{Sec} L$, $\sigma_i \in \operatorname{Sec}\mathfrak{f}$.

Рассмотрим представление $T\colon L \to A(\mathfrak{f})$ алгеброида Ли L в векторном пространстве $\mathfrak{f}$. Сечение $\sigma \in \operatorname{Sec}\mathfrak{f}$ называется *T-инвариантным*, если $T(\xi)(\sigma) = 0$ для всех $\xi \in \operatorname{Sec} A$.

Пусть L – произвольный транзитивный алгеброид Ли. Существенную роль для него играет *присоединенное представление* $\mathrm{ad}_L\colon L \to A(\boldsymbol{g})$ алгеброида L в его присоединенном расслоении алгебр Ли $\boldsymbol{g} = \ker\gamma$, задаваемое по формуле

$\mathrm{ad}_L(\xi)(\nu) = [\![\xi,\nu]\!]$, $\xi \in \operatorname{Sec} L$, $\nu \in \operatorname{Sec}\boldsymbol{g}$. В частности, получаются внешние n-степени $\bigwedge^n \mathrm{ad}_L$ присоединенного представления, называемые *присоединенными представлениями алгеброида Ли L в расслоении $\bigwedge^n \boldsymbol{g}$.*

Отсюда получается, что сечение ε расслоения $\bigwedge^n \boldsymbol{g}$ является $\bigwedge^n \mathrm{ad}_L$-инвариантным тогда и только тогда, когда в любом открытом подмножестве $U \subset M$, на котором ε имеет вид $\varepsilon_U = (h_1 \wedge \cdots \wedge h_n)_U$, $h_i \in \operatorname{Sec}\boldsymbol{g}$, для всех сечений $\xi \in \operatorname{Sec} A$ имеет место равенство

$$\bigwedge^n \mathrm{ad}_A(\xi)(\varepsilon)_U = \sum_{i=1}^n (h_1 \wedge \cdots \wedge [\![\xi, h_i]\!] \wedge \cdots \wedge h_n)_U = 0. \tag{1}$$

Пример 4. Алгеброид Ли $A(M,\mathscr{F})$ трансверсально полного слоения $(M,\mathscr{F})$ связного хаусдорфова паракомпактного многообразия M [5]. Напомним, что слоение $(M,\mathscr{F})$ называется *трансверсально полным* (ТС- для краткости), если в каждой точке $x \in M$ семейство $L_c(M,\mathscr{F})$ полных векторных полей, глобально совместимых со слоением $\mathscr{F}$ (т.е. таких, динамическая система которых оставляет слоение инвариантным), порождает все касательное пространство T_xM. Дополнительно отметим, что

a) трансверсально полные слоения играют существенную роль в теории римановых слоений [6],

b) среди трансверсально полных слоений имеются такие, у которых алгеброиды Ли не интегрируемы. Этот факт, отмеченный в работе Р. Альмеида и П. Молино в 1985 году [17], оказался наиболее важным во всей теории алгеброидов Ли.

Первая структурная теорема Молино [6; теорема 4.2] утверждает, что замыкания слоев ТС-слоения $\mathscr{F}$ образуют простое слоение $\mathscr{F}_b$, называемое *базисным*, и являются слоями некоторого локально тривиального базисного расслоения $\pi_b\colon M \to W$ на хаусдорфовом паркомпактном базисном многообразии W.

Рассмотрим трансверсальное расслоение $Q = TM/E$ $(E = T\mathscr{F})$ к слоению $\mathscr{F}$. Сечение ξ расслоения Q, представляемое векторным полем, совместимым со слоением, называется *трансверсальным полем.* Его значение в точке $x \in M$ единственным образом определяет значение в любой точке y слоя $(L_b)_x$ базисного слоения $\mathscr{F}_b$, проходящего через точку x. Трансверсальные поля играют роль, аналогичную правоинвариантным векторным полям на главных расслоениях. Факторизация $A(M,\mathscr{F}) = Q/{\equiv}$ расслоения Q с помощью отождествления значений трансверсальных полей в точке слоя $\mathscr{F}_b$ (соответствующего правым трансляциям векторов, касательных к главному расслоению) имеет естественную структуру векторного расслоения над пространством W. Глобальные сечения пространства $A(M,\mathscr{F})$ соответствуют трансверсальным полям. Последние образуют алгебру Ли, так что и $\operatorname{Sec} A(M,\mathscr{F})$ является алгеброй Ли. Вместе с гомоморфизмом $\gamma\colon A(M,\mathscr{F}) \to W$, определяемым с помощью расслоения $\pi_b\colon M \to W$, мы получаем некоторый транзитивный алгеброид Ли. Слоение $(M,\mathscr{F})$ на компактном многообразии называется *трансверсально параллелизуемым* (ТР- для краткости), если трансверсальное расслоение Q тривиально и обладает базисом трансверсальных полей. Очевидно, что ТР-слоения являются трансверсально полными.

Пример 5. Алгеброид Ли $A(G;H)$ незамкнутой подгруппы Ли H группы G – это алгеброид Ли ТС-слоения $\mathscr{F}_{G,H} = \{aH; a \in G\}$ левых классов смежности группы Ли G по связной подгруппе Ли $H \subset G$ (если подгруппа H замкнута, то $A(G;H)$ тривиален, так что имеет смысл рассматривать только случай, когда подгруппа H незамкнута). Алгеброид $A(G;H)$ можно построить, не используя общей теории ТС-слоений [7], поскольку его тотальное пространство равно пространству орбит правого свободного действия $\overline{R}\colon Q \times \overline{H} \to Q$ замыкания $\overline{H}$ подгруппы H на трансверсальном расслоении Q, которое для $t \in \overline{H}$, $\overline{R}_t\colon Q \to Q$ определяется как автоморфизм, задаваемый в виде дифференциала правой трансляции $R_t\colon TG \to TG$ с использованием инвариантности касательного к слоению пространства E при действии R_t. Сечение ξ расслоения Q является трансверсальным полем тогда и только тогда, когда сечение ξ инвариантно по отношению к действию $\overline{R}$. Поэтому отношение "$\equiv$" на расслоении Q, с помощью которого задается алгеброид $A(G;H)$, определяется по формуле $\overline{v} \equiv \overline{w} \Leftrightarrow \exists\, t \in \overline{H}, \overline{R}_t(\overline{v}) = \overline{w}$.

Напомним, что $A(G;H)$ является транзитивным алгеброидом Ли над однородным пространством $G/\overline{H}$ с тривиальным присоединенным расслоением абелевых изотропных алгебр Ли $\boldsymbol{g} \cong G/\overline{H} \times \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ [18], [7]. При указанном отождествлении последовательность Атья имеет вид

$$0 \to G/\overline{H} \times \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h} \to A(G,H) \to T(G/\overline{H}) \to 0,$$

а характеристический плоский ковариантный градиент совпадает со стандартным градиентом векторнозначных функций $\nabla_X = \partial_X$.

Следующие два примера дают интерпретацию алгебр когомологий алгеброидов Ли главных расслоений и ТС-слоений.

Примеры. 1) Если $L = A(P) = TP/G$ для некоторого главного G-расслоения $P \to M$, то

$$\Omega_L(M) \cong \Omega^r(P) \hookrightarrow \Omega(P),$$

где $\Omega^r(P)$ есть пространство G-право инвариантных дифференциальных форм на P, а

$$H_L(M) \cong H(\Omega^r(P))\overset{i}{H}_{dR}(P).$$

Гомоморфизм i является изоморфизмом в случае, когда группа G связна и компактна.

2) Если $L = A(M;\mathscr{F}) \to W$ есть алгеброид Ли некоторого ТС-слоения $\mathscr{F}$ на многообразии M с базовым многообразием W, то

$$\Omega_L(W) \cong \Omega(M;\mathscr{F}),$$

где $\Omega(M;\mathscr{F})$ есть алгебра $\mathscr{F}$-базовых дифференциальных форм, поэтому $H_L(W) \cong H(M;\mathscr{F})$ есть алгебра базовых когомологий [19].

1.3. Инвариантно ориентированные алгеброиды Ли и сигнатура. В дальнейшем нас будут интересовать транзитивные алгеброиды Ли, алгебра когомологий $H_L(M)$ которых снабжена двойственностью Пуанкаре [19]. TUIO-алгеброиды Ли [20] (т.е. транзитивные унимодулярные инвариантно ориентированные) являются примерами таких алгеброидов. Чтобы определить TUIO-алгеброид Ли, рассмотрим точную последовательность Атья $0 \longrightarrow \boldsymbol{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \longrightarrow 0$ и предположим, что

A1) $m = \dim M$, $n = \operatorname{rank} \boldsymbol{g} = \dim \boldsymbol{g}_x$, расслоение $\bigwedge^n \boldsymbol{g}$ тривиально.

Пусть $\varepsilon \in \operatorname{Sec} \bigwedge^n \boldsymbol{g}$ есть некоторая ориентирующая форма расслоения $\boldsymbol{g}$. Фундаментальную роль играет послойный интеграл [20]

$$\int_L : \Omega_L^*(M) \to \Omega_{dR}^{*-n}(M),$$

который определяется следующим образом:
если $\deg \Phi < n$, то

$$\int_L \Phi = 0,$$

а если $k = \deg \Phi \geqslant n$, то

$$\left(\int_L \Phi\right)_x (w_1 \wedge \dots \wedge w_{k-n}) = (-1)^{n(k-n)} \Phi_x(\varepsilon_x \wedge \widetilde{w}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{w}_{k-n}),$$

где векторы $\widetilde{w}_i \in L_x$ накрывают векторы w_i, $\gamma_L(\widetilde{w}_i) = w_i$. Другими словами,

$$\gamma_L^*\left(\int_L \Phi\right) = (-1)^{n(k-n)} \iota_\varepsilon \Phi,$$

где ι_ε обозначает оператор подстановки $\iota_\varepsilon \colon \Omega_L^n(M) \to \Omega_L^{n-k}(M)$, определяемый по формуле

$$(\iota_\varepsilon \Phi)_x (v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-k}) = \Phi_x(\varepsilon_x \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-k}), \qquad v_i \in A_x.$$

Оператор $\int_L$ коммутирует с внешними дифференциалами d_L и d_M тогда и только тогда, когда (см. [20])

a) изотропные алгебры Ли $\boldsymbol{g}_x$ являются унимодулярными, т.е. $H^n(\boldsymbol{g}_x) = \mathbb{R}^1$,
b) сечение ε инвариантно по отношению к присоединенному представлению алгеброида L на расслоении $\bigwedge^n \boldsymbol{g}$, т.е. имеет место соотношение (1).

Алгеброид Ли L, удовлетворяющий условиям a) и b), называется TUIO-алгеброидом Ли. Послойный интегральный оператор $\int_L \colon \Omega_L^*(M) \to \Omega_{dR}^{*-n}(M)$ приводит к гомоморфизму в когомологиях

$$\int_L^{\#} : H_L^*(M) \to H_{dR}^{*-n}(M).$$

Примеры. 1) Алгеброид Ли $A(P)$ главного G-расслоения $P \to M$ является TUIO-алгеброидом Ли в случае, когда G обладает свойством $\det(\mathrm{Ad}_G\, a) = +1$, $a \in G$ [20], [19].

2) Алгеброид Ли $A(M;\mathscr{F})$ трансверсально параллелизуемого слоения на компактном односвязном связном многообразии является TUIO-алгеброидом Ли.

3) Алгеброид Ли $A(G;H)$ некоторой незамкнутой подгруппы Ли H в группе Ли G (т.е. алгеброид Ли соответствующего трансверсально полного слоения левых классов смежности подгруппы H в группе G) является TUIO-алгеброидом Ли. При этом присоединенное расслоение алгебр Ли этого алгеброида Ли $A(G;H)$ является тривиальным расслоением абелевых алгебр Ли [7].

Предположим, что многообразие M связно и ориентированно. Для дифференциальной формы ω размерности $m+n$ с компактным носителем из алгеброида L, $\omega \in \Omega^*_{L,c}(M)$, положим по определению

$$\int_L \omega := \int_M \Big(\fint_L \omega \Big).$$

Таким образом определенный оператор $\displaystyle\int_L$ задает эпиморфизм на кольце когомологий [7]

$$\int_L^{\#} : H_{L,c}(M) \to \mathbb{R}.$$

Скалярное произведение Пуанкаре

$$H^*_L(M) \times H^{m+n-*}_{L,c}(M) \to \mathbb{R}, \qquad (\alpha,\beta) \longmapsto \int_L^{\#} \alpha\wedge\beta,$$

является невырожденным, т.е.

$$H_L(M) \cong (H_{L,c}(M))^*.$$

Как следствие получаем, в частности, что

$$H^{m+n}_{L,c}(M) \cong \mathbb{R}.$$

Предположим теперь, что

A2) многообразие M является компактным связным ориентированным многообразием.

В этом случае когомологии с компактными носителями совпадают с обычными когомологиями, $H_{L,c}(M) = H_L(M)$, а скалярное произведение Пуанкаре является невырожденной формой на когомологиях:

$$\mathscr{P}^*_L \colon H^*_L(M) \times H^{m+n-*}_L(M) \to \mathbb{R}, \qquad (\alpha,\beta) \longmapsto \int_L^{\#} \alpha\wedge\beta.$$

Если $m+n = 4k$, то квадратичная форма $\mathscr{P}^{2k}_L$ симметрична и ее сигнатура (иногда называемая индексом) обозначается через $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L)$ (или кратко $\mathrm{Sign}(L)$) и называется *сигнатурой алгеброида* L (знак $+$ или $-$ сигнатуры зависит от выбора инвариантной ориентации ε). В остальных случаях (т.е. когда $m+n \neq 0 \pmod 4$) по определению полагаем $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L) = 0$.

Проблема 1 (сформулированная в [19]). *Вычислить сигнатуру* $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L)$ *и найти условия, при которых эта сигнатура тривиальна, т.е.*

$$\mathrm{Sign}_\varepsilon(L) = 0.$$

Заметим, что это равенство справедливо в следующих классических случаях:

1) $L = \mathfrak{g}$ является унимодулярной алгеброй Ли;
2) $L = A(P)$ является алгеброидом Ли главного расслоения с компактной структурной группой Ли над компактным ориентируемым многообразием.

Для изучения сигнатуры алгеброида L мы используем технику спектральных последовательностей комплекса Чеха–де Рама $K^{*,*}$ дифференциальных форм алгеброида L, аналогичного комплексу Чеха–де Рама для многообразия, и воспользуемся известными методами и утверждениями из работы [21].

Для этого напомним из этой работы главную теорему.

Теорема 2. *Пусть $E \to B$ есть расслоенное пространство со слоем F, для которого выполнены следующие условия:*

1) *пространства E, B, F являются компактными связными ориентированными многообразиями;*
2) *фундаментальная группа базы $\pi_1(B)$ тривиально действует на кольце когомологий $H^*(F)$ слоя F.*

Тогда если многообразия E, B, F ориентированны согласованно, так что ориентация многообразия E индуцируется ориентациями на базе F и слое B, то индекс многообразия E равен произведению индексов многообразий F и B, т.е.

$$\mathrm{Sign}(E) = \mathrm{Sign}(F) \cdot \mathrm{Sign}(B).$$

Авторы статьи рассматривают когомологическую спектральную последовательность $E_s^{p,q}$ расслоения $E \to B$ с коэффициентами в поле вещественных чисел. Согласно предположению 2) теоремы второй член E_2 спектральной последовательности образует биградуированную алгебру

$$E_2^{j,i} \cong H^j(B; H^i(F)) \cong H^j(B) \otimes H^i(F),$$

откуда

$$E_2^{j,i} = 0 \quad \text{при} \quad j > m \quad \text{или} \quad i > n.$$

Согласно предположению 1) теоремы второй член E_2 спектральной последовательности является алгеброй Пуанкаре. Поэтому, используя естественные свойства спектральных последовательностей, авторы замечают, что все члены спектральной последовательности

$$(E_s, d_s, \cdot), \qquad s \geqslant 2,$$

тоже образуют алгебры Пуанкаре, дифференциалы которых удовлетворяют естественным свойствам для алгебр Пуанкаре. Следовательно, и бесконечный член спектральной последовательности $(E_\infty, \cdot\,)$ является алгеброй Пуанкаре с той же сигнатурой

$$\operatorname{Sign} E_2 = \operatorname{Sign} E_3 = \dots = \operatorname{Sign} E_\infty.$$

В заключение доказывается, что $\operatorname{Sign} E_\infty = \operatorname{Sign} H(E)$. Отметим, что это – не тривиальное следствие, поскольку алгебры E_∞ и $H(E)$, вообще говоря, не изоморфны (хотя $E_\infty \cong H(E)$ как линейные пространства).

Мы воспользуемся изложением версии спектральной последовательности для расслоенных многообразий на языке комплексов Чеха–де Рама для так называемых хороших покрытий из [22] или [23] и обобщим ее на случай транзитивных алгеброидов Ли.

Построенный ниже двойной комплекс $K^{*,*}$ для произвольных транзитивных алгеброидов Ли в случае алгеброида Ли $A = A(M, \mathscr{F})$ над базовым многообразием W некоторого TP-слоения $(M, \mathscr{F})$ совпадает с двойным комплексом из [24] (благодаря естественному изоморфизму дифференциальных градуированных алгебр $\Omega_L(W) \cong \Omega(M/\mathscr{F})$).

§ 2. Комплекс Чеха–де Рама транзитивного алгеброида Ли

Рассмотрим произвольный транзитивный алгеброид Ли L на многообразии M с изотропными алгебрами Ли $\boldsymbol{g}_x$, которые изоморфны данной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если открытое подмножество $U \subset M$ диффеоморфно евклидовому пространству $\mathbb{R}^m$, то ограничение L_U алгеброида L на подмножество U является тривиальным алгеброидом Ли, точнее, изоморфно тривиальному алгеброиду $TU \times \mathfrak{g}$. Эти изоморфизмы не являются естественными, поскольку зависят от выбора плоской связности на ограничении L_U. Обозначим для краткости алгебру когомологий $H_{L_U}(U)$ через $H_L(U)$. Согласно формуле Кюннета имеем (см. [19])

$$H_L(U) \cong H(U) \otimes H(\mathfrak{g}) \cong H(\mathfrak{g}).$$

Рассмотрим так называемое хорошее покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ многообразия M для счетного линейно упорядоченного множества индексов J. Это значит, что все множества покрытия U_α и все их непустые конечные пересечения $\bigcap_i U_{\alpha_i}$ диффеоморфны евклидовому пространству $\mathbb{R}^m$.

Образуем двойной комплекс типа Чеха–де Рама

$$K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) := \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega_L^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}),$$

$p, q \geqslant 0$, мультипликативная структура

$$\cup \colon K^{p,q} \times K^{r,s} \to K^{p+r,q+s}$$

которого задается по формуле

$$(\omega \cup \eta)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+r}} = (-1)^{qr} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}|U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+r}} \wedge \eta_{\alpha_p \dots \alpha_{p+r}}|U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+r}}.$$

Этот комплекс имеет два естественных граничных гомоморфизма: горизонтальный δ и вертикальный d.

Вертикальный гомоморфизм

$$d\colon C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) \to C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^{q+1})$$

действует как внешнее дифференцирование дифференциальных форм на алгеброиде L:

$$d = (-1)^p d_L.$$

Горизонтальный гомоморфизм

$$\delta\colon C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \Omega_L^q)$$

действует как кограничный оператор в коцепях покрытия

$$(\delta\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \omega_{\alpha_0\ldots\widehat{\imath}\ldots\alpha_{p+1}}|U_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}}.$$

Как вертикальный гомоморфизм d, так и горизонтальный гомоморфизм δ являются антидифференцированиями степени $+1$ по отношению к суммарной градуировке,

$$d, \delta\colon K^{(r)} \to K^{(r+1)}, \qquad K^{(r)} = \bigoplus_{p+q=r} K^{p,q},$$
$$d(\omega \cup \eta) = d\omega \cup \eta + (-1)^{\deg\omega}\omega \cup d\eta,$$

аналогичное свойство имеет место и для гомоморфизма δ. Поэтому набор

$$(K, K^{p,q}, \cup, d, \delta)$$

образует двойной комплекс первого квадранта с мультипликативной структурой.

Этот комплекс удобно представлять в виде диаграммы

$$C^*(\mathfrak{U}, \Omega_L^*) = \left\{
\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\uparrow{\scriptstyle d} & & \uparrow{\scriptstyle d} & & & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \\
C^0(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle d} & & \uparrow{\scriptstyle d} & & & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\uparrow{\scriptstyle d} & & \uparrow{\scriptstyle d} & & & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \\
C^0(\mathfrak{U}, \Omega_L^1) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathfrak{U}, \Omega_L^1) & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^1) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle d} & & \uparrow{\scriptstyle d} & & & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \\
C^0(\mathfrak{U}, \Omega_L^0) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathfrak{U}, \Omega_L^0) & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^0) & \xrightarrow{\delta} & \cdots
\end{array}\right.$$

Суммарный оператор $D = d+\delta$ тоже является антидиффернцированием. Комплекс дифференциальных форм алгеброида вкладывается в двойной комплекс K по формуле

$$r\colon \Omega_L^* \to K^{0,*} \subset K^{(*)}, \qquad r(\omega)_\alpha = \omega|U_\alpha,$$

причем этот гомоморфизм является гомоморфизмом дифференциальных градуированных алгебр.

В самом деле, оператор d коммутирует с гомоморфизмом r и выполняется условие $\delta \circ r = 0$. Значит, $r \circ D = D \circ r$. Следовательно, он порождает гомоморфизм когомологий

$$r^{\#}\colon H_L^*(M) \to H^{(*)}(K, D).$$

Предложение 3. *Последовательность Майера–Виеториса для транзитивного алгеброида Ли, т.е. аугментированная строка в двойном комплексе*

$$0 \longrightarrow \Omega_L^q(M) \xrightarrow{r} K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} \cdots,$$

является точной.

Доказательство стандартно получается использованием разбиения единицы $\{\rho_\alpha\}$, подчиненного покрытию $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$, и оператора цепной гомотопии

$$H\colon K^{p,q} \to K^{p-1,q}, \qquad (H\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \cdot \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}},$$

для которого выполнено тождество

$$H\delta + \delta H = \mathrm{Id}\colon K^{p,q} \to K^{p,q}, \qquad p \geqslant 1.$$

Следующее утверждение является стандартным (см., например, [22]).

Предложение 4. *Если все строки аугментированного комплекса точны, то D-когомологии комплекса изоморфны когомологиям начального столбца.*

Из него мы получаем

Следствие 5. *Гомоморфизм $r^{\#}\colon H_L^*(M) \to H^{(*)}(K,D)$ является изоморфизмом градуированных алгебр когомологий.*

Рассмотрим “горизонтальную” фильтрацию

$$K_j = \bigoplus_{\substack{p \geqslant j \\ q \geqslant 0}} K^{p,q}.$$

Согласно общей конструкции спектральной последовательности (см., например, [25; 1.4.2], а также [26], [22]) для указанной фильтрации в соответствии с мультипликативной структурой DG-алгебры $(K, K^{(r)}, \cup, D, K_j)$ можно построить спектральную последовательность градуированных дифференциальных групп $(E_s^{p,q}, d_s)$,

$$d_s\colon E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s,q-s+1},$$

для которых
$$E_{s+1}^{p,q} = H(E_s^{p,q}, d_s),$$
причем группа $E_\infty^{p,q}$ присоединена к кольцу когомологий $H(K, D)$ по отношению к фильтрации, индуцированной фильтрацией $\{K_j\}$.

Фильтрация K_j является регулярной, $K_0 = K$, поэтому спектральная последовательность $(E_s^{p,q}, d_s)$ сходится к $H(K, D)$ (см. [26]). Более того, справедливо следующее:

1) все члены E_s, $0 \leqslant s \leqslant \infty$, являются градуированными алгебрами;
2) дифференциалы d_s являются антидифференцированиями по отношению к общей градуировке $(s, 1-s)$;
3) естественные отождествления
$$\sigma_s \colon E_{s+1} \to H(E_s, d_s), \qquad \sigma_\infty \colon E_\infty \to E_0(H(K, D))$$
являются изоморфизмами биградуированных алгебр; вообще говоря, алгебры $H(K, D)$ и E_∞ не изоморфны, хотя пространства $H(K, D) \cong E_\infty$ неканонически изоморфны.

Нулевой член спектральной последовательности $E_0^{p,q}$ задается по формуле
$$E_0^p = K_p/K_{p+1}, \qquad E_0^{p,q} = K^{p,q}.$$

Тогда дифференциал
$$d_0 \colon E_0^{p,q} \longrightarrow E_0^{p,q+1},$$
$$d_0 \colon K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) \longrightarrow K^{p,q+1} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^{q+1})$$
совпадает с d.

Первый член спектральной последовательности (E_s, d_s) выглядит следующим образом:
$$E_1^{p,q} = H^{p,q}(K, d) = C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{H}_L^q), \qquad d_1 = \delta^\# \colon E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q},$$
где
$$\mathscr{H}_L^* = (U \longmapsto H_L^*(U))$$
есть предпучок когомологий типа Лере, являющийся локально постоянным пучком на хорошем покрытии со значением в группе (точнее, в алгебре) $H^*(\mathfrak{g})$.

Теорема 6. *Второй член спектральной последовательности $E_s^{p,q}$ вычисляется по формуле*
$$E_2^{p,q} = H^{p,q}(H(K, D), \delta^\#) = H_{\delta^\#}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{H}_L^q).$$

Таким образом, из теоремы 6 и следствия 5 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 7 (теорема Лере для транзитивных алгеброидов Ли). *Существует спектральная последовательность* $E_s^{j,i}$, *сходящаяся к когомологиям* $H_L(M)$ *алгеброида Ли* L,

$$E_s^{j,i} \Longrightarrow H_L(M)$$

такая, что $E_2^{j,i} = H^j_{\delta\#}(\mathfrak{U}, \mathscr{H}^i_L)$.

Замечание 1. Сделаем несколько замечаний о пучке $\widetilde{\mathscr{H}^*_L}$, ассоциированном с предпучком $\mathscr{H}^*_L$,

$$(\widetilde{\mathscr{H}^*_L})(x) = \liminf_{U \ni x} H^*_L(U).$$

Заметим, что расслоение $H(\boldsymbol{g})$ когомологий изотропных алгебр Ли с типичным слоем $H(\mathfrak{g})$ обладает естественной локальной тривиализацией с локально постоянными функциями склейки. В самом деле, для любой окрестности $M \supset U \cong \mathbb{R}^m$ и любого изоморфизма алгеброидов Ли

$$\varphi_U \colon L_U \to TU \times \mathfrak{g}$$

получается локальная тривиализация

$$\widetilde{\varphi}_U \colon H(\boldsymbol{g})_U \to U \times H(\mathfrak{g}),$$

определяемая по формуле

$$(\widetilde{\varphi}_U)_x = \bigl((\varphi^+_{Ux})^{-1}\bigr)^{\#} \colon H(\boldsymbol{g}_x) \to H(\mathfrak{g}),$$

где $\varphi^+_{Ux} \colon \boldsymbol{g}_x \to \mathfrak{g}$ – изоморфизм алгебр Ли, являющийся ограничением изоморфизма φ_U на ядро $\boldsymbol{g}_x = \ker(\gamma_L)_x$ анкера γ_L.

Через $\mathscr{A}_L$ обозначим множество так определенных локальных тривиализаций $\{\widetilde{\varphi}_U\}$ расслоения $H(\boldsymbol{g})$.

Две локальных тривиализации φ_U и φ_V на окрестностях U и V соответственно дают гладкое семейство изоморфизмов алгебр Ли

$$\lambda_x \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \lambda_x = \varphi^+_{Ux} \circ (\varphi^+_{Vx})^{-1}, \quad x \in U \cap V.$$

Ясно, что функция склейки

$$x \longmapsto (\lambda_x)^{\#} \colon H(\mathfrak{g}) \to H(\mathfrak{g})$$

является локально постоянной.

Действительно, для произвольных точек x и y, принадлежащих одной компоненте связности множества $U \cap V$, и для произвольного гладкого пути $\alpha \colon \mathbb{R} \to U \cap V$, соединяющего эти точки, можно рассмотреть композицию гомоморфизмов алгеброидов Ли

$$T\mathbb{R} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha_* \times \mathrm{id}} T(U \cap V) \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi_U \circ (\varphi_V)^{-1}} T(U \cap V) \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathfrak{g}.$$

Полученный таким путем нестрогий гомоморфизм алгеброидов Ли над отображением $\mathbb{R}\times\{*\}\to\{*\}$ является гомотопией между λ_x и λ_y. Следовательно, $\lambda_x^\# = \lambda_y^\#$ (см. пп. 1.1.5).

Все вышесказанное позволяет заменить топологию расслоения $H(\boldsymbol{g})$ на топологию $H_d(\boldsymbol{g})$ таким образом, чтобы слои стали дискретными и для любого вектора $v \in H(\mathfrak{g})$ и локальной тривиализации φ_U на карте $U \cong \mathbb{R}^m$ сечение $x \mapsto (\varphi^+_{Ux})^\#(v)$ осуществляет гомеоморфизм карты на открытое подмножество в тотальном пространстве $H_d(\boldsymbol{g})$.

Ясно, что расслоение $H_d(\boldsymbol{g})$ порождает пучок. Другими словами, функции склейки являются функциями склейки со значениями в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, в которой топология отличается от классической и определяется следующим образом. Рассмотрим любой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть $\varphi^\#: H(\mathfrak{g}) \to H(\mathfrak{g})$ обозначает индуцированный автоморфизм в группе когомологий. Через $\mathrm{Aut}_h(g)$ обозначим стационарную подгруппу по отношению к действию в когомологиях, т.е. подгруппу всех таких автоморфизмов $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, что $\varphi^\# = \mathrm{Id}$. Изменим топологию в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ с помощью прибавления еще одного открытого множества, а именно подгруппы $\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$. Через $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})$ обозначим группу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ с новой топологией. Ясно, что факторгруппа $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$ дискретна и служит структурной группой расслоения $H_d(\boldsymbol{g})$, соответствующей атласу алгеброида $\mathscr{A}_L$.

Покажем, что имеет место изоморфизм пучков

$$\rho: \widetilde{\mathscr{H}}_L \cong H_d(\boldsymbol{g}),$$

который задается следующим образом: рассмотрим вложение расслоений $\iota: \boldsymbol{g} \hookrightarrow L$, которое будем рассматривать как гомоморфизм алгеброидов Ли, где $\boldsymbol{g}$ есть вполне нетранзитивный алгеброид Ли с нулевым анкером.

Тогда для любого открытого множества U получаем гомоморфизм когомологий

$$\iota^\#: H_L(U) \longrightarrow H_{\boldsymbol{g}}(U).$$

Пространство $H_L^*(U)$ вычисляется следующим образом. Если открытое множество из хорошего покрытия, т.е. $U \cong \mathbb{R}^m$, то алгеброид L_U изоморфен тривиальному алгеброиду $TM \oplus \mathfrak{g}$.

Значит [19], алгебра внешних L_U-дифференциальных форм изоморфна антикоммутативному тензорному произведению

$$\Omega_L(L_U) = \Omega(TM_U) \otimes \wedge(\mathfrak{g}^*),$$

дифференциал в котором равен $d_U \otimes \mathrm{id} + \omega \otimes \delta_{\mathfrak{g}}$, где $\omega(\varphi) = (-1)^{\deg\varphi}\varphi$, а $\delta_{\mathfrak{g}}$ есть дифференциал Эйленберга–Шевалле.

Следовательно, имеет место изоморфизм колец когомологий

$$H_L(U) = H(U) \otimes H(\mathfrak{g}) \cong H(\mathfrak{g}),$$

поскольку

$$H(U) \cong H^0(U) = \mathbb{R}.$$

Более того, элементы из $H^0(U)$ представляются постоянными на U функциями. Следовательно, каждый элемент $s \in H^*_L(U)$ представляется постоянным сечением в расслоении $U \oplus H^*(\mathfrak{g})$. Поэтому образ гомоморфизма $\iota^{\#}$ состоит из постоянных сечений расслоения $H_{\boldsymbol{g}}(U)$ т.е. из непрерывных сечений пучка $H_d(\boldsymbol{g})$.

Другими словами, гомоморфизм ρ, задаваемый по формуле

$$\widetilde{\mathscr{H}}_L(x) = \varinjlim_{U \ni x} H_L(U) \xrightarrow{\rho_x^{\#}} H(\boldsymbol{g}_x), \qquad [s] \longmapsto [\rho_x^{\#} s],$$

является изоморфизмом, где $\rho_x \colon \boldsymbol{g}_x \hookrightarrow L$ есть гомоморфизм алгеброидов Ли над вложением точки x в многообразие M, $\iota\colon \{x\} \hookrightarrow M$.

Приведем пример, в котором расслоение алгебр Ли $\boldsymbol{g}$ тривиально по отношению к структурной группе $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})$. Предположим, что изотропные алгебры Ли $\boldsymbol{g}_x$ абелевы, а расслоение алгебр Ли $\boldsymbol{g}$ тривиально в обычном смысле, т.е. $\boldsymbol{g} \cong M \times \mathfrak{g}$. Тогда расслоение $\boldsymbol{g}$ тривиально и по отношению к группе $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})$ или, эквивалентно, пучок $\widetilde{\mathscr{H}}_L \cong H_d(\boldsymbol{g})$ является глобально постоянным, т.е. в частности, пучок $\widetilde{\mathscr{H}}_L$ имеет тривиальную монодромию, если характеристический ковариантный градиент в расслоении $M \times \mathfrak{g}$ является стандартным градиентом векторнозначных функций $\nabla_X = \partial_X$. Примером алгеброидов Ли такого типа является алгеброид $A(G;H)$ незамкнутой подгруппы H в группе G [8].

Действительно, последовательность Атья для алгеброида A имеет вид $0 \longrightarrow M \times \mathfrak{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \longrightarrow 0$. Тогда, выбирая локально плоские связности $\lambda\colon TU \to A_U$, можно определить локальные тривиализации $\varphi_U \colon L_U \to TU \times \mathfrak{g}$ по формуле $(\varphi_U)^{-1}(X,\sigma) = \lambda(X) + \sigma$. Тогда $(\varphi_U)^+ = \mathrm{id}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, откуда следует, что определенный выше податлас A_L задает локальную тривиализацию в расслоении $H_d(\boldsymbol{g})$ с тривиальной структурной группой $\{\mathrm{id}\}$. Поэтому $\widetilde{\mathscr{H}}_L \cong M \times H(\mathfrak{g})_d$, где $H(\mathfrak{g})_d$ есть векторное пространство с дискретной топологией.

§ 3. Сигнатура транзитивного алгеброида с тривиальной монодромией

Мы будем предполагать, что

A3) предпучок $\mathscr{H}^*_L$ является постоянным на некотором хорошем покрытии $\mathfrak{U}$, т.е. для каждого открытого подмножества $U \in \mathrm{Open}_{\mathfrak{U}}(M)$ (подкатегории конечных пересечений $U_{\alpha_0\dots\alpha_p} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ открытых множеств из $\mathfrak{U}$) существует такой изоморфизм алгебр

$$\varphi_U \colon H_L(U) \cong H(\mathfrak{g}),$$

что все композиции вида $\varphi_V \rho^U_V \varphi_U^{-1}$ равны тождественному отображению алгебры $H(\mathfrak{g})$, где $\rho^U_V \colon H_L(U) \to H_L(V)$ ($V \subset U$, $V, U \in \mathrm{Open}_{\mathfrak{U}}(M)$) есть оператор ограничения в предпучке. Другими словами, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H_L(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & H(\mathfrak{g}) \\ \Big\downarrow{\rho^U_V} & & \Big\downarrow{\mathrm{Id}} \\ H_L(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & H(\mathfrak{g}) \end{array}.$$

Условие А3) эквивалентно

А3$'$) представление монодромии предпучка $\mathscr{H}_L^*$ фундаментальной группы

$$\rho\colon \pi_1(M) = \pi_1(N(\mathfrak{U})) \to \operatorname{Aut}(H(\mathfrak{g}))$$

является тривиальным.

Совершенно ясно, что как условие А3), так и условие А3$'$) можно эквивалентно переформулировать как тривиальность представления монодромии фундаментальной группы многообразия M для присоединенного расслоения изотропных алгебр Ли, т.е. ядра анкера $\boldsymbol{g} := \ker \gamma_L$.

Примеры. Условие тривиальности монодромии выполняется в следующих случаях:

1) многообразие M односвязно ($\pi_1(N(\mathfrak{U})) = \pi_1(M) = 0$, поэтому $\rho = 0$);
2) присоединенное расслоение изотропных алгебр Ли $\boldsymbol{g}$ тривиально по отношению к каноническому атласу локальных тривиализаций $\mathscr{A}_L$ и структурной группе $\operatorname{Aut}^s(\mathfrak{g})$ (см. замечание 1);
3) $\operatorname{Aut}(G) = \operatorname{Int}(G)$, где G есть односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\boldsymbol{g}_x$.

Таким образом, из теоремы Лере следует, что

$$E_2^{j,i} = H^j_{\delta\#}(\mathfrak{U}, \mathscr{H}_L^i) \cong H^j(\mathfrak{U}, H^i(\mathfrak{g})) \cong H^j(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \otimes H^i(\mathfrak{g}) \cong H^j_{dR}(M) \otimes H^i(\mathfrak{g}).$$

Все изоморфизмы являются каноническими изоморфизмами биградуированных алгебр. В частности, это значит, что член E_2 находится в прямоугольнике $j \leqslant m$, $i \leqslant n$ и

$$E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n} = H^m_{dR}(M) \otimes H^n(\mathfrak{g}).$$

В соответствии с условиями А1) и А2), а также условием

А4) изотропная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ унимодулярна, т.е. $\dim H^n(\mathfrak{g}) = 1$,

получаем, что справедливо следующее:

1) $\dim E_2^{(m+n)} = \dim H^m(M) \cdot \dim H^n(\mathfrak{g}) = 1$;
2) член $E_2 = H_{dR}(M) \otimes H(\mathfrak{g})$ является алгеброй Пуанкаре по отношению к суммарной градуировке, причем максимальная группа равна $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Напомним (см. [21]), что градуированная конечномерная алгебра

$$\left(A = \bigoplus_{0 \leqslant r < \infty} A^r, \cup\right)$$

называется *алгеброй Пуанкаре*, если

1) существует такой номер n_0, что $A^r = 0$ при $r > n_0$ и $\dim A^{n_0} = 1$;
2) $x \cup y = (-1)^{ij} y \cup x$, если $x \in A^i$, $y \in A^j$, т.е. алгебра $(A, \cup)$ является антикоммутативной;
3) пусть $0 \neq \xi \in A^{n_0}$ есть базисный элемент в A^{n_0}, тогда билинейная форма

$$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\colon A^r \times A^{n_0 - r} \to \mathbb{R}$$

относительно ξ (т.е. задаваемая по формуле $\langle x, y\rangle \xi = x \cup y$) невырождена.

Тогда имеют место изоморфизмы $A^r \cong (A^{n_0-r})^*$ и равенства $\dim A^r = \dim A^{n_0-r}$. Ключевым для дальнейшего анализа служит понятие так называемого *дифференцирования Пуанкаре*, т.е. такого линейного гомоморфизма $d\colon A \to A$, который удовлетворяет условиям:

1) $d^2 = 0$;
2) $d[A^r] \subset A^{r+1}$;
3) d является антидифференцированием;
4) $d[A^{n_0-1}] = 0$.

По аналогии с сигнатурой ориентированного многообразия назовем *сигнатурой алгебры Пуанкаре* $\left(A = \bigoplus A^r, \cup\right)$ относительно $0 \neq \xi \in A^{n_0}$. Мы полагаем, что сигнатура равна нулю в случае $n_0 \not\equiv 0 \pmod 4$. В случае же $n_0 = 4k$ сигнатура $\operatorname{Sign} A$ определяется как сигнатура билинейной невырожденной симметрической формы $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\colon A^{2k} \times A^{2k} \to \mathbb{R}$, определенной относительно элемента ξ.

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 8 [21]. *Если дифференциальная градуированная алгебра $(A^*, \cup, d)$ является алгеброй Пуанкаре, дифференциал которой является дифференциалом Пуанкаре, то ее градуированная алгебра когомологий $(H^*(A), \cup)$ является алгеброй Пуанкаре относительно того же элемента $0 \neq \xi \in A^{n_0} = H^{n_0}(A, d)$ и выполнено равенство*

$$\operatorname{Sign} A = \operatorname{Sign} H(A).$$

Примеры. 1) Пусть E есть произвольной конечномерное векторное пространство. Тогда внешняя алгебра $(\wedge E, \wedge)$ является алгеброй Пуанкаре с нулевой сигнатурой.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ есть произвольная вещественная алгебра Ли. Тогда внешняя алгебра

$$(\wedge \mathfrak{g}^*, \wedge, \delta_{\mathfrak{g}})$$

с дифференциалом Шевалле–Эйленберга $\delta_{\mathfrak{g}}$ является алгеброй Пуанкаре с дифференцированием Пуанкаре тогда и только тогда, когда исходная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ унимодулярна. Из приведенной выше леммы следует, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ унимодулярна, то ее алгебра когомологий $H(\mathfrak{g})$ тоже является алгеброй Пуанкаре, причем

$$\operatorname{Sign} H(\mathfrak{g}) = \operatorname{Sign} \wedge \mathfrak{g}^* = 0.$$

Если L есть транзитивный алгеброид Ли над компактным ориентированным многообразием M, у которого изотропная алгебра Ли унимодулярна, а монодромия в когомологиях присоединенного расслоения изотропных алгебр Ли тривиальна, то для хорошего покрытия второй член E_2 спектральной последовательности является алгеброй Пуанкаре, которая находится в квадранте $j \leqslant m$, $i \leqslant n$ с максимальной группой $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Мы хотим сравнить сигнатуру члена E_2 с сигнатурой алгеброида Ли L при условии, что алгеброид Ли L является TUIO-алгеброидом. Аргументация Чженя–Хирцебруха–Серра [21] является чисто алгебраической и приводит к следующим общим теоремам.

Теорема 9. *Пусть* $(A, A^r, \cup, D, A_j)$ *есть произвольная дифференциальная градуированная алгебра с убывающей фильтрацией* A_j, *и пусть* $(E_s^{j,i}, d_s)$ *есть ее спектральная последовательность. Предположим, что существуют такие натуральные числа* m *и* n, *что*

1) $E_2^{j,i} = 0$ *при* $j > m$ *и* $i > n$;
2) E_2 *есть алгебра Пуанкаре относительно суммарной градуировки с максимальной группой* $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Тогда каждый член $(E_s^{(*)}, \cup, d_s)$, $2 \leqslant s < \infty$, *является алгеброй Пуанкаре с дифференцированием Пуанкаре. Бесконечный член* $(E_\infty^{(*)}, \cup)$ *тоже является алгеброй Пуанкаре, причем*

$$\operatorname{Sign} E_2 = \operatorname{Sign} E_3 = \cdots = \operatorname{Sign} E_\infty.$$

Доказательство. Ясно, что все члены $E_3, E_4, \ldots, E_\infty$ находятся в том же самом квадранте $j \leqslant m$, $i \leqslant n$. Воспользуемся следующим свойством спектральных последовательностей [26]: если $E_s^{j,i} = 0$ для некоторых значений s, j, i, то $0 = E_s^{j,i} = E_{s+1}^{j,i} = \cdots = E_\infty^{j,i}$. По соображениям биградуировки ($d_2 \colon E_2^{j,i} \to E_2^{j+2,i-1}$) получаем, что

$$d_2[E_2^{(m+n-1)}] = 0$$

(см. рис. 1). Поэтому $E_2^{(m+n)} = E_3^{(m+n)} = \cdots = E_\infty^{(m+n)}$, т.е. $E_2^{m,n} = E_3^{m,n} = \cdots = E_\infty^{m,n}$.

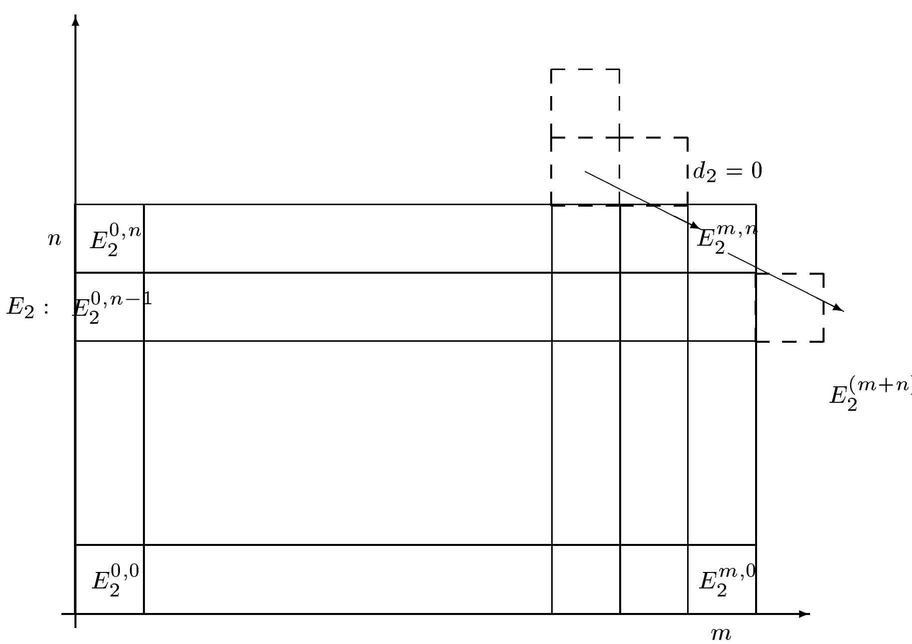

Рис. 1

Таким образом, начинаем с предположения, что член $(E_2, \cup, d_2)$ является алгеброй Пуанкаре с дифференцированием Пуанкаре. По лемме 8 получаем, что $E_3 = H(E_2, d_2)$ является алгеброй Пуанкаре, и относительно того же самого элемента $0 \neq \xi \in E_3^{m,n} = E_2^{m,n}$ получаем равенство

$$\operatorname{Sign} E_2 = \operatorname{Sign} E_3.$$

Те же аргументы приводят к выводу, что оператор d_3 тоже является дифференцированием Пуанкаре и $\operatorname{Sign} E_3 = \operatorname{Sign} E_4$. И т. д., в результате получаем равенства

$$\operatorname{Sign} E_2 = \operatorname{Sign} E_3 = \operatorname{Sign} E_4 = \cdots .$$

Поскольку член E_2 лежит в конечном квадранте, спектральная последовательность E_s вырождается в некотором члене E_{s_0} благодаря биградуированным свойствам дифференциала d_s. Значит, для $s > \max\{s_0, n\}$ получаем $E_s^{(r)} \cong E_\infty^{(r)}$, откуда следует, что бесконечный член $(E_\infty, \cup)$ является алгеброй Пуанкаре и $\operatorname{Sign} E_{s_0} = \operatorname{Sign} E_\infty$. В итоге

$$\operatorname{Sign} E_2 = \operatorname{Sign} E_3 = \cdots = \operatorname{Sign} E_\infty.$$

Заключение 10. *Если L есть транзитивный алгеброид Ли на компактном ориентированном многообразии M, у которого изотропные алгебры Ли $\boldsymbol{g}_x \cong \mathfrak{g}$ унимодулярны, а монодромия в когомологиях присоединенного расслоения $\boldsymbol{g}$ изотропных алгебр Ли тривиальна, то члены спектральной последовательности $E_2, \dots, E_\infty$ являются алгебрами Пуанкаре и*

$$0 = \operatorname{Sign} M \cdot \operatorname{Sign} \mathfrak{g} = \operatorname{Sign} E_2 = \cdots = \operatorname{Sign} E_\infty.$$

Осталось доказать равенство $\operatorname{Sign} E_\infty = \operatorname{Sign} H_L(M)$. Используя аргументацию упомянутой ранее оригинальной работы Чженя–Хирцебруха–Серра, получаем следующую общую теорему.

Пусть $(A, A^r, \cup, D, A_j)$ – произвольная дифференциальная градуированная алгебра с убывающей фильтрацией с условием регулярности $A_0 = A$,

$$A = A_0 \supset \cdots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \cdots ,$$

согласованной со структурой DG-алгебры, т.е.

$$A_i A_j \subset A_{i+j}, \qquad D(A_j) \subset A_j, \qquad A_j = \bigoplus_r (A^r \cap A_j).$$

Пусть $(E_s^{j,i}, d_s)$ – спектральная последовательность, соответствующая этой фильтрации. Допустим также, что

1) бесконечный член $E_\infty^{p,q}$ целиком содержится в прямоугольнике $0 \leqslant p \leqslant m$, $0 \leqslant q \leqslant n$;
2) $\dim E_\infty^{m,n} = 1$;
3) E_∞ является алгеброй Пуанкаре по отношению к тотальной градуировке.

В частности, размерность $\dim E_\infty$ конечна.

Теорема 11. *При выполнении сформулированных условий на алгебру A гомологии алгебры удовлетворяют следующим условиям*:

1) $H^{m+n}(A) \cong E_\infty^{m,n}$ *т.е.* $\dim H^{m+n}(A) = 1$;
2) *алгебра* $H(A) = \bigoplus_{r=0}^{m+n} H^r(A)$ *является алгеброй Пуанкаре*;
3) *сигнатура гомологий алгебры совпадает с сигнатурой бесконечного члена спектральной последовательности*

$$\operatorname{Sign} E_\infty = \operatorname{Sign} H(A)$$

при подходящем выборе образующих в верхней группе.

Доказательство. 1) Это очевидно, поскольку $H^{m+n}(A) \cong E_\infty^{(m+n)} \cong E_\infty^{m,n}$ и по предположению $\dim E_\infty^{m,n} = 1$.

2) Положим $A^{j,i} = A^{j+i} \cap A_j$. Алгебра $H(A)$ имеет градуированную фильтрацию $H^{j,i}(A) = \pi[Z \cap A^{j,i}]$, $H^{0,i}(A) = H^i(A)$, где Z есть ядро дифференциала D, а π есть гомоморфизм факторизации по модулю образа дифференциала D. Ассоциированное с этой фильтрацией пространство $E_0(H(A))$ имеет биградуировку

$$E_0^{j,i}(H(A)) \cong H^{j,i}(A)/H^{j+1,i-1}(A).$$

Рассмотрим убывающую фильтрацию

$$H^r(A) = H^{0,r}(A) \supset H^{1,r-1}(A) \supset \dots \supset H^{r,0} \supset 0, \tag{2}$$

ее часть для $0 \leqslant j \leqslant r$

$$H^{j,r-j} \supset H^{j+1,r-j-1} \supset \dots \supset H^{r-1,1} \supset H^{r,0} \supset 0$$

и ассоциированные (неканонические) изоморфизмы пространств

$$H^{j,r-j} \cong E_0^{j,r-j} \oplus E_0^{j+1,r-j-1} \oplus \dots \oplus E_0^{r,0}, \qquad E_0^{r,0} = H^{r,0}, \tag{3}$$

совместимые друг с другом для каждого j.

Биградуированные пространства $H(A, D)$, $E_0(H(A))$ и E_∞ имеют естественную структуру биградуированных алгебр, причем существует изоморфизм

$$\sigma_\infty \colon E_\infty \to E_0(H(A))$$

биградуированных алгебр, единственным образом задаваемый условием, что коммутирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Z \cap A^{j,i} & \twoheadrightarrow & H^{j,i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\infty^{j,i} & \xrightarrow{\sigma_\infty^{j,i}} & E_0^{j,i}(H(A)) \; = H^{j,i}(A)/H^{j+1,i-1}(A). \end{array} \tag{4}$$

Поэтому если $x \in H^{j,i}(A)$, $y \in H^{j',i'}(A)$ и $\sigma_\infty^{j,i}(\overline{x}) = [x]$, $\sigma_\infty^{j',i'}(\overline{y}) = [y]$, то

$$\sigma_\infty(\overline{x} \cup \overline{y}) = [x] \cup [y] = [x \cup y]. \tag{5}$$

Поскольку гомоморфизм σ_∞ является градуированным изоморфизмом, пространства $E_0^{j,i}(H(A))$ находятся в том же самом прямоугольнике $j \leqslant m$, $i \leqslant n$, т.е.

$$E_0^{j,i}(H(A)) = 0 \quad \text{при} \quad j > m \quad \text{или} \quad i > n, \tag{6}$$

причем

$$\dim E_0^{m,n}(H(A)) = 1.$$

Согласно разложению (3) имеют место равенства

$$H^{j,i}(A) = 0, \qquad j > m. \tag{7}$$

В частности, из (7) следует, что

$$E_0^{m,n}(H(A)) = H^{m,n}(A)/H^{m+1,n-1} = H^{m,n}(A) = H^{m+n}(A).$$

Последнее равенство вытекает из разложения (3), равенств $H^{m+n}(A) \cong E_\infty^{m+n} = E_\infty^{m,n} \cong E_0^{m,n}$ и размерностных соображений

$$1 = \dim H^{m+n}(A) = \dim E_0^{m,n}(H(A)) = \dim H^{m,n}(A).$$

Поэтому

$$H^{m+n}(A) = H^{0,m+n}(A) = H^{1,m+n-1}(A) = \cdots = H^{m,n}(A)$$

и

$$H^{m+n-i,i}(A) = 0, \qquad i < n. \tag{8}$$

В случае, когда $j = m$ и $i = n$, в диаграмме (4) правый вертикальный изоморфизм является тождеством

$$\begin{array}{ccc} Z \cap A^{m,n} & \longrightarrow & H^{m,n}(A) \\ \big\downarrow & & \big\| \\ E_\infty^{m,n} & \xrightarrow[\cong]{\sigma_\infty^{m,n}} & H^{m,n}(A). \end{array}$$

Следовательно, по свойству (5) получаем: если $x \in H^{j,i}(A)$, $y \in H^{j',i'}(A)$, $j + j' = m$, $i + i' = n$ и $\sigma_\infty^{j,i}(\overline{x}) = [x]$, $\sigma_\infty^{j',i'}(\overline{y}) = [y]$, то

$$\sigma_\infty(\overline{x} \cup \overline{y}) = x \cup y. \tag{9}$$

Используя изоморфизм $\sigma_\infty^{m,n} \colon E_\infty^{m,n} \to H^{m,n}(A)$, определим ненулевые образующие ξ и ξ' таким образом, чтобы

$$0 \neq \xi \in E_\infty^{m,n}, \qquad 0 \neq \xi' = \sigma_\infty^{m,n}(\xi) \in H^{m,n}(A) = H^{m+n}(A).$$

По отношению к образующим ξ и ξ' рассмотрим симметрические билинейные формы

$$\begin{gathered} \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_\infty \colon E_\infty^{(j)} \times E_\infty^{(m+n-j)} \to \mathbb{R}, \\ \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_A \colon H^j(A) \times H^{m+n-j}(A) \to \mathbb{R}, \end{gathered}$$

т.е. такие формы, что $\langle x,y\rangle_\infty \xi = x\cup y$ для первой формы и аналогично для второй. Билинейная форма $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_\infty$ невырождена по предположению. Докажем, что невырождена и форма $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_A$. Размерность $\dim H^r(A)$ конечна, поскольку

$$H^r(A) \cong E_0^{(r)}(H(A)) \cong E_\infty^{(r)},$$

а пространство E_∞ конечномерно. Поэтому нам нужно проверить, что если $x \in H^j(A)$, $x \neq 0$, то существует такой элемент $y \in H^{m+n-j}(A)$, что $\langle x,y\rangle_A \neq 0$. Элемент x принадлежит к минимальному члену фильтрации (2):

$$x \in H^{p,j-p}(A), \qquad x \notin H^{p+1,j-p-1}(A),$$

значит, $[x] \in E_0^{p,j-p}$, $[x]\neq 0$. Выберем такой элемент $\overline{x} \in E_\infty^{p,j-p}$, что $\sigma_\infty^{p,j-p}(\overline{x}) = [x]$. В силу невырожденности формы $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_\infty$ можно найти такой элемент $y \in H^{m-p,n-j-p}$, что $\langle \overline{x},\overline{y}\rangle_\infty \neq 0$, где $\overline{y} \in E_\infty^{m-p,n-j-p}$ и $\sigma_\infty^{m-p,n-j-p}(\overline{y}) = [y]$. В силу (9) имеем $x\cup y = \sigma_\infty(\overline{x}\cup\overline{y})$, следовательно, $\langle x,y\rangle_A = \langle \overline{x},\overline{y}\rangle_\infty \neq 0$, что доказывает невырожденность формы $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_A$. Таким образом, алгебра $H(A)$ является алгеброй Пуанкаре.

3) Будем теперь предполагать, что $m+n=4k$ (в обратном случае сигнатуры по определению равны нулю). По отношению к образующим ξ и ξ' рассмотрим симметрические билинейные формы

$$\begin{aligned}\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_\infty &: E_\infty^{(2k)} \times E_\infty^{(2k)} \to \mathbb{R},\\ \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_A &: H^{2k}(A)\times H^{2k}(A) \to \mathbb{R},\end{aligned}$$

т.е. такие формы, для которых выполнено условие $\langle x,y\rangle_\infty \xi = x\cup y$ в случае первой формы и алогичное условие в случае второй. Пространство $H^{2k}(A)$ имеет убывающую фильтрацию (2), и согласно (3) и (6) получаем

$$H^{2k-n,n}(A) = H^{2k-s,s}(A), \qquad s \geqslant n.$$

Мы должны рассмотреть два случая: $m\geqslant n$ и $m \leqslant n$. В случае $m\geqslant n$ получаем $2k-n = (n+m)/2 - n = (m-n)/2 \geqslant 0$.

Поэтому

$$H^{2k}(A) = H^{2k-n,n}(A) \supset H^{2k-n+1,n-1} \supset \cdots \supset H^{2k,0} \supset 0,$$

причем

$$H^{2k-q,q}(A)/H^{2k-q+1,q-1}(A) \overset{\sigma_\infty}{\cong} E_\infty^{2k-q,q}, \qquad q=0,\ldots,n.$$

Выберем подпространства $V_0,\ldots,V_n$, $H_q \subset H^{2k-q,q}$ таким образом, чтобы выполнялись разложения:

$$H^{2k-q,q}(A) = V_q \oplus H^{2k-q+1,q-1}(A).$$

Ясно, что

$$V_0 = H^{2k,0}, \qquad H^{2k} = V_0\oplus V_1 \oplus\cdots\oplus V_n, \qquad E_\infty^{2k-q,q} \cong V_q. \tag{10}$$

Если $x \in V_i$ и $y \in V_j$, $i+j < n$, то $x \cup y \in H^{4k-i-j,i+j}(A) = 0$ согласно условию (8). Если $i+j=n$, а элементы $\overline{x} \in E_\infty^{2k-i,i}$, $\overline{y} \in E_\infty^{2k-j,j}$ представляют элементы x и y в силу изоморфизма σ_∞, то согласно (9) получаем равенства

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_\infty = \langle x, y \rangle_A.$$

Поскольку алгебра E_∞ является алгеброй Пуанкаре, то

$$\dim E_\infty^{2k-i,i} = \dim E_\infty^{2k-n+i,n-i}$$

и в случае $\dim E_\infty^{2k-i,i} > 0$ билинейная форма

$$\langle \,\cdot\,, \cdot\,\rangle_\infty \colon E_\infty^{2k-i,i} \times E_\infty^{2k-n+i,n-i} \to \mathbb{R}$$

невырождена.

Это значит, что матрица билинейной симметрической формы $\langle \,\cdot\,, \cdot\,\rangle_A \colon H^{2k}(A) \times H^{2k}(A) \to \mathbb{R}$ может быть представлена в виде блочной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & L_0 \\ 0 & \dots & L_1 & * \\ \vdots & / & \vdots & \vdots \\ L_n & \dots & * & * \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где L_i обозначают невырожденные квадратные матрицы, причем матрица L_i – транспонированная к матрице L_{n-i}. Более того, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & L_0 \\ 0 & \dots & L_1 & 0 \\ \vdots & / & \vdots & \vdots \\ L_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

составленная на антидиагонали из тех же блоков, что и предыдущая матрица, и нулей на оставшихся местах, служит матрицей формы $\langle \,\cdot\,, \cdot\,\rangle_\infty$ на пространстве $E_\infty^{(2k)}$.

Если некоторые из пространств V_q нульмерны, мы должны изменить матрицы (11) и (12) с помощью вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нульмерным пространствам, и повторить все аргументы.

В случае $m \leqslant n$ дословно повторяются аргументы рассмотренного случая с условием вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нульмерным пространствам в разложении (10). Аналогичные аргументы показывают, что билинейная форма в когомологиях невырождена во всех размерностях. Очевидно (см. [21; лемма 1]), что выполняется равенство $\operatorname{Sign} E_\infty = \operatorname{Sign} H(A)$.

Дополнительно можно утверждать благодаря той же лемме 1 в [21], что сигнатура $\operatorname{Sign} H(A)$ равна 0, если n нечетно, и равна $\operatorname{Sign} L_{n/2}$ для четного n.

Следствие 12. *Пусть* $(A, A^r, \cup, D, A_j)$ – *произвольная дифференциальная градуированная алгебра* (DG-*алгебра*) *с убывающей фильтрацией* A_j *с условием регулярности* $A_0 = A$, *и пусть* $(E_s^{j,i}, d_s)$ – *ее спектральная последовательность. Пусть существуют такие натуральные числа* m *и* n, *что выполнены условия*

1) $E_2^{j,i} = 0$ *для* $j > m$ *и* $i > n$;
2) *алгебра* E_2 *является алгеброй Пуанкаре по отношению к глобальной градуировке и верхней группе* $E_2^{(m+n)} = E_2^{m,n}$.

Тогда $H(A) = \bigoplus_{r=0}^{m+n} H^r(A)$ *есть алгебра Пуанкаре*, $\dim H^{m+n}(A) = 1$ *и*

$$\operatorname{Sign} E_2 = \operatorname{Sign} H(A).$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 13 (теорема Черна–Хирцебруха–Серра для транзитивных алгеброидов Ли). *Пусть* L – *произвольный транзитивный алгеброид Ли на компактном ориентированном связном многообразии, у которого изотропные алгебры Ли* $\mathfrak{g}_x \cong \mathfrak{g}$ *унимодулярны, а монодромия тривиальна, т.е. предпучок* $\mathscr{H}_L^*$ *когомологий алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *постоянен на некотором хорошем покрытии. Тогда алгебра когомологий* $H_L(M)$ *является алгеброй Пуанкаре и*

$$\operatorname{Sign} L = \operatorname{Sign} E_2 = \operatorname{Sign} M \cdot \operatorname{Sign} \mathfrak{g} = 0.$$

Имеется много транзитивных инвариантно ориентированных алгеброидов Ли, у которых изотропные алгебры Ли унимодулярны, а монодромия тривиальна. В частности, теорема 13 выполняется в следующих случаях:

1) многообразие M является односвязным, например, если $A = A(M; \mathscr{F})$ является алгеброидом Ли некоторого TP-слоения на компактном односвязном многообразии;
2) $\operatorname{Aut} G = \operatorname{Int} G$, где G есть односвязная группа Ли, ассоциированная с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, например, если $\mathfrak{g}$ есть простая алгебра одного из типов B_l, C_l, E_7, E_8, F_4, G_2 (см. [27; добавление Д.8]);
3) присоединенное расслоение алгебр Ли $\boldsymbol{g}$ тривиально по отношению к структурной группе $\operatorname{Aut}^s(\mathfrak{g})$, например, когда алгеброид Ли $A(G; H)$ есть алгеброид Ли трансверсально полного слоения левых классов смежности незамкнутой подгруппы Ли H в произвольной группе Ли G (см. пример в конце § 2).

Список литературы

1. *Pradines J.* Théorie de Lie pour les groupoides differentiables // Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale (Bologna, 28–30, IX, 1967). Bologna: Monograf, 1969. P. 1–4.
2. *Kubarski J.* Lie algebroid of a principal fibre bundle. Lyon: Univ. Claude-Bernard, 1989.
3. *Libermann P.* Sur les prolongements des fibres principaux et les groupoides differentiables // Seminaire de Mathematiques superieures - été, Montreal, 1969 (Analyse Globale). Montreal: Univ. Montreal, 1971. P. 1–70.
4. *Kubarski J.* Bott's vanishing theorem for regular Lie algebroids // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. №6. P. 2151–2167.

5. *Molino P.* Etude des feuilletages transversalement complets et applications // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1977. V. 10. № 3. P. 289–307.
6. *Molino P.* Riemannian foliations. Boston, MA: Birkhäuser, 1988. (Progr. Math. V. 73.)
7. *Kubarski J.* A criterion for the minimal closedness of the Lie subalgebra corresponding to a connected nonclosed Lie subgroup // Rev. Mat. Complut. 1991. V. 4. № 2/3. P. 159–176.
8. *Coste A., Dazord P., Weinstein A.* Groupoides symplectiques. Lyon: Univ. Claude-Bernard, 1987.
9. *Herz J. C.* Pseudo-algèbres de Lie. I, II // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1953. V. 263. P. 1935–1937; 2289–2291.
10. *Huebschmann J.* Poisson cohomology and quantization // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 408. P. 57–113.
11. *Balcerzak B., Kubarski J., Walas W.* Primary characteristic homomorphism of pairs of Lie algebroids and Mackenzie algebroid // Lie algebroids and related topics in differential geometry. Warsaw: Polish Acad. Sci., 2001. P. 71–97. (Banach Center Publ. V. 54.)
12. *Mackenzie K.* Lie groupoides and Lie algebroids in differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 124.)
13. *Kubarski J.* Weil algebra and secondary characteristic homomorphism of regular Lie algebroids // Lie algebroids and related topics in differential geometry. Warsaw: Polish Acad. Sci., 2001. P. 135–173. (Banach Center Publ. V. 54.)
14. *Kubarski J.* Invariant cohomology of regular Lie algebroids // Proceedings of the VII International Colloquium on Differential Geometry (Spain 26–30 July, 1994). Singapure: World Scientific, 1995. P. 137–151.
15. *Maxim-Raileanu L.* Cohomology of Lie algebroids // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.). 1976. V. 22. № 2. P. 197–199.
16. *Atiyah M.* Complex analytic connections in fibre bundles // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 85. № 1. P. 181–207.
17. *Almeida R., Molino P.* Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1985. V. 300. P. 13–15.
18. *Kubarski J.* The Chern–Weil homomorphism of regular Lie algebroids. Lyon: Univ. Claude-Bernard 1991.
19. *Kubarski J.* Poincaré duality for transitive unimodular invariantly oriented Lie algebroids // Topology Appl. 2002. V. 121. P. 333–355.
20. *Kubarski J.* Fibre integral in regular Lie algebroids // New Developments in Differential Geometry, Budapest. 1996. Proceedings of the Conference on Differential Geometry (Budapest, Hungary, July 27–30, 1996). New York: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 173–202.
21. *Chern S. S., Hirzebruch F., Serre J.-P.* On the index of a fibered manifold // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 587–596.
22. *Bott R., Tu L. W.* Differential forms in algebraic topology. New York: Springer-Verlag, 1982. (Geom. Topol. Monogr. V. 82.)
23. *Dupont J. L.* Curvature and characteristic classes. New York: Springer-Verlag, 1978. (Lecture Notes in Math. V. 640.)
24. *Aziz El Kacimi-Alouni, Sregiescu V., Hector G.* La cohomologie basique d'un feuilletage Riemannien est de dimension finie // Math. Z. 1985. V. 188. P. 593–599.
25. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
26. *Greub W., Halperin S., Vanstone R.* Connections, curvature, and cohomology. V. III. New York: Acad. Press, 1976.
27. *Humphreys J. E.* Linear algebraic groups. New York: Springer-Verlag, 1975.

Институт математики
технического университета г. Лодзи, Польша;
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: kubarski@ck-sg.p.lodz.pl; asmish@higeom.math.msu.su

Поступила в редакцию
17.02.2003