



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пожалостин, А. В. Паншина, Параметрические колебания консоли, внутренняя полость которой заполнена жидкостью,  
*Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2008, выпуск 3, 94–98

<https://www.mathnet.ru/vuu131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

16 мая 2025 г., 01:16:24



УДК 532.5:534

© А. А. Пожалоостин, А. В. Паншина

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛИ, ВНУТРЕННЯЯ ПОЛОСТЬ КОТОРОЙ ЗАПОЛНЕНА ЖИДКОСТЬЮ<sup>1</sup>**

В работе обсуждается вопрос о возбуждении параметрических колебаний заземленной одним концом консольной балки (цилиндрической трубки), внутренняя полость которой заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Решаются, во-первых, гидродинамическая задача о взаимодействии стенок балки и жидкости и, во-вторых, задача о параметрических поперечных колебаниях консоли.

*Ключевые слова:* балка, идеальная несжимаемая жидкость, осесимметричные колебания, поперечные колебания.

**Введение**

В работе обсуждается вопрос о возбуждении параметрических колебаний заземленной одним концом консольной балки (цилиндрической трубки), внутренняя полость которой заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Такие колебания могут возникать в трубопроводах авиационных конструкций и энергетических установок при внезапном заземлении конца трубопровода.

Во-первых, решается гидродинамическая задача о взаимодействии стенок балки и жидкости, которая полностью заполняет внутреннее пространство балки. Предполагается, что со стороны свободного конца консоли сообщается вынуждающее перемещение, изменяющееся по гармоническому закону частоты  $p$ . Эта задача решается при следующих допущениях: колебания жидкости и цилиндрической стенки консоли считаются малыми, материал подчиняется закону Гука. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а ее движение — потенциальным с потенциалом скорости  $\Phi$ . Рассматривается случай осесимметричных продольных вынужденных колебаний оболочки, полностью заполненной жидкостью. Для получения аналитического решения гидродинамической задачи используется метод собственных функций, а именно частные решения уравнения Лапласа. Упругая оболочка считается безмоментной. В результате решения этой краевой задачи определяется прогиб стенки как функция частоты возмущающего перемещения  $p$ .

Во-вторых, за счет периодического вынужденного перемещения свободного конца консоли возникает переменное давление в жидкости, которое вызывает упругие колебания оболочки. Это приводит к периодическому изменению погонной массы балки, что может способствовать возбуждению параметрических изгибных поперечных колебаний балки как стержня. Применяя к решению этой задачи разложение по собственным формам, сводим ее для временной функции к уравнению Матье–Хилла, решение которого изучено в достаточной мере.

**§ 1. Решение гидродинамической задачи**

Пусть консольная цилиндрическая балка полностью заполнена идеальной несжимаемой жидкостью (рис. 1). Движение жидкости предполагается потенциальным с потенциалом скорости  $\Phi(r, x, t)$ . Функция  $\Phi$  для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа [1, 2]:

$$\Delta\Phi = 0$$

в объеме жидкости  $\tau$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ, код НШ-1311.2008.8).

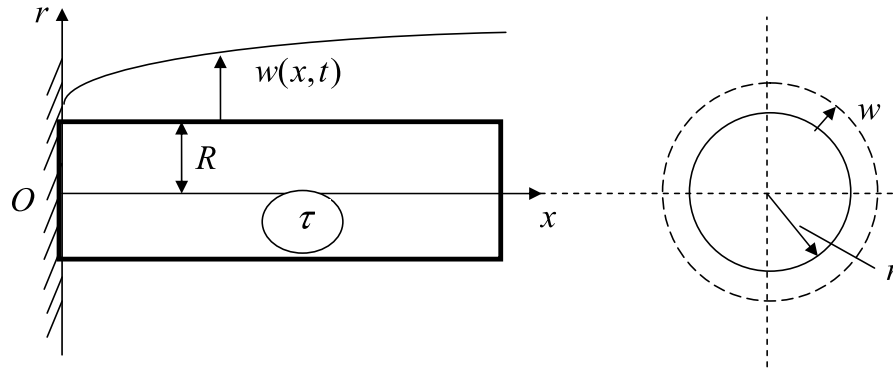


Рис. 1.

Распишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \tag{1.1}$$

Скорости частиц жидкости определяются формулой  $\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi$ . Поэтому проекции скоростей  $v_x$  и  $v_r$  частиц жидкости имеют вид [3]:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Гидродинамическое давление жидкости  $p$  в любой точке объема  $\tau$  имеет вид (интеграл Лагранжа–Коши):

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где  $\rho$  — плотность жидкости.

Чисто радиальные осесимметричные колебания оболочки балки описываются уравнением [4]:

$$\ddot{w} + \omega_1^2 w = \frac{1}{\rho_1 \delta_1} \cdot p|_{r=R}. \tag{1.2}$$

Здесь  $\omega_1^2 = \frac{E}{\rho_1 R^2}$  — квадрат частоты свободных колебаний сухой оболочки,  $E$  — модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга),  $\rho_1$  — плотность материала оболочки,  $\delta_1$  — радиус тонкой цилиндрической оболочки,  $w$  — нормальный прогиб оболочки.

Граничные условия для потенциала скорости имеют вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = pu_0 \sin pt \quad \text{при } x = l, \tag{1.4}$$

где  $p$  — частота возмущающего гармонического воздействия,  $u_0$  — амплитуда воздействия,  $l$  — длина цилиндрической оболочки.

Ищем потенциал скорости  $\Phi$  в виде [2]:

$$\Phi = AJ_0(kr) \frac{\text{ch } kx}{\text{sh } kl} \sin pt. \tag{1.5}$$

Из граничного условия (1.4) будем иметь:

$$AJ_0(kr)k = pu_0. \tag{1.6}$$

Здесь  $J_0(kr)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $k$  — неизвестная константа разделения.

Решаем функциональное уравнение (1.6) приближенно, умножая обе части его на функцию  $J_0(kr)$  и интегрируя по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ .

Находим константу  $A$ :

$$A = pu_0 \frac{\int_0^R J_0(kr) r dr}{k \int_0^R J_0^2(kr) r dr}.$$

Входящие в это выражение интегралы равны [5]:

$$\int_0^R J_0(kr) r dr = -\frac{R}{k} J_1(kR),$$

$$\int_0^R J_0^2(kr) r dr = \frac{R}{2} [J_0^2(kR) + J_1^2(kR)].$$

Здесь  $J_1(kr)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка. Тогда

$$A = \frac{2pu_0[-\frac{R}{k} J_1(kR)]}{kR^2[J_0^2(kR) + J_1^2(kR)]}.$$

Условие непротекания на смоченной поверхности оболочки имеет вид:

$$\dot{w} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = R.$$

С учетом формулы (1.5) получим:

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\text{ch } kx}{\text{sh } kl} k J_1(kR) \cdot \sin pt.$$

Из формулы (1.2) имеем:

$$\ddot{w} + \omega_1^2 \dot{w} = \frac{1}{\rho_1 \delta_1} \Big|_{r=R}.$$

Так как  $\ddot{w} = -p^2 \dot{w}$  и  $A \neq 0$ , то будем иметь:

$$(p^2 - \omega_1^2) k J_1(kR) = \frac{p^2}{\rho_1 \delta_1} \rho J_0(kR). \quad (1.7)$$

Трансцендентное уравнение (1.7) (мероморфная функция) для заданного значения дает спектр значений константы  $k$ :

$$k_1, k_2, \dots$$

Будем учитывать только первые значения:  $k = k_1$ .

Итак, решение для прогиба балки  $w$  имеет вид:

$$w = -\frac{k}{p} A \frac{\text{ch } kx}{\text{sh } kl} J_1(kR) \cos pt.$$

Можно утверждать, что

$$w(x, t) = \varepsilon(x) \cos pt. \quad (1.8)$$

Здесь  $\varepsilon(x)$  — малая величина первого порядка малости:

$$\varepsilon(x) = -\frac{k}{p} A(k, p) \frac{\text{ch } kx}{\text{sh } kl} \cdot J_1(kR). \quad (1.9)$$

**§ 2. Параметрические поперечные колебания консоли**

Для рассмотрения изгибных поперечных колебаний оболочки консольной балки используем балочную модель. Уравнение поперечных свободных колебаний имеет вид:

$$EJy^{(IV)} + \mu(x)y^{(II)} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь  $E$  — модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга),  $EJ$  — жесткость балки на изгиб,  $\mu(x)$  — погонная масса балки.

Примем приближенное решение уравнения (2.1) в виде:

$$y = q(t) \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

Здесь  $q(t)$  — функция времени, подлежащая определению.

Подсчитаем погонную массу балки с учетом деформации ее стенки:

$$\mu(x) = \mu_0 + 2\pi\rho R w(x). \tag{2.2}$$

Решение уравнения (2.1) ищем с помощью метода Галеркина. Тогда будем иметь дифференциальное уравнение для  $q(t)$ :

$$\ddot{q}\mu(x) \sin \frac{\pi x}{2l} + EJq \cdot \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 \sin \frac{\pi x}{2l} = 0. \tag{2.3}$$

Умножим обе части уравнения (2.3) на  $\sin \frac{\pi x}{2l} dx$ . Подставим сюда выражения (2.2), (1.8) и (1.9) и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $R$ . Получим:

$$(\mu_0^* + \varepsilon \cos pt) \cdot \ddot{q} + EJ\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 \frac{l}{2} \cdot q = 0 \ddot{q} + \omega_0^2(1 - \varepsilon_1 \cos pt) q = 0$$

или

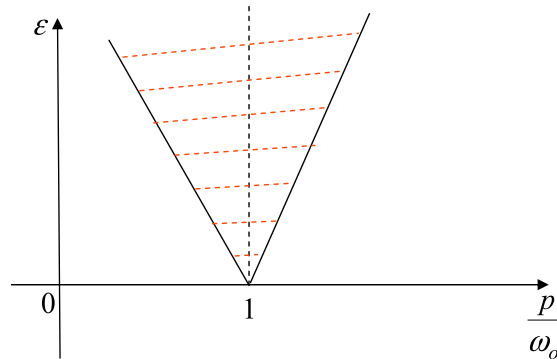
$$\ddot{q} + \omega_0^2(1 - \varepsilon_1 \cos pt)q = 0. \tag{2.4}$$

Здесь  $\omega_0$  — частота поперечных колебаний балки,  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\mu_0^*}$ .

Выражения для  $\varepsilon$  и  $\mu_0^*$  не приводятся в силу их громоздкости.

Итак, исходная задача свелась к решению дифференциального уравнения (2.4), известного в литературе как уравнение Матье–Хилла. Поскольку решение этого уравнения широко известно, то отсылаем читателя к литературе [6].

Можно определить зоны неустойчивости, используя диаграмму Айнса–Стретта [6]. На рис. 2 представлена примерная картина зоны неустойчивости основного параметрического резонанса при  $p = 2\omega_0$ , где  $\varepsilon$  — глубина пульсации,  $\frac{p}{\omega_0}$  — коэффициент расстройки.



**Рис. 2.**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. — М.: Наука, 1967. — 444 с.
2. Балабух Л. И., Ганичев А. И., Молчанов А. Г. Две задачи о собственных колебаниях упругих систем с жидким заполнением // Расчеты на прочность. — 1966. — № 12. — С. 386–392.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1963.
4. Флюгге В. Статика и динамика оболочек / Пер. с нем. — М.: Стройиздат, 1961. — 306 с.
5. Кузнецов Д. С. Специальные функции. — М.: Высшая школа, 1962. — 848 с.
6. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука / Пер. с англ. — М.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1955. — 503 с.

Поступила в редакцию 24.09.2008

*A. A. Pozhalostin, N. V. Panshina*

**Parametric oscillations of console, internal cavity of which is filled with liquid**

In this paper we discuss a question of exciting parametric oscillations of the balk with one end block up (cylindrical tube), internal value of which is filled with ideal incompressible liquid. First task is a hydrodynamic task about interaction of the walls of console and liquid and second task is about parametric cross oscillations of console.

*Keywords:* console, ideal incompressibility liquid, axis-symmetric oscillations, cross oscillations.

Mathematical Subject Classifications: 76B:76E

Пожалостин Алексей Алексеевич — д. т. н., профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (МГТУ им. Н. Э. Баумана), 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, E-mail: panalv@mail.ru

Паншина Алла Викторовна — к. ф.-м. н., доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (МГТУ им. Н. Э. Баумана), 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, E-mail: panalv@mail.ru