Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. В. Кисляков, Jan-Olov Strömberg, Alberto Torchinsky. “Weighted Hardy Spaces. Lecture Notes in Mathematics”. Vol. 1381. Springer, 1989. 193 p.,
Алгебра и анализ, 1992, том 4, выпуск 4, 239–240

https://www.mathnet.ru/aa342

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
13 декабря 2025 г., 01:13:21

Алгебра и анализ
Том 4 (1992), вып. 4

© 1992 г.

РЕЦЕНЗИИ

Jan-Olov Strömberg, Alberto Torchinsky. Weighted Hardy Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1381. Springer, 1989. 193 p.

Авторы характеризуют книгу как написанную в развитие некоторых идей и результатов, изложенных в двух современных учебниках [1, 2] по анализу Фурье (понимаемому как теория сингулярных интегралов и пространств H^p). В жанре рецензии этот предмет уже освещается в настоящем журнале (см. т. 1, № 1).

Как теперь хорошо известно, „чистая" мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ не занимает исключительного места при изучении L^p-ограниченности сингулярных интегральных операторов типа Кальдерона–Зигмунда — именно, можно рассматривать их в весовом пространстве $L^p(\mathbb{R}^n, w)$, $1 < p < \infty$. Условие на вес w, гарантирующее ограниченность всех таких операторов в этом пространстве, есть знаменитое условие Макенхаупта A_p:

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \int_B w \Big(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\Big)^{p-1} < \infty,$$

где B пробегает всевозможные шары в $\mathbb{R}^n$. Мы будем обозначать класс всех весов с этим условием тем же символом A_p и писать $A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p$ (ясно, что классы A_p растут с ростом p).

Даже когда веса нет ($w \equiv 1$), сингулярные интегральные операторы в невырожденных случаях не ограничены в пространстве L^1. Наряду со шкалой L^p имеется, однако, другая естественная шкала — это пространство Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$. Обобщенная функция f медленного роста лежит в $L^p(\mathbb{R}^n)$, если в $L^p(\mathbb{R}^n)$ попадает ее подходящая максимальная функция (верхняя огибающая семейства модулей сверток функции f с достаточно хорошим набором гладких ядер, удовлетворяющих специальным требованиям). Оказывается, что $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$, но при $p \leqslant 1$ пространства H^p ведут себя лучше, чем L^p, — например, операторы Кальдерона–Зигмунда ограничены в них (при достаточно мягких условиях на ядро).

Естественно возникает вопрос о том, как совместить идеи H^p-теории с весовым подходом, иными словами, как избавиться от исключительного положения „чистой" меры Лебега и для пространств H^p? Именно этому и посвящена книга. Минимальное условие, которое нужно наложить на вес, — это условие удвоения (при увеличении радиуса шара вдвое его мера с плотностью W увеличивается не более чем в фиксированное число раз). $H^p(w)$ состоит из тех обобщенных функций f, чьи максимальные функции лежат в $L^p(w)$.

Условие удвоения оказывается достаточным, чтобы развить довольно существенную часть теории (атомное разложение, двойственность), однако для

некоторых (на мой взгляд, наиболее интересных) приложений требуется включение $w \in A_\infty$. Здесь можно провести аналогию с невесовой ситуацией: для тех p, для которых $w \in A_p$, будет $H^p(w) = L^p(w)$, однако за пределами множества этих p (оно представляет собой интервал (p_0, ∞)) равенство нарушается, и пространства $H^p(w)$ начинают вести себя лучше, чем $L^p(w)$ (как было при $p \leqslant 1$ в отсутствие веса). Например, если $w \in A_\infty$, то мультипликатор Фурье с символом $m(\xi)$, где m — однородная степени 0 функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, непрерывен в $H^p(w)$ *при всех* $p > 0$. (Это — типичный пример сингулярного интегрального оператора Кальдерона–Зигмунда).

Более точный результат состоит в том, что вместо бесконечной дифференцируемости и однородности символа можно потребовать, чтобы определенное число его производных удовлетворяло неравенствам типа Хермандера–Михлина. Сколько именно, зависит от p, параметра p_0 и некоторых других числовых параметров, связанных с весом w, и выписано авторами явно. Такое характерно для книги — авторы стремятся во всех случаях извлечь максимум информации из применяемых методов, что, естественно, ведет к утяжелению формулировок и доказательств, однако в столь точном виде результаты, пожалуй, не приведены более нигде.

С формальной точки зрения изложение замкнуто в том смысле, что не нужно предварительно знать ни теории A_p-весов (она полностью развита в первых главах, причем в соответствии с духом книги тщательно исследованы взаимоотношения различных параметров, связанных с весом), ни теории H^p-пространств без веса (она включается в весовую в качестве частного случая). Стандартный университетский курс анализа — вот все необходимое для понимания доказательств. Тем не менее в отличие от [1] и [2] эта книга — не учебник и не может быть рекомендована начинающим. В ней нет мотивировок (как и воообще никаких эмоций). Авторы ограничиваются формальным изложением результатов, ориентируясь если не на специалиста (который, без сомнения, найдет в книге очень много ценного), то по крайней мере на читателя, представляющего себе общую картину современного анализа Фурье.

Список литературы

[1] García–Cuerva J., Rubio de Francia J., *Weighted norm inequalities and related topics*, North. Holland, Amsterdam, 1985.

[2] Torchinsky A., *Real-variable methods in Harmonic Analysis*, Acad. Press, N. Y., 1986.

С. В. Кисляков