В. М. Гичев, Несколько замечаний о сферических гармониках,
Алгебра и анализ, 2008, том 20, выпуск 4, 64–86

Алгебра и анализ
Том 20 (2008), №4

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИКАХ

© В. М. ГИЧЕВ

Статья содержит несколько наблюдений о сферических гармониках и их узловых множествах: конструкцию гармоник, имеющих заданные нули; одно естественное представление этого типа для гармоник на $\mathbb{S}^2$; верхние и нижние границы для длин узловых множеств и для внутренних радиусов узловых областей (верхние границы достигаются); точная оценка сверху числа общих нулей двух сферических гармоник на $\mathbb{S}^2$; среднее значение мер Хаусдорфа пересечений k узловых множеств гармоник разных степеней на $\mathbb{S}^m$, где $k \le m$ (в частности, среднее количество общих нулей m гармоник).

Введение

Статья содержит несколько наблюдений о сферических гармониках и их узловых множествах, причём особое внимание уделяется случаю сферы $\mathbb{S}^2$.

Пусть M — компактное связное риманово многообразие, на котором изометрично и транзитивно действует компактная группа Ли G, $\mathcal{E}$ — инвариантное подпространство (вещественного) пространства собственных функций для ненулевого собственного значения оператора Лапласа—Бельтрами. В работе показано, что каждая функция из $\mathcal{E}$ может быть реализована в виде определителя матрицы, составленной из значений воспроизводящего ядра для $\mathcal{E}$. Подобная конструкция используется в теории ортогональных многочленов; однако для произвольных конечномерных G-инвариантных подпространств $C(M)$ метод непригоден (см. замечание 2). В случае сферы $\mathbb{S}^2$ это приводит к естественному, определённому

Работа частично поддержана грантами РФФИ 06–08–01403, 06–07–89051, а также проектом СО РАН №117.

почти однозначно (с точностью до умножения на константу) представлению гармоник в виде определителя, которое получается после комплексификации и сужения на конус $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ в $\mathbb{C}^3$. Этот конус эквивариантно и двулистно накрывается пространством $\mathbb{C}^2$, причём накрытие отождествляет семейство $\mathcal{H}_n$ гармонических однородных комплекснозначных полиномов степени n на $\mathbb{R}^3$ с семейством $\mathcal{P}^2_{2n}$ однородных голоморфных полиномов на $\mathbb{C}^2$ степени $2n$. [1]

Множество всех нулей вещественной сферической гармоники u называется *узловым*. Будем говорить, что u и её узловое множество N_u *регулярны*, если нуль не является критическим значением гармоники u. Тогда каждая компонента множества N_u — жорданов контур. Согласно [11], каждая пара узловых множеств N_u, N_v, где $u, v \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_n$ и $n > 0$, имеет непустое пересечение; более того, если гармоника u регулярна, то каждая компонента множества N_u содержит по крайней мере две точки множества N_v. Множество $N_u \cap N_v$ может быть бесконечным, но семейство пар (u, v) из $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_n$ с таким свойством замкнуто и нигде не плотно в $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_n \times \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_n$. Если же множество $N_u \cap N_v$ конечно, то $\operatorname{card} N_u \cap N_v \leq 2n^2$. Оценка следует из теоремы Безу и достигается. Она же является верхней (вероятно, не наилучшей) границей для числа критических точек общей сферической гармоники. Конфигурация критических точек всегда в некотором смысле вырождена (см. замечание 5). Задача нахождения оценок снизу, видимо, труднее; возможно, точная нижняя граница равна $2n$ (это подтверждается частичными результатами и компьютерными экспериментами).

Метрические и топологические свойства узловых множеств исследуются давно, о них известно довольно много. Сделаем лишь несколько замечаний, относящихся к предмету статьи. Будем обозначать через Δ оператор Лапласа–Бельтрами, через λ — собственное значение оператора $-\Delta$.

В 1978 г. Брюнинг [5] нашёл оценку снизу вида $c\sqrt{\lambda}$ для длин узловых множеств собственных функций на римановой поверхности. Яу предположил [22, Problem 74], что мера Хаусдорфа узлового множества собственной функции на компактном римановом многообразии допускает оценку снизу и сверху такого же вида (т.е. $c\sqrt{\lambda}$). Для вещественно-аналитических многообразий эта гипотеза была доказана Донелли и Фефферманом в работе [8]. В статье [18] Саво доказал, что $\frac{1}{11} \operatorname{Area}(M)\sqrt{\lambda}$ является нижней

[1] Ещё в 1876 г. Сильвестр использовал эквивалентную конструкцию для уточнения предложенного Максвеллом метода построения сферических гармоник. В соответствии с ним для построения вещественной гармоники надо продифференцировать функцию $1/r$, где r — расстояние до начала координат, в подходящих направлениях в $\mathbb{R}^3$. Последние определены однозначно; соответствующие точки сферы $\mathbb{S}^2$ называются полюсами (см. [15, гл. 9] или [3, 11.5.2]; книги [7, гл. 7, §5] и [1, приложение A] содержат развёрнутые изложения и дальнейшие сведения).

границей длин узловых множеств на поверхности M для всех достаточно больших λ, а если кривизна M неотрицательна, то при всех λ. Нижние и верхние границы внутренних для радиусов узловых областей были найдены Мангуби [13, 14]; в случае поверхностей они имеют порядок $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ [13].

Линейную меру Хаусдорфа подмножества сферы $\mathbb{S}^2$ можно найти, интегрируя по $\mathrm{SO}(3)$ число его общих точек со сдвигами другого подходящего подмножества сферы $\mathbb{S}^2$ (см. теорему 4). Используя оценки числа общих точек, можно получить оценки сверху и снизу длин узловых множеств и внутренних радиусов узловых областей. При этом верхние границы оказываются точными.

Обозначим через $\mathcal{H}_n^{m+1}$ пространство всех вещественных сферических гармоник степени n на единичной сфере $\mathbb{S}^m$ в $\mathbb{R}^{m+1}$. Каждой точке сферы $\mathbb{S}^m$ отвечает функционал на $\mathcal{H}_n^{m+1}$ вычисления значения в ней, что задает эквивариантную иммерсию сферы $\mathbb{S}^m$ в единичную сферу в $\mathcal{H}_n^{m+1}$. Локально она является метрическим подобием с коэффициентом $\sqrt{\frac{\lambda_n}{m}}$, где $\lambda_n = n(n+m-1)$ — собственное значение оператора $-\Delta$ в $\mathcal{H}_n^{m+1}$. Это позволяет вычислить среднее значение мер Хаусдорфа пересечения узловых множеств k гармоник степеней $n_1, \ldots, n_k$: оно равно $c\sqrt{\lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_k}}$, где c зависит лишь от m и k и $k \leq m$ (см. теорему 6). В частности, при $k = m$ получается среднее количество общих нулей m гармоник: оно равно $2m^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m}}$; если $m = 2$, то $\sqrt{\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}}$. В работе [8] Донелли и Фефферман писали: „Главная тема этой статьи в том, что решение уравнения $\Delta F = -\lambda F$ на вещественно-аналитическом многообразии ведет себя как полином степени $c\sqrt{\lambda}$“. Следуя этой идее, Л. Полтерович предположил, что среднее число общих нулей подчиняется теореме Безу. Описанный выше результат (при $k = m$) подтверждает это предположение (с точностью до мультипликативной константы) и может быть понят как „теорема Безу в среднем“ для сферических гармоник. Для $k = 1$ средняя мера Хаусдорфа, другими (но близкими) методами, была найдена Бера [4] и Нейхайзелем [16]. Случай плоского тора исследовался Рудником и Вигманом [17].

§1. Построение собственных функций с заданным конечным множеством нулей

Пусть M — компактное связное ориентированное риманово многообразие, G — компактная группа Ли изометрий многообразия M, действующая на M транзитивно, Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на M,

$$\lambda > 0 \tag{1}$$

— собственное число оператора $-\Delta$, $\mathcal{E}_\lambda$ — соответствующее вещественное (т.е. состоящее из вещественных функций) пространство собственных функций, а $\mathcal{E}$ — его G-инвариантное линейное подпространство. Тогда $\mathcal{E}$ есть конечная сумма G-инвариантных неприводимых подпространств пространства $C^\infty(M)$. Условимся обозначать через σ инвариантную меру полной массы 1 на M, $L^2(M) = L^2(M, \sigma)$. Для каждого $a \in M$ существует единственная функция $\phi_a \in \mathcal{E}$, реализующая функционал вычисления значения в a:

$$\langle u, \phi_a \rangle = u(a)$$

для всех $u \in \mathcal{E}$. Положим

$$\phi(a, b) = \phi_a(b), \quad a, b \in M.$$

Тогда

$$\phi(a, b) = \phi_a(b) = \langle \phi_a, \phi_b \rangle = \langle \phi_b, \phi_a \rangle = \phi_b(a) = \phi(b, a), \tag{2}$$

$$u(x) = \langle u, \phi_x \rangle = \int \phi(x, y) u(y)\, d\sigma(y) \quad \text{для всех } u \in \mathcal{E}, \tag{3}$$

$$x \in N_u \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_x \perp u, \tag{4}$$

$$\phi_x \neq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in M. \tag{5}$$

Последнее выполняется благодаря однородности многообразия M. Согласно формуле (3), $\phi(x, y)$ является *воспроизводящим ядром для* $\mathcal{E}$ (т.е. $u(x) \to \int \phi(x, y) u(y)\, d\sigma(y)$ есть ортогональный проектор на $\mathcal{E}$ в $L^2(M)$).

Выберем $a_1, \ldots, a_k, x, y \in M$. Обозначим $a = (a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ и условимся, что a может обозначать также и соответствующее подмножество в M: $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Положим

$$\Phi_k^a(x, y) = \Phi_{k,y}^a(x) = \det \begin{pmatrix} \phi(a_1, a_1) & \ldots & \phi(a_1, a_k) & \phi(a_1, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi(a_k, a_1) & \ldots & \phi(a_k, a_k) & \phi(a_k, y) \\ \phi(x, a_1) & \ldots & \phi(x, a_k) & \phi(x, y) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Очевидно, $\Phi_k^a(x, y) = \Phi_k^a(y, x)$. Фиксируем y и обозначим $v = \Phi_{k,y}^a$. Тогда, согласно формуле (6), $v \in \mathcal{E}$ и

$$a_1, \ldots, a_k \in N_v. \tag{7}$$

Будем говорить, что $a_1, \ldots, a_k$ *независимы*, если векторы $\phi_{a_1}, \ldots, \phi_{a_k} \in \mathcal{E}$ линейно-независимы. Для подмножества $X \subseteq M$ положим

$$\mathcal{N}_X = \operatorname{span}\{\phi_x : x \in X\}. \tag{8}$$

Если $X = N_u$, где $u \in \mathcal{E}$, то обозначение можно сократить: $\mathcal{N}_{N_u} = \mathcal{N}_u$. Пусть

$$n = \dim \mathcal{E} - 1.$$

Из (1) следует, что $n \geq 1$ (поскольку пространство $\mathcal{E}$ вещественно и G-инвариантно).

Лемма 1. *Пусть $a \in M^k$, где $k \leq n$. Тогда $a_1, \dots, a_k$ независимы в том и только в том случае, когда $\Phi^a_{k,y} \neq 0$ для некоторого $y \in M$.*

Доказательство. Из (4) следует, что $\mathcal{E} = \mathcal{N}_M$; так как $k \leq n$, то $\mathcal{N}_a \neq \mathcal{E}$. Если $a_1, \dots, a_k$ независимы, то можно получить независимое множество, добавляя к a некоторое $y \in M$. Тогда $\Phi^a_{k,y} \neq 0$, поскольку $\Phi^a_{k,y}(y) > 0$ (ввиду (2) и (6), $\Phi^a_{k,y}(y)$ — определитель матрицы Грама набора векторов $\phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_k}, \phi_y$). Очевидно, $\Phi^a_{k,y} = 0$ для всех $y \in M$, если $a_1, \dots, a_k$ зависимы. $\square$

Благодаря следующему предложению, каждую функцию из $\mathcal{E}$ можно реализовать в виде (6).

Предложение 1. *Для любого $u \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $\mathcal{N}_u = u^\perp \cap \mathcal{E}$.*

Лемма 2. *Если $u, v \in \mathcal{E}$ и $N_v \supseteq N_u$, то $v = cu$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Это немедленно следует из включения $N_v \supseteq N_u$ и леммы 1 статьи [11], которая утверждает, что $v = cu$ при некотором $c \in \mathbb{R}$, если существуют узловые области U и V для u и v соответственно такие, что $V \subseteq U$. $\square$

Вот набросок доказательства упомянутой леммы; оно основано на идее теоремы Куранта об узловых областях. Так как u не изменяет знака в U, то $-\lambda$ является первым собственным числом задачи Дирихле для U. Поэтому оно имеет кратность 1 и для всех $w \in C^2(M)$, равных нулю на ∂U, выполняется неравенство $D(w) \geq \lambda \|w\|_{L^2(U)}$, где D — форма Дирихле на U. Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $w = cu$, $c \in \mathbb{R}$. С другой стороны, если w равно нулю вне V и совпадает с v внутри V, то $D(w) = \lambda \|w\|_{L^2(U)}$.

Доказательство предложения 1. Если $v \in \mathcal{E}$ и $v \perp \mathcal{N}_u$, то $N_v \supseteq N_u$ ввиду (4). Согласно лемме 2, $v \in \mathbb{R}u$. Следовательно, $\mathcal{N}_u \supseteq u^\perp \cap \mathcal{E}$. Обратное включение очевидно. $\square$

Обозначим через $\Phi : M^{n+1} \to \mathcal{E}$ отображение $(a, y) \to \Phi^a_{n,y}$ и положим $\mathcal{U} = \Phi(M^{n+1})$.

Теорема 1. (i) *Пусть $u \in \mathcal{E}$, $u \neq 0$. Существует непрерывная функция $c \neq 0$ на $N^n_u \times M$ такая, что*

$$\Phi(a, y) = c(a, y)u \tag{9}$$

для всех $(a, y) \in N^n_u \times M$.

(ii) *$\mathcal{U}$ — компактная симметричная окрестность нуля в $\mathcal{E}$.*

(iii) *Каждая точка $a \in M^n$ содержится в некотором нетривиальном узловом множестве; для a общего положения оно единственно.*

Доказательство. Пусть $a \in N_u^n$. Если $a_1, \dots, a_n$ независимы, то $\operatorname{codim} \mathcal{N}_a = 1$; поскольку $u \perp \mathcal{N}_u$, согласно (4), это влечёт (9), причём $c(a, y) \neq 0$ при некотором $y \in M$ ввиду леммы 1. Если $a_1, \dots, a_n$ зависимы, то $\Phi(a, y) = 0$ для всех $y \in M$ по той же лемме. Функция c непрерывна благодаря (6); $c \neq 0$, так как множество N_u содержит независимые точки $a_1, \dots, a_n$, согласно предложению 1. Это доказывает утверждение (i).

Из формулы (6) следует, что отображение Φ непрерывно. Поэтому множество $\mathcal{U}$ компактно. Поскольку многообразие M связно, для каждого $u \in \mathcal{U}$ можно получить отрезок $[0, u]$, перемещая y; поэтому множество $\mathcal{U}$ звездно. Так как перестановка любых двух точек в a изменяет знак $c(a, y)$, то множество $\mathcal{U}$ симметрично при $n > 1$; если же $n = 1$, то $\mathcal{U}$ является кругом ввиду его G-инвариантности и звездности. Таким образом, множество $\mathcal{U}$ компактно, симметрично, звездно и, кроме того, $\cup_{t>0} t\mathcal{U} = \mathcal{E}$. Поэтому $\mathcal{U}$ — окрестность нуля, т.е. справедливо утверждение (ii).

Пусть $a \in M^n$, $a' \subseteq a$ — максимальное независимое подмножество в a. Тогда $\Phi_{k,y}^{a'} \neq 0$ при некотором $y \in M$, согласно лемме 1 (здесь $k = \operatorname{card} a'$). Положим $v = \Phi_{k,y}^{a'}$. Ввиду (7) $a' \subset N_v$. Из (4) следует, что N_v содержит любую точку $x \in M$ такую, что $\phi_x \in \mathcal{N}_{a'}$. Поэтому $N_v \supseteq a$. Если $a_1, \dots, a_n$ независимы, то множество N_v единственно, поскольку в этом случае $\operatorname{codim} \mathcal{N}_v = 1$. Так как многообразие M однородно и пространство $\mathcal{E}$ конечномерно, то функции ϕ_x, $x \in M$, вещественно-аналитичны. Следовательно, либо $\Phi_{n,y}^a = 0$ для всех $(a, y) \in M^{n+1}$, либо $\Phi_{n,y}^a \neq 0$ для (a, y) общего положения (напомним, что M связно). Наконец, $\Phi_{n,y}^a \neq 0$ для некоторых $(a, y) \in M^{n+1}$, поскольку $\mathcal{N}_M = \mathcal{E}$ благодаря (4) и (5). □

Замкнутое множество $X \subseteq M$ называется *интерполяционным множеством для пространства функций* $\mathcal{F} \subseteq C(M)$, если $\mathcal{F}|_X = C(X)$.

Следствие 1. *Пусть $k \leq \dim \mathcal{E}$. В случае общего положения $a_1, \dots, a_k \in M$, множество $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ является интерполяционным для $\mathcal{E}$.*

Замечание 1. Функция c может быть равной нулю на некоторых компонентах множества $N_u^n \times M$. Пусть, например, $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}$ — сужение на $\mathbb{S}^2$ пространства $\mathcal{H}_k^{\mathbb{R}}$ однородных гармонических полиномов степени k; тогда $\dim \mathcal{E} = 2k + 1$, $n = 2k$. Если $k > 1$, то каждая большая окружность $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{S}^2$ содержится в нескольких узловых множествах (например, узловые множества функций $x_1 f(x_2, x_3)$, где функция f гармоническая, содержат окружность $\mathbb{S}^1 = \{x_1 = 0\} \cap \mathbb{S}^2$). Более того, при нечётном k она может быть компонентой множества N_u. Следовательно, $\operatorname{codim} \mathcal{N}_{\mathbb{S}^1} > 1$ и $\Phi(a, y) = 0$ для всех $(a, y) \in (\mathbb{S}^1)^n \times \mathbb{S}^2$.

Замечание 2. Для произвольных конечномерных G-инвариантных подпространств $\mathcal{E} \subseteq C(M)$ теорема 1 не выполняется. Действительно, если $\dim \mathcal{E} > 1$ и пространство $\mathcal{E}$ содержит постоянные функции, то в нем есть открытое подмножество, состоящее из функций без нулей, которые, очевидно, не допускают реализации в виде (6). Далее, из теоремы следует, что произведения $\phi_{a_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{a_n}$ заполняют окрестность нуля в n-й внешней степени пространства $\mathcal{E}$, которую можно отождествить с $\mathcal{E}$. Это свойство, очевидно, влечет возможность интерполяции из следствия 1, но обратное неверно: примером может служить пространство всех однородных полиномов степени $m > 1$ на $\mathbb{R}^3$, суженное на $\mathbb{S}^2$ (или пространство всех полиномов степени не выше n на $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, где $n > 2$).

§2. Сферические гармоники на $\mathbb{S}^2$

Обозначим через $\mathcal{P}_n^m$ пространство однородных голоморфных полиномов степени n на $\mathbb{C}^m$ и(или) пространство всех комплекснозначных однородных полиномов степени n на $\mathbb{R}^m$; они находятся в очевидном взаимнооднозначном соответствии. Подпространство, состоящее из гармонических на $\mathbb{R}^m$ полиномов, обозначим через $\mathcal{H}_n^m$. Условимся опускать индекс m в $\mathcal{H}_n^m$, если $m = 3$; тогда $\dim \mathcal{H}_n = 2n + 1$. Полиномы из $\mathcal{H}_n^m$, а также их ограничения на единичную сферу $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ называются *сферическими гармониками.* Они являются собственными функциями оператора Лапласа—Бельтрами; при $m = 3$ собственное число равно $-n(n + 1)$. Доказательство есть, например, в [19]. Будем говорить, что функция $u \in \mathcal{P}_n^m$ *вещественна*, если она принимает вещественные значения на $\mathbb{R}^m$.

Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ и его билинейное продолжение на $\mathbb{C}^m$ условимся обозначать через $\langle\ ,\ \rangle$,

$$r(v) = |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in \mathbb{R}^m,$$

r^2 — голоморфная квадратичная форма на $\mathbb{C}^m$. Для $a \in \mathbb{C}^m$ положим

$$l_a(v) = \langle a, v \rangle .$$

Функции $\Phi_k^a(x, y)$ допускают голоморфное продолжение по всем переменным (кроме k). Если $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, то продолжение на $\mathbb{C}^3$ и последующее ограничение на конус

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C}^3 : r^2(z) = 0\}$$

дают возможность построить некоторое естественное, однозначно определённое с точностью до умножения на константу, представление любой комплекснозначной сферической гармоники в виде (6). Проекция конуса S_0 в $\mathbb{CP}^2$ есть сфера Римана $\mathbb{CP}^1$. У S_0 имеется естественная параметризация

$$\kappa(\zeta_1, \zeta_2) = (z_1, z_2, z_3) = (2\zeta_1\zeta_2, \zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)), \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Лемма 3. *Отображение $R : \mathcal{H}_n \to \mathcal{P}^2_{2n}$, определённое равенством*

$$Rp = p \circ \kappa,$$

взаимно-однозначно и сплетает естественные представления $\mathrm{SO}(3)$ *и* $\mathrm{SU}(2)$ *в $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}^2_{2n}$ соответственно.*

Доказательство. Ясно, что $p \circ \kappa$ — однородный полином на $\mathbb{C}^2$ степени $2n$ при $p \in \mathcal{P}^3_n$. Простое вычисление показывает, что замена переменных $\zeta_1 \to a\zeta_1 + b\zeta_2$, $\zeta_2 \to -\overline{b}\zeta_1 + \overline{a}\zeta_2$, где $|a|^2 + |b|^2 = 1$, порождает линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^3$, которое сохраняет форму r^2 и подпространство $\mathbb{R}^3$ (другими словами, индуцированное этой заменой преобразование квадратичных форм на $\mathbb{C}^2$ в базисе $2\zeta_1\zeta_2$, $\zeta_1^2 - \zeta_2^2$, $i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$ задается матрицей из $\mathrm{SO}(3)$). Поэтому κ эквивариантно по отношению к естественным действиям групп $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{SU}(2)$ в $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}^2_{2n}$ соответственно. Хорошо известно, что

$$\mathcal{P}^3_n = \mathcal{H}_n \oplus r^2\mathcal{P}^3_{n-2}$$

(см., например, [19]). Так как $R \neq 0$ и $Rr^2 = 0$, то $R\mathcal{H}_n \neq 0$. Осталось лишь заметить, что представления этих групп в $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{P}^2_n$ неприводимы. □

Следствие 2. *Для каждого $p \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$ множество $p^{-1}(0) \cap S_0$ есть объединение $2n$ комплексных прямых, причём некоторые из них могут совпадать. Если они различны, $q \in \mathcal{H}_n$ и $p^{-1}(0) \cap S_0 = q^{-1}(0) \cap S_0$, то $q = cp$, где $c \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Очевидно, κ отображает прямые на прямые и порождает вложение $\mathbb{CP}^1$ в $\mathbb{CP}^2$. □

Функции ϕ_a предыдущего параграфа можно записать явно:

$$\phi_a(x) = c_n P_n(\langle a, x\rangle), \quad \text{где} \quad a, x \in \mathbb{S}^2,$$

c_n — нормализующая константа, а P_n — n-й полином Лежандра: $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^{2n}$. Существует единственное продолжение

$$\phi(a, x) = \phi_a(x)$$

на $\mathbb{R}^3$, которое однородно степени n и гармонично по обеим переменным (оно также симметрично и продолжается голоморфно на $\mathbb{C}^3$). Например, если $n = 3$, то $2P_3(t) = 5t^3 - 3t$ и функция $\phi(a, x)$ пропорциональна функции

$$5\langle a, x\rangle^3 - 3\langle a, a\rangle\langle a, x\rangle\langle x, x\rangle$$

(если $a = (1, 0, 0)$, то $2x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 3x_1x_3^2$). Представление в виде (6) для $p \in \mathcal{H}_n$, конечно, сохраняется и для $M = \mathbb{S}^2$, но в этом случае есть более естественный вариант. Для $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2$ положим

$$j\zeta = (-\zeta_2, \zeta_1).$$

Теорема 2. *Пусть $p \in \mathcal{H}_n$. Предположим, что $p^{-1}(0) \cap S_0$ — объединение различных прямых $\mathbb{C}a_1, \dots, \mathbb{C}a_{2n}$. Тогда существует константа $c \neq 0$ такая, что*

$$p(x)p(y) = c\det\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle^n & \dots & \langle a_1, a_{2n}\rangle^n & \langle a_1, y\rangle^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle a_{2n}, a_1\rangle^n & \dots & \langle a_{2n}, a_{2n}\rangle^n & \langle a_{2n}, y\rangle^n \\ \langle x, a_1\rangle^n & \dots & \langle x, a_{2n}\rangle^n & \langle x, y\rangle^n \end{pmatrix} \tag{11}$$

для всех $y \in S_0$, $x \in \mathbb{C}^3$. Более того, замена $\langle x, y\rangle^n$ на $\phi(x, y)$ в матрице приводит к представлению произведения $p(x)p(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}^3$ (вообще говоря, с другой константой c).

Доказательство. Если $a \in S_0$, то функция $\langle a, x\rangle^n$ — гармоническая по x для всех n (это нетрудно проверить прямым вычислением). Поэтому функция $\Phi_y^a(x) = \Phi^a(x, y)$ в правой части содержится в $\mathcal{H}_n$ для каждого $y \in S_0$. Ясно, что $\Phi_y^a(a_k) = 0$ при $k = 1, \dots, 2n$. Согласно следствию 2, функция Φ_y^a пропорциональна p. Так как $\Phi^a(x, y) = \Phi^a(y, x)$, это влечет (11) при условии нетривиальности правой части.

Таким образом, надо доказать, что $c \neq 0$. Пусть $x \in S_0$. Существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}, \xi, \eta \in \mathbb{C}^2$ такие, что $a_k = \kappa(\alpha_k)$ для всех k, $x = \kappa(\xi)$, и $y = \kappa(\eta)$. Прямое вычисление показывает, что

$$\langle \kappa(a), \kappa(b)\rangle = -2\langle a, jb\rangle^2 \tag{12}$$

для всех $a, b \in \mathbb{C}^2$. Следовательно, правая часть формулы (11) равна

$$-2^{(2n+1)n}c\det\begin{pmatrix} \langle \alpha_1, j\alpha_1\rangle^{2n} & \dots & \langle \alpha_1, j\alpha_{2n}\rangle^{2n} & \langle \alpha_1, j\eta\rangle^{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{2n}, j\alpha_1\rangle^{2n} & \dots & \langle \alpha_{2n}, j\alpha_{2n}\rangle^{2n} & \langle \alpha_{2n}, j\eta\rangle^{2n} \\ \langle \xi, j\alpha_1\rangle^{2n} & \dots & \langle \xi, j\alpha_{2n}\rangle^{2n} & \langle \xi, j\eta\rangle^{2n} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Определитель можно вычислить в несколько более общей ситуации. Именно если $C = (c_{rs})_{r,s=0}^k$, где $c_{rs} = \langle a_r, b_s \rangle^k$, $a_r, b_s \in \mathbb{C}^2$, то

$$\det C = \prod_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \prod_{s<r} \langle a_r, j a_s \rangle \prod_{s<r} \langle b_r, j b_s \rangle . \tag{14}$$

Пусть $a_r = (a_{r,1}, a_{r,2})$, $b_s = (b_{s,1}, b_{s,2})$. Если все компоненты ненулевые, то

$$c_{rs} = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{r} (a_{r,1} b_{s,1})^t (a_{r,2} b_{s,2})^{k-t} = a_{r,2}^k b_{s,1}^k \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{a_{r,1}}{a_{r,2}} \right)^t \left(\frac{b_{s,2}}{b_{s,1}} \right)^{k-t} .$$

Из строчек и столбцов можно вынести общие множители, после чего получится матрица $\tilde{C}$, которая допускает разложение $\tilde{C} = AB$, где

$$A = \left(\tbinom{k}{r} \alpha_r^t \right)_{r,t=0}^k, \quad B = \left(\beta_s^{k-t} \right)_{t,s=0}^k, \quad \alpha_r = \tfrac{a_{r,1}}{a_{r,2}}, \quad \beta_s = \tfrac{b_{s,2}}{b_{s,1}}.$$

Таким образом, вычисление $\det C$ сводится к определителю Вандермонда. Прямое вычисление доказывает формулу (14) (предположение о нетривиальности компонент, очевидно, несущественно). Благодаря соотношениям (14) и (12) определитель в (13) не равен нулю, если прямые $\mathbb{C}\xi, \mathbb{C}\eta, \mathbb{C}a_1, \ldots, \mathbb{C}a_{2n}$ различны (при $a \in S_0$ плоскость $\langle z, a \rangle = 0$ пересекает S_0 по прямой $\mathbb{C}a$). Поэтому $c \neq 0$.

Из определения функций P_n и ϕ следует, что

$$\phi(x, y) = s_n \langle x, y \rangle^n + r^2(x) r^2(y) h(x, y), \tag{15}$$

где s_n — положительная константа, h — полином. Следовательно, заменяя $\langle x, y \rangle^n$ на $\phi(x, y)$ в (11) и фиксируя $y \in \mathbb{C}^3$ общего положения, мы получаем функцию $f \neq 0$ на $\mathbb{C}^3$, которая совпадает с $p(x)$ на S_0 с точностью до умножения на константу. Согласно следствию 2, то же самое верно на $\mathbb{C}^3$, так как $f \in \mathcal{H}_n$ благодаря формуле (11) (в последней строке расположены функции, гармонические по x). Поскольку $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, это доказывает второе утверждение. $\square$

Замечание 3. Множество $p^{-1}(0) \cap S_0$, где $p \in \mathcal{H}_n$, может быть также задано условием ортогональности

$$\int_{\mathbb{S}^2} p(x) \langle x, w \rangle^n \, d\sigma(x) = 0,$$

где σ — инвариантная мера на $\mathbb{S}^2$, $w \in S_0$. Это следует из (15), поскольку $\int p(x) \phi(x, y) \, d\sigma(x) = p(y)$ для всех $y \in \mathbb{S}^2$, а потому и для всех $y \in \mathbb{R}^3$ ($p(y)$ и $\phi_x(y)$ однородны степени n), более того, для всех $y \in \mathbb{C}^3$ (обе части равенства голоморфны по y). В частности, это верно при $y \in S_0$, а в этом случае $\phi(x, y) = s_n \langle x, y \rangle^n$.

Если $p^{-1}(0) \cap S_0$ есть объединение различных прямых $\mathbb{C}a_k$, $k = 1, \dots, 2n$, то функции $\langle x, a_k \rangle^n$, $k = 1, \dots, 2n$, образуют линейный базис в гиперплоскости из $\mathcal{H}_n$, ортогональной функции p относительно билинейной формы $\int fg\,d\sigma$. Это следует из (12): нетрудно проверить, что функции $\langle \zeta, b_s \rangle^k$ на $\mathbb{C}^2$, где $s = 1, \dots, k$, линейно-независимы, если прямые $\mathbb{C}b_s$ различны (определитель Вандермонда).

В заключение — несколько замечаний о нулях на $\mathbb{S}^2$ функций из $\mathcal{H}_n$. Пусть $f \in \mathcal{H}_n$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Нуль функции f — это общий нуль для u и v. Следующее предложение, в несколько более общей форме, было доказано в [11]. Будем говорить, что функция *u регулярна*, если нуль не является критическим значением для u.

Предложение 2 (см. [11]). *Пусть $n > 0$, $u \in \mathcal{H}_n$. Если функция u регулярна, то для всех $v \in \mathcal{H}_n$ каждая компонента множества N_u содержит по крайней мере две точки множества N_v.*

Утверждение следует из формулы Грина, благодаря которой

$$\int_C v \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0, \tag{16}$$

где C — компонента множества N_u (которая обязана быть жордановым контуром ввиду регулярности функции u), ds — линейная мера на C, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — нормальная производная; отметим, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ сохраняет знак на C. Для стандартной сферы $\mathbb{S}^2$ соотношение (16) следует из классической формулы Грина для области $D_\varepsilon = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \mathbb{S}^2$, где $\varepsilon \in (0,1)$, и однородных степени 0 продолжений функций u, v на D_ε.

Пусть функции $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ регулярны. Положим

$$\nu(u,v) = \operatorname{card} N_u \cap N_v.$$

Для нерегулярных функций u, v нули должны считаться с кратностями. Если $u, v \in \mathcal{H}_n$, то кратность нуля в точке может быть определена как число гладких узловых линий, встречающихся в ней; если u, v имеют общий нуль порядков k, l, то его нужно считать kl раз (наибольшее число общих нулей, появляющихся при небольших возмущениях). Если $u = \phi_a$, где $a \in \mathbb{S}^2$, то N_u — объединение n параллельных окружностей $\langle x, a \rangle = t_k$, $x \in \mathbb{S}^2$, где $k = 1, \dots, n$ и $t_1, \dots, t_n$ — нули полинома $P_n(t)$. Так как они различны, то $P_n'(t_k) \neq 0$ для всех k. Из предложения 2 следует, что для любой функции v из $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ выполняется неравенство

$$\nu(\phi_a, v) \geq 2n,$$

где $a \in \mathbb{S}^2$. Равенство выполняется для $v = \phi_b$, если точка $b \in \mathbb{S}^2$ достаточно близка к a. В этом неравенстве ϕ_a и n можно заменить любой регулярной функцией u и числом компонент множества N_u соответственно. Последнее число может быть меньше n (согласно [12], число компонент может быть равно 1 или 2, если n нечетно или четно, соответственно[2]). Тем не менее компьютерные эксперименты подтверждают следующее предположение: для всех $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ выполняется неравенство

$$\nu(u, v) \geq 2n.$$

Общие нули должны считаться с кратностями, иначе есть простой пример двух гармоник, которые имеют ровно два общих нуля: $\mathrm{Re}(x_1 + ix_2)^n$ и $\mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^n$.

С другой стороны, в общем положении $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ для $\nu(u, v)$ есть тривиальная точная верхняя граница. Докажем чуть более сильное утверждение.

Предложение 3. *Пусть $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$. Если число $\nu(u, v)$ конечно, то*

$$\nu(u, v) \leq 2n^2. \tag{17}$$

По теореме Безу, если $u, v \in \mathcal{P}_n^3$ не имеют общего делителя, то множество $\{z \in \mathbb{C}^3 : u(z) = v(z) = 0\}$ — объединение n^2 (с кратностями) комплексных прямых. Тогда $\nu(u, v) \leq 2n^2$, так как каждая прямая не может иметь более двух общих точек с $\mathbb{S}^2$. Предложение 3 не следует из этого рассуждения, поскольку u и v могут иметь нетривиальный общий делитель с конечным множеством нулей в $\mathbb{S}^2$. Однако для $u, v \in \mathcal{H}_n$ последнее невозможно благодаря следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{S}^2$ и $u(x) = 0$. Предположим, что $u = vw$, где v и w вещественны, $v \in \mathcal{P}_m^3$, $w \in \mathcal{P}_{n-m}^3$. Если $w(y) \neq 0$ для всех достаточно близких к x точек $y \in \mathbb{S}^2 \setminus \{x\}$, то $w(x) \neq 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $x = (0, 0, 1)$. Если u имеет нуль кратности k в x, то

$$u(x_1, x_2, x_3) = p_k(x_1, x_2)x_3^{n-k} + p_{k+1}(x_1, x_2)x_3^{n-k-1} + \cdots + p_n(x_1, x_2),$$

где $p_j \in \mathcal{P}_j^2$, $p_k \neq 0$. Так как $\Delta u = 0$, то $\Delta p_k = 0$. Следовательно,

$$p_k(x_1, x_2) = \mathrm{Re}(\lambda(x_1 + ix_2)^k)$$

[2] Соответствующая гармоника — малое возмущение функции $\mathrm{Re}(x_1 + ix_2)^n$.

для некоторого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому p_k — произведение различных линейных форм. Пусть

$$w = q_l(x_1, x_2)x_3^{n-m-l} + q_{l+1}(x_1, x_2)x_3^{n-m-l-1} + \dots + q_{n-m}(x_1, x_2),$$
$$v = r_s(x_1, x_2)x_3^{m-s} + r_{s+1}(x_1, x_2)x_3^{m-s-1} + \dots + r_m(x_1, x_2),$$

где $q_j, r_j \in \mathcal{P}_j^2$ и $q_l, r_s \neq 0$. Так как $p_k = q_l r_s$, то $k = l + s$; более того, q_l — либо константа, либо произведение различных линейных форм. Последнее влечёт изменение знака функции q_l вблизи x; тогда то же самое верно для w, что противоречит предположению. Таким образом, $l = 0$, и из $q_l \neq 0$ следует $w(x) = q_l(x) \neq 0$. $\square$

Доказательство предложения 3. Пусть $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$, w — наибольший общий делитель для u и v. Очевидно, делитель w веществен. Так как множество $N_u \cap N_v$ конечно, то нули w в $\mathbb{S}^2$ изолированы; согласно лемме 4, w не имеет нулей в $\mathbb{S}^2$. Предложение следует из теоремы Безу для u/w и v/w. $\square$

Равенство в (17) достигается, например, для следующих пар и их небольших возмущений:

$$u = \phi_a, \quad v = \operatorname{Re}(x_2 + ix_3)^n, \quad \text{где} \quad a = (1, 0, 0); \tag{18}$$
$$u = \operatorname{Re}(ix_2 + x_3)^n, \quad v = \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^n.$$

Следствие 3. *Если множество критических точек для $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ конечно, то их количество не превосходит $2n^2$; в частности, это верно для $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ общего положения.*

Доказательство. Если x — критическая точка u, то $\xi u(x) = 0$ для любого векторного поля $\xi \in \mathrm{so}(3)$. Можно выбрать два поля $\xi, \eta \in \mathrm{so}(3)$ так, чтобы они были независимы во всех критических точках и чтобы $\xi u, \eta u \neq 0$; тогда критические точки функции u — общие нули для $\xi u, \eta u \in \mathcal{H}_n$. $\square$

Замечание 4. Оценка $2n^2$, видимо, может быть улучшена. Во всяком случае, для $n = 1, 2$ число критических точек равно $2(n^2 - n + 1)$, если оно конечно. Пусть u, v — те же, что в (18). Тогда функция $u + \varepsilon v$, где ε мало, имеет $2(n^2 - n + 1)$ критических точек. Мне неизвестны примеры сферических гармоник с бóльшим (конечным) количеством критических точек.

Замечание 5. Проведённые рассуждения доказывают немного больше, чем сформулировано в следствии 3. Нетривиальная $\mathrm{SO}(3)$-орбита u имеет размерность 3 или 2, причём последнее возможно лишь в случае $u = c\phi_a$, где $c \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{S}^2$. В первом случае множество C критических точек для u

совпадает с множеством общих нулей трёх линейно-независимых сферических гармоник (базис касательного пространства к орбите u). Поэтому $\operatorname{codim} \mathcal{N}_C \geq 3$. Три гармоники общего положения не имеют общих нулей. Это означает, что конфигурация критических точек всегда вырождена. Задача оценки числа критических точек, компонент узловых областей и других численных характеристик сферических гармоник на $\mathbb{S}^2$ ставилась в [2].

Предложение 4. *Множество $\mathcal{I}$ функций $f = u + iv \in \mathcal{H}_n$ таких, что $\nu(u, v) = \infty$, замкнуто и нигде не плотно в $\mathcal{H}_n$.*

Доказательство. Если множество $N_u \cap N_v$ бесконечно, то оно содержит жорданову дугу, которая продолжается до контура, так как u и v вещественно-аналитичны (согласно [6], узловое множество есть объединение гладких дуг вне своего конечного подмножества). Этот контур не может целиком содержаться в круге, который содержится в одной из узловых областей, иначе первое собственное число ограниченной контуром области было бы строго больше $n(n+1)$. Следовательно, диаметр контура ограничен снизу. Поэтому множество $\mathcal{I}$ замкнуто. Если $f \in \mathcal{I}$, то u и v имеют нетривиальный общий делитель, согласно теореме Безу; поэтому множество $\mathcal{I}$ нигде не плотно. $\square$

Для известных мне примеров функций $f \in \mathcal{I}$ множество $N_u \cap N_v$ есть объединение окружностей.

§3. Оценки длин и внутренних радиусов

Пусть M — гладкое (C^∞) компактное связное риманово многообразие, $m = \dim M$, $\mathfrak{h}^k$ обозначает k-мерную меру Хаусдорфа на M. Яу [22] предположил, что существуют положительные константы c и C такие, что

$$c\sqrt{\lambda} \leq \mathfrak{h}^{m-1}(N_u) \leq C\sqrt{\lambda}$$

для узлового множества N_u любой собственной функции u, отвечающей собственному числу $-\lambda$. Для вещественно-аналитических многообразий M эта гипотеза была доказана Донелли и Фефферманом в [8]. Нижние границы в случае поверхностей были найдены в статьях [5] и [18]; в [18] $c = \frac{1}{11}\operatorname{Area}(M)$.

Рассмотрим сначала случай $M = \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $m \geq 1$. Положим

$$\psi(x) = \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^n.$$

Очевидно, $\psi \in \mathcal{H}_n^{m+1}$. Обозначим через ϕ зональную сферическую гармонику (индекс опущен потому, что геометрические величины, характеризующие множество N_ϕ, не зависят от выбора ϕ). Пусть

$$\omega_k = \mathfrak{h}^k(\mathbb{S}^k) = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\,.$$

Теорема 3. *Для любой ненулевой вещественной гармоники $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ имеем*

$$\mathfrak{h}^{m-1}(N_u) \le \mathfrak{h}^{m-1}(N_\psi) = n\omega_{m-1}. \tag{19}$$

Эта теорема — просто наблюдение по модулю следующего факта (частный случай теоремы 3.2.48 из [10]). Множество, допускающее реализацию в виде образа ограниченного подмножества $\mathbb{R}^k$ при липшицевом отображении, называется *k-спрямляемым* (мы будем рассматривать лишь те множества, что представимы в виде счётного объединения компактов). Так как $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ — полином, то его узловое множество $(m-1)$-спрямляемо. Обозначим через μ_m инвариантную меру на $\mathrm{O}(m+1)$ полной массы 1.

Теорема 4 (см. [10]). *Пусть множества $A, B \subseteq \mathbb{S}^d$ компактны, A k-спрямляемо, а B l-спрямляемо. Положим $r = k + l - d$. Предположим, что $r \ge 0$. Тогда*

$$\int_{\mathrm{O}(d)} \mathfrak{h}^r(A \cap gB)\, d\mu_d(g) = K\mathfrak{h}^k(A)\mathfrak{h}^l(B), \tag{20}$$

где $K = \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} = \dfrac{\omega^r}{\omega_k\omega_l}$.

Если $r = 0$, то левая часть формулы (20) — аналог меры Фавара для сфер (по A или B). Заметим, что в рассматриваемой ситуации формулу (20) можно доказать непосредственно, так как левая часть при фиксированном A (или B) аддитивна на конечных семействах непересекающихся компактов; поэтому достаточно проверить асимптотику на малых частях подмногообразий.

Лемма 5. *Для любой вещественной функции $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ и каждой большой окружности $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{S}^m$, если пересечение $\mathbb{S}^1 \cap N_u$ конечно, то*

$$\mathrm{card}(\mathbb{S}^1 \cap N_u) \le 2n. \tag{21}$$

Доказательство. Сужение функции u на двумерную линейную оболочку множества $\mathbb{S}^1$ есть однородный полином степени n от двух переменных. $\square$

Доказательство теоремы 3. Так как окружность $\mathbb{S}^1$ имеет ровно две общие точки с любой гиперплоскостью, в которой она не содержится, то для почти всех $g \in \mathrm{O}(m+1)$ имеем

$$\mathrm{card}(g\mathbb{S}^1 \cap N_u) \leq 2n = \mathrm{card}(g\mathbb{S}^1 \cap N_\psi).$$

Неравенство в (19) получается интегрированием по $\mathrm{O}(m+1)$ и применением формулы (20) при $k=1$, $l=m-1$, $A=\mathbb{S}^1$, $B=N_u$ и $B=N_\psi$. Равенство очевидно. □

Нижнюю границу также можно получить подобными методами. В последующем предполагается, что $k=l=1$ и $m=2$; тогда $K=\frac{1}{2\pi^2}$ и формула (19) выглядит так:

$$\mathfrak{h}^1(N_u) \leq 2\pi n. \tag{22}$$

Узловое множество N_ϕ зональной сферической гармоники $\phi=\phi_a \in \mathcal{H}_n$, где $a \in \mathbb{S}^2$, есть объединение параллельных окружностей евклидовых радиусов $\sqrt{1-t_k^2}$, где t_k — нули полинома Лежандра P_n. Наименьшая окружность соответствует наибольшему нулю t_n. Положим $r_n=\sqrt{1-t_n^2}$ и обозначим через C_n окружность в $\mathbb{S}^2$ евклидова радиуса r_n. Благодаря предложению 2, при любой $u \in \mathcal{H}_n$ справедливо неравенство

$$\mathrm{card}(gC_n \cap N_u) \geq 2 \quad \text{для всех} \quad g \in \mathrm{O}(3). \tag{23}$$

Из (20) следует, что

$$\mathfrak{h}^1(N_u) \geq \frac{2\pi}{r_n}.$$

Согласно теореме 6.3.4 из [21], $t_n=\cos\theta_n$, где

$$0<\theta_n<\frac{j_0}{n+\frac{1}{2}}, \tag{24}$$

а $j_0 \approx 2.4048$ — наименьший положительный корень функции Бесселя J_0. Эта оценка, ввиду [21, (6.3.15)], асимптотически точна: $\lim_{n\to\infty} n\theta_n = j_0$. Таким образом,

$$r_n=\sin\theta_n<\sin\frac{j_0}{n+\frac{1}{2}}<\frac{j_0}{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\mathfrak{h}^1(N_u) > \frac{2\pi}{j_0}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{25}$$

Оценка (25) не наилучшая, но она больше, чем $\frac{1}{11}\operatorname{Area}(M)\sqrt{\lambda}$, нижняя граница из [18]:

$$\frac{4\pi}{11}\sqrt{n(n+1)} < \frac{2\pi}{j_0}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

поскольку $\frac{4\pi}{11} \approx 1.4248$, $\frac{2\pi}{j_0} \approx 2.6127$; согласно [18], $\frac{1}{11}\operatorname{Area}(M)\sqrt{\lambda}$ оценивает снизу длину узлового множества для всех римановых поверхностей M (при достаточно больших λ в общем случае и при всех λ, если кривизна M неотрицательна). Не исключено, что точной нижней границей является длина узлового множества зональной гармоники. Согласно [21, (6.21.5)], $\frac{k-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi \le \tau_k \le \frac{k}{n+\frac{1}{2}}\pi$, где $\cos\tau_k$, $k = 1,\dots,n$ — нули P_n, пронумерованные в порядке убывания (т.е. $\tau_1 = \theta_n$). Поэтому

$$\mathfrak{h}^1(N_\phi) = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\sin\tau_k \approx 2\pi n\int_0^1 \sin\pi x\,dx = 4n$$

при $n \to \infty$. Если предположение верно, то отношение верхней границы к нижней стремится к $\frac{\pi}{2}$, т.е. они довольно близки.

Можно оценить также и *внутренний радиус* $\mathbb{S}^2 \setminus N_u$

$$\operatorname{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u) = \sup\left\{\inf\nolimits_{y\in N_u}\rho(x,y) : x \in \mathbb{S}^2\right\},$$

где ρ — внутренняя метрика в $\mathbb{S}^2$:

$$\rho(x,y) = \arccos\langle x,y\rangle.$$

Точную верхнюю границу найти нетрудно:

$$\operatorname{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u) \le \operatorname{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_\phi) = \theta_n$$

ввиду неравенств (24). Действительно, эта оценка достигается при $u = \phi$ и не может быть больше, поскольку окружность C_n пересекает любое узловое множество, согласно предложению 2. Обозначим через $C(\theta)$ окружность радиуса θ во внутренней метрике $\mathbb{S}^2$; тогда евклидов радиус окружности $C(\theta)$ равен $r = \sin\theta$. Число $\theta_0 > 0$ является нижней границей для внутреннего радиуса тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(i) $\theta_0 \le \theta_n$,

(ii) для каждой функции $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ существует $g \in \mathrm{O}(3)$ такое, что $gC(\theta_0) \cap N_u = \emptyset$

(благодаря (i), ограниченный окружностью $C(\theta_0)$ круг не может содержать компоненту множества N_u). Далее, для почти всех $g \in \mathrm{O}(3)$ число

$\mathrm{card}(gC(\theta_0) \cap N_u)$ чётно. Поэтому можно считать, что

$$\mathrm{card}(gC(\theta_0) \cap N_u) \geq 2,$$

если $gC(\theta_0) \cap N_u \neq \emptyset$. Положим $r_0 = \sin\theta_0$. Если (ii) не выполняется, то

$$2 \leq \frac{1}{2\pi^2}\mathfrak{h}^1(C(\theta_0))\mathfrak{h}^1(N_u) = \frac{r_0}{\pi}\,\mathfrak{h}^1(N_u) \leq 2r_0 n,$$

согласно (20). Таким образом, если $r_0 < \frac{1}{n}$, то θ_0 — нижняя граница для $\mathrm{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u)$. Поэтому $\arcsin\frac{1}{n}$ является нижней границей для $\mathrm{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u)$. Видимо, оценка может быть улучшена; возможно, наименьший внутренний радиус имеет множество $\mathbb{S}^2 \setminus N_\psi$ (он равен $\frac{\pi}{2n}$).

Сформулируем доказанные выше результаты по $\mathbb{S}^2$.

Теорема 5. *Пусть $M = \mathbb{S}^2$. Для любой ненулевой сферической гармоники $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ имеют место оценки*

$$\tfrac{2\pi}{j_0}\left(n + \tfrac{1}{2}\right) < \mathfrak{h}^1(N_u) \leq 2\pi n, \tag{26}$$

$$\arcsin\tfrac{1}{n} \leq \mathrm{inr}\left(\mathbb{S}^2 \setminus N_u\right) \leq \theta_n < \tfrac{j_0}{n+\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Верхняя граница в (26) достигается при $u = \psi$; в (27) верхняя граница θ_n достигается при $u = \phi$. □

§4. Средняя мера Хаусдорфа пересечений узловых множеств

Фиксируем $m \geq 2$ и единичную сферу $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Мы найдем среднее значение по $u_1, \dots, u_k$, $k \leq m$, мер Хаусдорфа множеств

$$N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_k} \subseteq \mathbb{S}^m.$$

При $k = m$ это среднее число общих нулей функций $u_1, \dots, u_m$ в $\mathbb{S}^m$. Обозначим

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k), \quad \delta(n) = \dim\mathcal{H}_n^{m+1} - 1,$$

где n, n_j — натуральные числа. Определим среднее значение так:

$$M_{\mathbf{n}} = \int\limits_{\mathbb{S}^{\delta(n_1)}\times\dots\times\mathbb{S}^{\delta(n_k)}} \mathfrak{h}^{m-k}\left(N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_k}\right) d\tilde{\sigma}_{\delta(n_1)}(u_1)\dots d\tilde{\sigma}_{\delta(n_k)}(u_k), \tag{28}$$

где $\tilde{\sigma}_j$ — инвариантная мера на $\mathbb{S}^j$ полной массы 1. Пусть λ_n — собственное значение оператора $-\Delta$ в $\mathcal{H}_n^{m+1}$; напомним, что

$$\lambda_n = n(n + m - 1).$$

Теорема 6. *Пусть* $1 \le k \le m$. *Тогда*

$$M_{\mathbf{n}} = \omega_{m-k} m^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\lambda_{n_1} \dots \lambda_{n_k}}, \tag{29}$$

где среднее $M_{\mathbf{n}}$ *определено в* (28).

Если $k = m$, то $M_{\mathbf{n}}$ — среднее значение величины $\operatorname{card}(N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_m})$; так как $\omega_0 = 2$ и $\mathfrak{h}^0 = \operatorname{card}$, то оно равно

$$2m^{-\frac{m}{2}} \sqrt{\lambda_{n_1} \dots \lambda_{n_m}}.$$

Имеется естественное эквивариантное отображение $\iota_n : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{\delta(n)} \subset \mathcal{H}_n^{m+1}$:

$$\iota_n(a) = \frac{\phi_a}{|\phi_a|}. \tag{30}$$

Для нечётных n оно взаимно-однозначно, а при чётных n является двулистным накрытием (отождествляются противоположные точки). Так как риманова метрика в $\iota(\mathbb{S}^m)$ инвариантна относительно $\mathrm{O}(m+1)$, а группа изотропии точки a транзитивна на сферах в $T_a\mathbb{S}^m$, то ι_n локально является метрическим подобием относительно внутренних метрик. Пусть s_n — его коэффициент. Очевидно,

$$s_n = \frac{|d_a \iota_n(v)|}{|v|}, \tag{31}$$

где правая часть не зависит от $a \in \mathbb{S}^m$ и $v \in T_a\mathbb{S}^m \setminus \{0\}$. Более того, при $l \le m$ для каждого l-спрямляемого множества $X \subseteq \mathbb{S}^m$ такого, что $X \cap (-X) = \emptyset$, имеет место равенство

$$\mathfrak{h}^l(\iota_n(X)) = s_n^l \mathfrak{h}^l(X). \tag{32}$$

Лемма 6. *Пусть множество* $X \subseteq \mathbb{S}^m$ *компактно и* $(r+1)$*-спрямляемо, где* $r \le m-1$. *Тогда*

$$\int_{\mathbb{S}^{\delta(n)}} \mathfrak{h}^r(N_u \cap X)\, d\sigma_{\delta(n)}(u) = s_n \frac{\omega_r}{\omega_{r+1}} \mathfrak{h}^{r+1}(X).$$

Доказательство. Поскольку обе части равенства аддитивны по X, достаточно доказать утверждение в предположении $X \cap (-X) = \emptyset$. Мы применим теорему 4 к сфере $\mathbb{S}^{\delta(n)}$ и её подмножествам $A = \mathbb{S}^{\delta(n)-1}$, $B = \iota(X)$. В обозначениях этой теоремы $d = \delta(n)$, $k = d - 1$, $l = r + 1$; $K\omega_k = \frac{\omega_r}{\omega_l}$. Заменяя интегрирование по $\mathbb{S}^d$ усреднением по $\mathrm{O}(d+1)$ и применяя (32), получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} \mathfrak{h}^r(N_u \cap X)\, d\sigma_d(u) &= \frac{1}{s_n^r} \int_{\mathbb{S}^d} \mathfrak{h}^r(\iota(N_u \cap X))\, d\sigma_d(u) \\ &= \frac{1}{s_n^r} \int_{\mathbb{S}^d} \mathfrak{h}^r(u^\perp \cap \iota(X))\, d\sigma_d(u) = \frac{1}{s_n^r} \int_{\mathrm{O}(d+1)} \mathfrak{h}^r(g\mathbb{S}^k \cap \iota(X))\, d\mu_d(g) \\ &= \frac{1}{s_n^r} K \mathfrak{h}^k\left(\mathbb{S}^k\right) \mathfrak{h}^{r+1}(\iota(X)) = \frac{\omega_r}{s_n^r \omega_{r+1}} \mathfrak{h}^{r+1}(\iota(X)) = s_n \frac{\omega_r}{\omega_{r+1}} \mathfrak{h}^{r+1}(X). \qquad \square\end{aligned}$$

Следствие 4. *Среднее значение* $\mathfrak{h}^{m-1}(N_u)$ *по* $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ *равно* $s_n \omega_{m-1}$.

Доказательство. Положим $X = \mathbb{S}^m$, $r = m-1$. □

Следствие 5. *Пусть* $M_{\mathbf{n}}$, m, k *— те же, что и в* (28). *Тогда*

$$M_{\mathbf{n}} = \omega_{m-k} \prod_{j=1}^{k} s_{n_j}. \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $X = N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_{k-1}}$. Согласно лемме 6,

$$M_{\mathbf{n}} = s_{n_k} \frac{\omega_{m-k}}{\omega_{m-k+1}} M_{\mathbf{n}'},$$

где $\mathbf{n}' = (n_1, \dots, n_{k-1})$. Повторяя это и применяя следствие 4 на последнем шаге, получаем (33). □

Осталось найти s_n. Обозначим

$$d = \dim \mathrm{O}(m+1).$$

Так как стабилизатор $\mathrm{O}(m)$ точки $a = (0, \dots, 0, 1)$ транзитивен на сферах в $T_a\mathbb{S}^m$, то инвариантная риманова метрика в $\mathrm{O}(m+1)$ может быть выбрана так, чтобы каноническая проекция $\mathrm{O}(m+1) \to \mathbb{S}^m$ была метрической субмерсией. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m, \dots, \xi_d$ — ортонормальный базис в алгебре Ли $\mathrm{so}(m+1)$. Реализуя $\mathrm{so}(m+1)$ левоинвариантными векторными полями на $\mathrm{O}(m+1)$, получаем инвариантный оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathrm{O}(m+1)$:

$$\tilde{\Delta} = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2.$$

Сумма не зависит от выбора базиса, так как она левоинвариантна, а это свойство выполняется в единице. Поэтому можно считать, что

$$\xi_{m+1}, \dots, \xi_d \in \mathrm{so}(m). \tag{34}$$

Для $f \in C^2(\mathbb{S}^m)$ положим $\tilde{f}(g) = f(ga)$. Тогда $\langle \Delta f, \phi_a \rangle = \tilde{\Delta}\tilde{f}(e)$. Так как ι эквивариантно, то

$$d_a\iota(\xi a) = \frac{1}{|\phi_a|}\xi\phi_a \tag{35}$$

для всех $\xi \in \mathrm{so}(m+1)$. Из (34) следует, что $\xi_1 a, \dots, \xi_m a$ — базис в $T_a\mathbb{S}^m$, а $\xi_1\phi_a, \dots, \xi_m\phi_a$ — базис в $T_{\phi_a}\iota(\mathbb{S}^m)$. Кроме того,

$$\begin{gathered} |\xi_k a| = 1, \quad k = 1, \dots, m, \\ \xi_k a = 0, \quad k = m+1, \dots, d, \end{gathered}$$

где первое равенство выполняется потому, что проекция $\mathrm{O}(m+1) \to \mathbb{S}^m$ является метрической субмерсией. Благодаря этим равенствам, а также соотношениям (30), (31) и (35), получаем

$$\begin{aligned} ms_n^2 = s_n^2 \sum_{k=1}^{d} |\xi_k a|^2 = \sum_{k=1}^{d} |d_a\iota(\xi_k a)|^2 = \frac{1}{|\phi_a|^2} \sum_{k=1}^{d} |\xi_k\phi_a|^2 \\ = -\frac{1}{|\phi_a|^2} \sum_{k=1}^{d} \left\langle \xi_k^2\phi_a, \phi_a \right\rangle = -\frac{1}{|\phi_a|^2} \left\langle \Delta\phi_a, \phi_a \right\rangle = \lambda_n. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 6. Согласно проведённому выше вычислению,

$$s_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{m}}.$$

Применяя следствие 5, получаем (29). □

В случае $n_1 = \dots = n_k = n$ есть и немного иное естественное объяснение равенств (29), (33):

$$M_{\mathbf{n}} = \omega_{m-k} \left(\frac{\lambda_n}{m} \right)^{\frac{k}{2}} = \omega_{m-k} s_n^k.$$

Среднее может быть определено как интеграл по группе $\mathrm{O}(m+1)$ при её действии на множестве подпространств коразмерности k в $\mathcal{H}_n^m$, которые могут быть реализованы как $\mathcal{N}_{u_1} \cap \dots \cap \mathcal{N}_{u_k} = u_1^\perp \cap \dots \cap u_k^\perp$:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{n}} &= \int_{\mathrm{O}(m+1)} \mathfrak{h}^{m-k}(\iota_n^{-1}(g\mathbb{S}^{\delta(n)-k} \cap \iota_n(\mathbb{S}^m)))\, d\mu_m(g) \\ &= s_n^{k-m} \int_{\mathrm{O}(m+1)} \mathfrak{h}^{m-k}(g\mathbb{S}^{\delta(n)-k} \cap \iota_n(\mathbb{S}^m))\, d\mu_m(g) \\ &= s_n^{k-m} \frac{\omega_{m-k}}{\omega_m} \mathfrak{h}^m(\iota(\mathbb{S}^m)) \\ &= \omega_{m-k} s_n^k. \end{aligned}$$

Метод вычисления среднего значения мер Хаусдорфа распространяется на случай однородных римановых пространств, группа изотропии которых транзитивна на сферах из касательного пространстве.

Я благодарен Л. Полтеровичу за вопрос-предположение о „теореме Безу в среднем“ и Д. Якобсону за полезные комментарии и ссылки.

Список литературы

[1] Арнольд В. И., *Лекции об уравнениях с частными производными*, ФАЗИС, М., 1997.

[2] Арнольд В. И. и др., *Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики*, Успехи мат. наук **44** (1989), №4(268), 191–202.

[3] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G., *Higher transcendental functions.* Vol. II, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York etc., 1953.

[4] Bérard P., *Volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien, Bony–Sjöstrand–Meyer Seminar*, 1984–1985, École Polytech., Palaiseau, 1985, Exp. No. 14.

[5] Brüning J., *Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace–Beltrami Operators*, Math. Z. **158** (1978), 15–21.

[6] Cheng S.-Y., *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 43–55.

[7] Courant R., Hilbert D., *Methoden der mathematischen Physik.* Bd. 1, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1931.

[8] Donnelly H., Fefferman C., *Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds*, Invent. Math. **93** (1988), no. 1, 161–183.

[9] Eremenko A., Jakobson D., Nadirashvili N., *On nodal sets and nodal domains on* $\mathbb{S}^2$ *and* $\mathbb{R}^2$, Preprint `arXiv:math.SP/0611627`.

[10] Federer H., *Geometric measure theory*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 153, Springer, Berlin, 1969.

[11] Gichev V. M., *A note on common zeroes of Laplace–Beltrami eigenfunctions*, Ann. Global Anal. Geom. **26** (2004), 201–208.

[12] Lewy H., *On the minimum number of domains in which the nodal lines of spherical harmonics divide the sphere*, Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), no. 12, 1233–1244.

[13] Mangoubi D., *On the inner radius of nodal domains*, `arXiv:math/0511329v3`.

[14] Mangoubi D., *Local asymmetry and the inner radius of nodal domains*, `arXiv:math/0703663v3`.

[15] Maxwell J. C., *A treatise on electricity and magnetism.* Vol. 1, Dover Publ., Inc., New York, 1954.

[16] Neuheisel J., *The asymptotic distribution of nodal sets on spheres*, Johns Hopkins Ph. D. thesis, 2000.

[17] Rudnick Z., Wigman I., *On the volume of nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on the torus*, Preprint `arXiv:math-ph/0609072v2`.

[18] Savo A., *Lower bounds for the nodal length of eigenfunctions of the Laplacian*, Ann. Global Anal. Geom. **19** (2001), 133–151.

[19] Stein E., Weiss G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., vol. 32, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[20] Sylvester J. J., *Note on spherical harmonics*, Philos. Mag. **2** (1876), 291–307.

[21] Szegö G., *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.

[22] Yau S. T. (ed.), Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud, vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.

Омский филиал
Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
644099, Омск
ул. Певцова, 13
Россия
E-mail: gichev@ofim.oscsbras.ru

Поступило 11 сентября 2007 г.