Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. V. Smirnov, Nomographing general integrals of first-order ordinary differential equations,
Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ., 1959, Issue 186, 245–248

https://www.mathnet.ru/eng/uzmu17

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 23, 2026, 13:53:04

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ МГУ
Вып. 186. Математика, т. IX

С. В. СМИРНОВ

О НОМОГРАФИРОВАНИИ ОБЩИХ ИНТЕГРАЛОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Известно, что необходимое и достаточное условие существования номограммы из выровненных точек для уравнения

$$z = \varphi(x, y),$$

где правая часть достаточно гладкая функция в области G плоскости xOy, может быть представлено [2] как система соотношений, связывающих частные производные функции

$$M(x, y) = -\frac{\varphi_y}{\varphi_x}.$$

Функция Гронвалла $\Gamma = \Gamma(x, y)$, выбор которой в случае номографируемости уравнения $z = \varphi(x, y)$ определяет вид и градуировку шкал x, y, точно так же зависит только от M. Действительно, если $P \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|M|$ в любой подобласти G_1 области G не обращается в тождественный нуль, то $\Gamma(x, y)$ — общий корень системы полиномов, коэффициенты которых многочлены с рациональными коэффициентами от частных производных M до 8-го порядка [4].

Из хода доказательства известной теоремы Гронвалла [1] и упомянутых выше теорем следует, что вид самой функции φ играет роль только при выборе градуировки ответной шкалы. На этом простом замечании основывается построение номограмм [3] для общих интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Настоящая заметка примыкает к работе автора [4] и возникла как ответ на вопрос, предложенный проф. С. В. Бахваловым.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где правая часть определена в области G плоскости xOy, не обращается в нуль в этой области и обладает всеми частными производными достаточно высокого порядка.

Пусть

$$\varphi(x, y) = C \tag{2}$$

общий интеграл этого уравнения. В некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ произвольной точки x_0, y_0 области G общему интегралу (2) может быть придана форма

$$\varphi_1(x, y; x_0) = y^*, \tag{2$_1$}$$

где x_0, y^* — координаты точки, определяющей проходящую через нее интегральную кривую, т. е. y^* — произвольная постоянная.

Отсюда в $U(x_0, y_0)$ общее решение (1)

$$y = y(x; x_0, y^*) = y(x, C).$$

При таком выборе произвольной постоянной

$$\left.\frac{\partial y}{\partial C}\right|_{x=x_0} = 1,$$

и, если окрестность $U(x_0, y_0)$ достаточно мала,

$$\frac{\partial y}{\partial C} > \alpha > 0. \tag{3}$$

Не оговаривая особо, будем дальше иметь в виду такой выбор произвольной постоянной; номограмма, достаточная для решения всех вопросов, связанных с общим интегралом, может иметь немую шкалу C.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется номографируемым, если существует номограмма из выровненных точек для его общего интеграла.

Из приведенных выше результатов о номографируемости уравнений вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Дифференцированием и исключением всегда можно установить, будет ли дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ номографируемым или нет. Если переменные в уравнении $y' = f(x, y)$ непосредственно не разделяются, то функция Гронвалла $\Gamma(x, y)$ находится как общий корень системы полиномов, коэффициенты которых зависят от $f(x, y)$ и частных производных функции $f(x, y)$.*

Эта теорема не указывает какого-либо правила для составления номограммы номографируемого дифференциального уравнения. Другими словами, из нее непосредственно не вытекает регулярного процесса интегрирования номографируемых дифференциальных уравнений. Можно доказать, что такой алгоритм существует.

Покажем, что при помощи квадратур можно общий интеграл дифференциального уравнения (1) представить в форме

$$h(C) = Cu(x, y) + v(x, y), \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная, выбранная подходящим образом. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ при этом ищутся из системы (которую будем называть системой Гурса—Пенлеве) дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующей данному уравнению (1):

$$\begin{gathered} u_x v_y - u_y v_x = \theta, \\ v_{xx} u_x - u_{xx} v_x = 0, \\ v_{yy} u_y - u_{yy} v_y = 0, \\ u_{xx} v_y - v_{xx} u_y + 2u_{xy} v_x - 2v_{xy} u_x = \Gamma\theta, \\ v_{yy} u_x - u_{yy} v_x + 2v_{xy} u_y - 2u_{xy} v_y = \Delta\theta. \end{gathered} \tag{5}$$

Функция $\theta = \theta(x, y)$, так же как $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, считается неизвестной функцией, $\Gamma = \Gamma(x, y)$ — функция Гронвалла, соответствующая $f(x, y)$, $\Delta = \Delta(x, y)$ — дополнительная функция Гронвалла, связанная с Γ соотношением

$$\Gamma = f(x, y)\Delta + N, \tag{6}$$

причем N выражается формулой

$$N = f_y + \frac{1}{f} f_x.$$

Пусть x_0, y_0 — произвольная фиксированная точка области, такая, что в ней определено $\Gamma(x_0, y_0)$ и существуют производные $\Gamma(x, y)$ достаточно высокого порядка. Зададим в точке x_0, y_0 начальные значения:

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0),$$

$$\begin{gathered} u_{x0} = u_x(x_0, y_0), \; y_{y0} = u_y(x_0, y_0), \; v_{x0} = v_x(x_0, y_0), \; v_{y0} = v_y(x_0, y_0), \\ \theta_0 = \theta(x_0, y_0) = u_{x0}v_{y0} - u_{y0}v_{x0} \neq 0, \; \theta_{x0} = \theta_x(x_0, y_0), \; \theta_{y0} = \theta_y(x_0, y_0). \end{gathered} \tag{7}$$

Лемма. *Для системы Гурса — Пенлеве, соответствующей номографируемому дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$, существует и единственным образом определяется в некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки x_0, y_0 нетривиальное решение, удовлетворяющее в этой точке начальным условием* (7). *Это решение может быть найдено посредством квадратур.*

Заметим, что переход от одной системы начальных условий (7) к другой какой-либо системе начальных условий вида (7) определяет проективное преобразование плоскости номограммы.

Теорема 2. *Номографируемое дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах.*

Доказательство. Существует функция Гронвалла, соответствующая дифференциальному уравнению (1), решение θ, u, v системы Гурса — Пенлеве и окрестность $U(x_0, y_0)$ могут быть выбраны так, что в $U(x_0, y_0)$ функции θ, u_x, $u_x + u_y f(x, y)$ не обращаются в нуль.

Построим в $U(x_0, y_0)$ функцию от x, y

$$\Phi(x, y) = -\frac{v_x + v_y f(x, y)}{u_x + u_y f(x, y)}.$$

Подставим в $\Phi(x, y)$ вместо y его выражение из общего интеграла (2_1). Вычисляя $\Phi_x(x, y(x, C))$, пользуясь (5), находим:

$$\Phi_x(x, y(x, C)) \equiv -(u_x + u_y f)^{-2}(\Gamma - f\Delta - N)\theta \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\Phi(x, y) \equiv g(\varphi_1(x, y)) = g(C), \tag{8}$$

где $g(C)$ — некоторая функция произвольного постоянного, т. е. $\Phi(x, y)$ сохраняет постоянное значение вдоль любой интегральной кривой дифференциального уравнения (1), протекающей в $U(x_0, y_0)$.

Выбором начальных значений (7) всегда можно достигнуть того, что в точке x_0, y_0 производная $\Phi_y(x, y)$ не обращается в нуль. Действительно,

$$\Phi_y(x, y) = -\frac{1}{3}(u_x + u_y f)^{-2}[(\Gamma + S)\theta + \theta_x + \theta_y f],$$

где через S обозначено

$$S = f_y - \frac{2}{f} f_x.$$

Отсюда и из (3) следует, что $U(x_0, y_0)$ может быть выбрана так, что в $U(x_0, y_0)$ производная

$$g'(C) = \Phi_y(x, y(x, C)) \cdot \frac{\partial y}{\partial C}$$

не обращается в нуль. Следовательно, уравнение (8) в $U(x_0, y_0)$ может быть разрешено относительно C, т. е. представляет собой общий интеграл дифференциального уравнения (1).

Теорема 3. *Общий интеграл номографируемого дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ можно представить в виде*

$$h(C) = Cu(x, y) + v(x, y), \tag{4}$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют системе Гурса — Пенлеве.

Доказательство. Пусть $\Phi(x, y) = C$ — общий интеграл дифференциального уравнения (1), построенный выше.

$$\Psi(x, y) \equiv \Phi(x, y) u(x, y) + v(x, y)$$

сохраняет постоянное значение вдоль любой интегральной кривой, протекающей в $U(x_0, y_0)$, т. е. $\Psi(x, y) \equiv h(C)$.

Действительно,

$$\Psi_x(x, y(x, C)) \equiv \Phi_x(x, y(x, C)) u(x, y(x, C)) +$$
$$+ [\Phi(x, y)(u_x + u_y f(x, y)) + v_x + v_y f(x, y)]_{y=y(x, C)} \equiv 0.$$

Как и выше, выбирая

$$u(x_0, y_0) \neq h'(\Phi(x_0, y_0)),$$

обеспечиваем разрешимость уравнения (4) относительно C.

Очевидно, что вместо C в (4) можно подставить любую подходящую функцию $\omega(C)$.

Анаморфозирующим множителем $\frac{0}{u_x u_y}$ уравнение (4) обращается в уравнение Соро.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gronwall T. H. Sur les équations entre troi variables représentable par de nomogrammes a points alignés. Journ. de Math., 6 Sér., 8, 59—102, 1912.
2. Смирнов С. В. К проблеме общей анаморфозы. ДАН СССР, 69, 297—300, 1949.
3. Смирнов С. В. О номографируемости уравнений. Диссертация. Матем. ин-т АН СССР, 1950.
4. Смирнов С. В. О номографируемости уравнений. Ученые записки Ивановского пед. ин-та, IV, 22—60, 1953.

Статья поступила в редакцию 5. III 1955 г.