С. О. Сперанский, О вычислительных аспектах максимальной специфичности в вероятностном объяснении, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2011, том 11, выпуск 4, 78–93

УДК 510.647+.51

С. О. Сперанский

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АСПЕКТАХ МАКСИМАЛЬНОЙ СПЕЦИФИЧНОСТИ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ОБЪЯСНЕНИИ*

В настоящей статье изучаются вычислительные аспекты формального требования максимальной специфичности, накладываемого на правила в языке пропозициональной классической логики, когда над этим языком задана вычислимая рационально-значная вероятностная мера. Доказана неразрешимость ряда общих проблем по обнаружению максимально специфичных правил и вероятностных мер, для которых совокупность всех специфичных правил вычислима; установлена разрешимость множества максимально специфичных правил при неких естественных ограничениях; исследован вопрос о возможности равномерного нахождения разрешающих процедур в случае упомянутых ограничений; оценена сложность введённых подклассов мер в арифметической иерархии.

Ключевые слова: индуктивная и вероятностная логика, максимальная специфичность, разрешимость, вычислимость, сложность.

Введение

Представленный текст относится к области индуктивной и вероятностной логики, интенсивно разрабатываемому разделу современной прикладной логики. Все используемые нами ключевые определения являются пропозициональными аналогами определений в [1] и базируются на понятиях из [2–4], тесно связанных с развитием вероятностного подхода к предсказанию и реализацией так называемого *семантического вероятностного вывода* (подробнее см. [1–5]). Последний выступает в монографии [6] как некоторое обобщение принципов «семантического» подхода к программированию [7] на вероятностный случай. В упомянутых выше статьях внимание сосредоточено на работах Карла Гемпеля, а потому — на *требовании максимальной специфичности* [8], играющем центральную роль в *индуктивно-статистических объяснениях и предсказаниях* (И-С объяснениях) [9]. Интуитивно: *максимально специфичное правило* — правило с посылкой, включающей всю релевантную информацию относительно рассматриваемого в заключении запроса (т. е. нет дополнительной информации, способной увеличить условную вероятность указанного правила). Разумеется, самым тривиальным и лучшим правилом для предсказания литерала p является «$p \leftarrow p$»; с другой стороны, такое правило вполне бесполезно, более того, у нас может не быть возможности непосредственно верифицировать посылку (совпадающую здесь с заключением). Поэтому стоит наложить резонные ограничения на посылки, чтобы отделить «актуальные» *данные* от запросов, в предсказании которых мы заинтересованы [1; 2].

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ-11-07-00560а) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3606.2010.1).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 78–93

Заметим, имеется лишь несколько обзоров, бегло касающихся вопросов вычислимости в И-С объяснениях, хотя подобного рода проблемы хорошо и подробно исследованы для разнообразных классических и неклассических дедуктивных систем (*дедуктивно-номологических объяснений и предсказаний* [9], если придерживаться терминологии К. Гемпеля). Дабы заполнить этот пробел, мы ставим целью изучение основополагающих аспектов вычислимости (и разрешимости) в И-С объяснениях.

В следующем параграфе неформальная идея специфичности примет точный математический вид: с этой целью мы воспользуемся вероятностной интерпретацией кондиционалов, где значения из интервала $[0, 1]$ ассоциируются с логическими формулами [10] (таким образом, для каждой фиксированной вероятностной меры будет дано формальное определение максимально специфичных правил и, как следствие, всей их совокупности); кроме того, будет прояснена связь между наиболее важными подмножествами правил и доказана неразрешимость ряда общих проблем по нахождению максимально специфичных правил и вероятностных мер, для которых множество специфичных правил вычислимо. Третий параграф посвящен разрешимости в ситуации естественных «финитарных» ограничений, рассмотрению различных параметров, отвечающих за «финитарность», а также исследованию возможностей равномерного (по номерам мер) построения разрешающих процедур. Наконец, в четвертом параграфе мы проанализируем сложность ранее введенных классов мер в арифметической иерархии.

1. Основные результаты в общем случае

Пусть $\mathcal{L}$ — язык пропозициональной классической логики CL со счетным множеством пропозициональных переменных $Prop$; мы обозначим $\mathrm{For}_{\mathcal{L}}$ — совокупность всех формул языка $\mathcal{L}$. Тогда *вероятность над формулами в* $\mathcal{L}$ есть функция $\mu : \mathrm{For}_{\mathcal{L}} \to [0, 1]$, удовлетворяющая свойствам (см. [10], а также анализ различных определений в [11]):

1) если ϕ — тавтология CL, то $\mu(\phi) = 1$;

2) если $\neg(\phi \wedge \psi)$ — тавтология CL, то $\mu(\phi \vee \psi) = \mu(\phi) + \mu(\phi)$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что из приведенного определения вероятности μ вытекает: если $\mu(\neg\phi \vee \psi) = 1$, то верно неравенство $\mu(\phi) \leqslant \mu(\psi)$.

Положим $\mathtt{Fact}$ состоящим из всех атомов (пропозициональных переменных), позволяющих *проверку на практике*; именно их конъюнкциям (возможно, с отрицаниями) будет разрешено присутствовать в посылках «допустимых» правил [1; 2]. В настоящей работе мы иногда прибегаем к записи $S^* \leftrightharpoons S \cup \{\neg p \mid p \in S\}$, где S — некое подмножество литералов (атомов, либо их отрицаний). Также пусть $conj(\mathtt{Fact}^*)$ обозначает всевозможные конъюнкции элементов из $\mathtt{Fact}^*$. Соответственно литералы не из $\mathtt{Fact}^*$ — это свойства, предсказание которых нас интересует.

По принятой в логическом программировании традиции, под *правилом* понимается запись вида $q \leftarrow r_1 \wedge \cdots \wedge r_n$, где $q, r_1, \ldots, r_n$ суть литералы.

Определение 1. Для двух (пропозициональных) правил отношение $R' \succ R$ (говорим «*R' более общее, чем R*») равносильно тому, что у R' и R одни и те же заголовки, причем

$\mathtt{Body}\,[R'] \subset \mathtt{Body}\,[R]$, где $\mathtt{Body}\,[\cdot]$ — множество литералов в посылке рассматриваемого правила. Отношение *общности* полезно в ситуации, когда перед нами стоит задача об отыскании наиболее общих, «базовых» правил с нужными характеристиками.

Обозначим Rule^{μ} — множество тех правил, чьи посылки имеют ненулевую вероятность; теперь μ распространяется на Rule^{μ} как условная.

Определение 2. Для пары правил R, R' из Rule^{μ} отношение *вероятностного следования* $R \sqsubset R'$ означает $R \succ R'$ и $\mu\,(R) < \mu\,(R')$.

$$\mathsf{VeR}^{\mu} \leftrightharpoons \{R \in \mathrm{Rule}^{\mu} \mid \mathtt{Body}\,[R] \subseteq \mathtt{Fact}^{*}\}$$

Определение 3. Правило $R \in \mathsf{VeR}^{\mu}$ мы назовем *улучшаемым* (посредством уточнения), если найдется такое $R' \in \mathsf{VeR}^{\mu}$, что $R \sqsubset R'$. Обозначим ImR^{μ} — совокупность всех улучшаемых правил.

Определение 4. Правило R из VeR^{μ} *максимально специфично* (*ms-правило*), если оно не лежит в ImR^{μ}, т. е. нет такого $R' \in \mathsf{VeR}^{\mu}$, что $R \sqsubset R'$. Легко понять, выполнено равенство $\mathsf{ImR}^{\mu} = \mathsf{VeR}^{\mu} \setminus \mathsf{MSR}^{\mu}$. Наконец, ms-правило R называется *ms-законом*, если и только если нет такого ms-правила R', что $R' \succ R$ и одновременно $\mu\,(R') \geqslant \mu\,(R)$. Множества ms-правил и ms-законов обозначаются MSR^{μ} и MSL^{μ} соответственно.

По ходу доказательства утверждений нам пригодится результат, непосредственно следующий из пропозициональной версии замечания к лемме 1 в [1].

Предложение 1. *Если* $R' \in \mathsf{MSR}^{\mu}$, $R \in \mathsf{VeR}^{\mu}$, $R' \succ R$, *то* $\mu\,(R') = \mu\,(R)$.

Нетрудно убедиться, всякое R из формулировки выше автоматически окажется в MSR^{μ}. Значит, свойство быть ms-правилом монотонно в классе VeR^{μ} относительно добавления литералов в посылку.

Пусть γ — геделевская нумерация формул в $\mathcal{L}$, а ϱ — аналогичная кодировка для $\{r \in \mathbb{Q} \mid r \geqslant 0\}$. Напоминаем, γ представляет собой взаимно-однозначное соответствие, удовлетворяющее требованиям:

a) множество $range\,(\gamma) = \{\gamma\,(\Psi) \mid \Psi \in \mathrm{For}_{\mathcal{L}}\}$ вычислимо;

b) по формуле Ψ можно эффективно найти уникальный номер $\gamma\,(\Psi)$;

c) по номеру $\gamma\,(\Psi)$ можно эффективно восстановить формулу Ψ.

Подобные условия налагаются и на ϱ. Действие γ нетрудно распространить на правила. Обозначим через $\mathscr{P}_{\mathsf{c}}$ — класс всех вычислимых (рационально-значных) вероятностных мер; таким образом, элементы $\mathscr{P}_{\mathsf{c}}$ суть вычислимые функции, преобразующие коды формул в коды рациональных чисел и обладающие известными аддитивными свойствами. Конечно же, любая вычислимая функция всегда определена на всем $\mathbb{N}$, но из соображений удобства мы часто будем работать с $range\,(\gamma)$ в области определения, подразумевая, что функцию можно произвольно доопределить до вычислимой на остальной части $\mathbb{N}$ (ведь $range\,(\gamma)$ вычислимо), а из контекста ясна правильность такого подхода. Кроме того, дабы не загромождать текст, мы обычно пишем $\mathrm{For}_{\mathcal{L}}$ или, например, Rule^{μ} вместо совокупностей их кодов, поскольку это не меняет сути вещей. Далее в тексте предполагается, что $\mathtt{Fact}^*$ вычислимо, а потому вычислимо множество «допустимых» правил VeR^{μ}. Временами мы будем пользоваться аббревиатурами: «в.п.» — для «вычислимо перечислимо», и «в.» — для «вычислимо».

Предложение 2. *Если* $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$, *то* ImR^{μ} *вычислимо перечислимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Организовав вычислимое перечисление всех возможных посылок (это легко сделать, ибо $\mathtt{Fact}^*$ вычислимо), начнем эффективный поиск «улучшающего» правила в VeR^{μ}. Последнее найдется тогда и только тогда, когда исходное R лежит в ImR^{μ}. Поэтому частичная характеристическая функция для ImR^{μ} частично вычислима. □

Предложение 3. *Пусть* $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$. *Тогда*

$$\mathsf{MSR}^{\mu}\ \textit{в.п.} \iff \mathsf{ImR}^{\mu}\ \textit{в.} \iff \mathsf{MSR}^{\mu}\ \textit{в.} \iff \mathsf{MSL}^{\mu}\ \textit{в.} \iff \mathsf{MSL}^{\mu}\ \textit{в.п.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнем цепочку слева-направо (в соответствии с $\Longrightarrow$).

$\boxed{\mathsf{MSL}^{\mu}\ \textit{в.п.} \Longrightarrow \mathsf{MSR}^{\mu}\ \textit{в.п.}}$ Некоторое множество в.п. (в частности, это относится и к MSR^{μ}), если и только если его частичная характеристическая функция частично вычислима. Другими словами, требуется некий алгоритм, выдающий ответ «да» лишь в том случае, когда правило R лежит в MSR^{μ} (при этом соответствующий алгоритм для MSL^{μ} считаем известным). Итак, для верификации позитивного ответа соберем в множество все такие $R' \in \mathrm{Rule}^{\mu}$, что $R' \succcurlyeq R$ и $\mu(R') \geqslant \mu(R)$ (их число конечно), — эта процедура может быть (при желании) «распараллелена»; ее запись универсальна для всех правил, а реализация осуществляется эффективно по данному R (ибо $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$). Полученное множество обозначим $\wp[R]$. Поскольку $R \in \mathsf{MSR}^{\mu}$ эквивалентно $\wp[R] \cap \mathsf{MSL}^{\mu} \neq \varnothing$ (для обратной импликации нужно воспользоваться предложением 1), интересующий нас алгоритм для MSR^{μ} можно легко выписать.

$\boxed{\mathsf{MSR}^{\mu}\ \textit{в.п.} \Longrightarrow \mathsf{ImR}^{\mu}\ \textit{в.}}$ Коль скоро ImR^{μ} в.п. (см. предложение 2), оба множества MSR^{μ} и ImR^{μ} вычислимы согласно теореме Поста.

$\boxed{\mathsf{ImR}^{\mu}\ \textit{в.} \Longrightarrow \mathsf{MSR}^{\mu}\ \textit{в.}}$ В силу тождества $\mathsf{MSR}^{\mu} = \mathsf{VeR}^{\mu} \setminus \mathsf{ImR}^{\mu}$, где ImR^{μ} и VeR^{μ} суть вычислимые множества, характеристическая функция $\chi_{\mathsf{MSR}^{\mu}}$ для MSR^{μ} совпадает с $\chi_{\mathsf{VeR}^{\mu}} \cdot \overline{\chi_{\mathsf{ImR}^{\mu}}}$ (здесь $\chi_{\mathsf{VeR}^{\mu}}$ и $\chi_{\mathsf{ImR}^{\mu}}$ — вычислимые характеристические функции для VeR^{μ} и ImR^{μ} соответственно), поэтому сама $\chi_{\mathsf{MSR}^{\mu}}$ и множество MSR^{μ} вычислимы.

$\boxed{\mathsf{MSR}^{\mu}\ \textit{в.} \Longrightarrow \mathsf{MSL}^{\mu}\ \textit{в.}}$ Теперь наша задача — отыскать вычислимую (полностью определенную) характеристическую функцию для MSL^{μ} (если таковая уже имеется для MSR^{μ}). Вновь для произвольного $R \in \mathsf{VeR}^{\mu}$ рассмотрим $\wp[R]$ (введенное ранее). Отметим, $R \in \mathsf{MSL}^{\mu}$ равносильно условию: $R \in \mathsf{MSR}^{\mu}$ и не существует $R' \in \wp[R] \cap \mathsf{MSR}^{\mu}$, отличного от R, — которое уже можно эффективно установить или опровергнуть.

$\boxed{\mathsf{MSL}^{\mu}\ \textit{в.} \Longrightarrow \mathsf{MSL}^{\mu}\ \textit{в.п.}}$ Очевидно. □

Выписанные в предложении 3 эквивалентности служат лучшему пониманию взаимоотношений между основными классами правил. Следующая теорема характеризует сложность: свойство максимальной специфичности может оказаться неразрешимым в множестве всех правил языка $\mathcal{L}$.

Теорема 1. *Существует* $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$ *такая, что множество* ImR^{μ} m*-универсально* (*а потому невычислимо, т. е. проблема* «$\mathrm{R} \in \mathsf{ImR}^{\mu}$?» *неразрешима*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соображений простоты изложения считаем $Prop \leftrightharpoons \{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\mathtt{Fact} \leftrightharpoons \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$. Стало быть, единственным атомом, в чьем предсказании мы заинтересованы, является p_0. Конечная цель — задать вычислимую меру μ и показать, что $B \leqslant_m \mathsf{ImR}^{\mu}$ для всякого в.п. множества B. В качестве альтернативы докажем $A \leqslant_m \mathsf{ImR}^{\mu}$ для фиксированного m-универсального множества A (последнее выберем произвольно). Дабы свести A к ImR^{μ}, нужно вычислимое отображение $f : \mathbb{N} \to \mathrm{Rule}^{\mu}$, для которого

$$x \in A \quad \text{эквивалентно} \quad f(x) \in \mathsf{ImR}^{\mu}.$$

Пусть ν — вычислимая функция, перечисляющая A ($range(\nu) = A$). На каждом шаге k в наше поле зрения попадает новый элемент $\nu(k)$ из A; положим $A_k \leftrightharpoons \{\nu(1), \ldots, \nu(k)\} \subset A$ и $f(k) \leftrightharpoons p_0 \leftarrow p_{2k-1}$. Очевидно, f — вычислимое отображение. Мы хотим породить последовательность $\mu_0 \subseteq \mu_1 \subseteq \ldots$ со специальными свойствами; здесь μ_k — ограничение (будущей) меры μ на все формулы в базисе $p_0, p_1, \ldots, p_{2k-1}, p_{2k}$, определяющееся в конце k-го шага. Требуется сконструировать эти $\{\mu_k\}$ таким образом, чтобы следующие условия были удовлетворены (их будет достаточно для завершения доказательства): для любых $k = 1, 2, \ldots$ и $i \leqslant k$

1) если $i \in A_k$, то $f(i)$ лежит в ImR^{μ}; более того, в нашем случае $f(i)$ окажется улучшаемо за счет правила R' с посылкой $\mathtt{Body}[R'] \subseteq \{p_1, \ldots, p_{2k}\}^* \subset \mathtt{Fact}^*$;

2) если $i \notin A$, то $f(i)$ не улучшаемо относительно набора $p_0, \ldots, p_{2k}$ — нет такого R' с посылкой $\mathtt{Body}[R'] \subseteq \{p_1, \ldots, p_{2k}\}^*$, что $f(i) \sqsubset R'$.

Непосредственно легко проверить, что $\mu \leftrightharpoons \bigcup \mu_j$ будет вычислима по построению. Кроме этого, если $x \in A$, то $f(x)$ станет улучшаемым согласно (1) на шаге, когда x впервые появится в последовательности $\nu(1), \nu(2), \ldots$ Если же $x \notin A$, то $f(x)$ будет не улучшаемо относительно $p_0, \ldots, p_{2n}$ для всех n, и поэтому не улучшаемо в принципе.

Воспользуемся геометрической интерпретацией вероятности; отметим следующие точки (в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, координаты даны в скобках):

$B_0(0,0)$, $B_\infty(1,0)$, $B_k(s_k, 0)$; $B'_0(0,1)$, $B'_\infty(1,1)$, $B'_k(s_k, 1)$,

$D_0(0, s_1)$, $D_\infty(1, s_1)$, где $s_k = \sum_{i=1}^{k} 1/2^i$, $k = 1, 2, \ldots$ (рис. 1)

Замечание: так как $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$, то каждое значение s_k меньше 1.

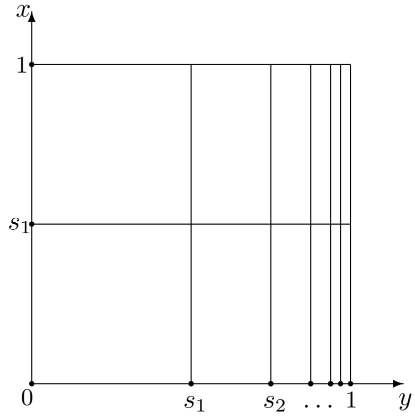

Рис. 1

Отождествим $[\![DCMN]\!]$ с частью пространства, заключенного внутри выпуклого четырехугольника $DCMN$; полагаем

$$\begin{aligned}&\Omega \leftrightharpoons \left[\!\left[B_0 B_0' B_\infty' B_\infty\right]\!\right], \quad \Delta_0 \leftrightharpoons \left[\!\left[D_0 B_0' B_\infty' D_\infty\right]\!\right], \\ &\Delta_k \leftrightharpoons \left[\!\left[B_{k-1} B_{k-1}' B_k' B_k\right]\!\right] \quad \text{и} \quad \Delta_k' \leftrightharpoons \Delta_k \cap \Delta_0, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

Нами подразумевается равномерное распределение; таким ообразом, под мерой некоторого Δ_j $(j = 0, 1, \ldots)$ или Ω имеется в виду его площадь. Тогда Ω имеет меру 1, в то время как каждое Δ_k при $k = 1, 2 \ldots$ — меру $1/2^k$, а мера Δ_0 равна $1/2$. Разумеется, если все $[\![p_j]\!]$ $(j = 0, 1, \ldots, 2k)$ уже заданы, то можно без труда восстановить и (частичное) распределение μ_k на формулах: отрицанию отвечает дополнение в Ω, конъюнкции — пересечение сегментов, а дизъюнкции — объединение. Отсюда нет нужды приводить полное описание всех известных значений μ на k-м этапе. Определим последовательность $\{\mu_k\}_{k \geqslant 0}$ шаг за шагом так, чтобы на шаге k оба условия (1–2) были соблюдены. Сперва возьмем $[\![p_0]\!] \leftrightharpoons \Delta_0$. Допустим, индуктивная гипотеза верна при $k = n - 1$.

Индуктивный шаг для $k + 1 = n$.

Пусть $[\![p_{2n-1}]\!] \leftrightharpoons \Delta_n$. Далее хотим выбрать $[\![p_{2n}]\!]$ как некоторое подмножество вида $\Delta_{k_1} \cup \cdots \cup \Delta_{k_l}$, где $\{k_1, \cdots, k_l\} \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ (возможно, пустое). Как составить это $[\![p_{2n}]\!]$, удовлетворив тем самым все условия n-го шага? Пусть $K \leftrightharpoons \varnothing$. Для каждого $i \leqslant n$: если $i \in A_n$, то $K \leftrightharpoons K \cup \{i\}$. Теперь положим $[\![p_{2n}]\!] \leftrightharpoons \bigcup_{i \in K} \Delta_i$. Очевидно, (1) выполнено, ибо нововведенные переменные способны сделать условную вероятность равной единице (вместо исходной $1/2$), а именно:

$$f(i) = (p_0 \leftarrow p_{2i-1}) \sqsubset (p_0 \leftarrow p_{2i-1} \wedge p_{2n}) \text{ для } i \in K = A_n \cap \{1, \ldots, n\}.$$

Рассмотрим (2), $i \leqslant n$, причем $i \notin A_n$.

a. Случай $i < n$. Поскольку $i \notin A_{n-1} \subseteq A_n$, то $f(i)$ не улучшаемо относительно пропозициональных переменных из $\{p_1, \cdots, p_{2n-2}\}$. Тривиально $i \notin K$ и $i \neq n$, а потому $[\![p_{2i-1}]\!] \cap [\![p_{2n}]\!] = \varnothing$ и $[\![p_{2i-1}]\!] \cap [\![p_{2n-1}]\!] = \varnothing$; значит, правило $f(i)$ также не улучшаемо относительно расширенной коллекции переменных $\{p_1, \cdots, p_{2n}\}$.

b. Случай $i = n$. Поскольку $i \notin K \subseteq A_n$, то все пересечения $[\![p_{2i-1}]\!] \cap [\![p_j]\!]$ для $j = 1, \cdots, 2n-2, 2n$ пусты (и, в частности, $\mu(p_{2i-1} \wedge p_j) = 0$); следовательно, правило $f(i)$ не улучшаемо относительно текущей совокупности $\{p_1, \cdots, p_{2n}\}$. □

Следствие 1. *Существует такая* $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$, *что* MSR^{μ} *и* MSL^{μ} *оба не в.п.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем μ, найденную в теореме 1. Осталось привлечь предложение 3, дабы убедиться в справедливости следствия. □

Следующая теорема гласит, что описанную выше ситуацию нельзя обнаружить заранее при помощи некоего вычислительного устройства; другими словами, нет универсального алгоритма ее распознавания. Обозначим $\#[S]$ — множество всех клиниевских кодов мер в $S \subseteq \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$ (схожие обозначения используются и для подклассов вычислимых функций); а через Ξ — множество таких кодов для $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$, что MSR^{μ} вычислимо. В тексте мы порой употребляем запись $\ulcorner\mu\urcorner$ для указания номера функции, вычисляющей $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$ (когда понятно, как именно получается этот номер, ведь имеется бесконечно много кодов для одной и той же μ).

Определение 5. Пусть $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, причем существует частичная вычислимая функция $\chi : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ такая, что $\chi(x) = 1$ при $x \in A$, и $\chi(x) = 0$ при $x \in B \setminus A$. Тогда говорим, что A *вычислимо выделимо из* B.

Теорема 2. *Множество* Ξ *не вычислимо выделимо из* $\#[\mathscr{P}_{\mathsf{c}}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Берем m-универсальное множество A и его перечисление ν; $A_k \leftrightharpoons \{\nu(1), \ldots, \nu(k)\} \subset A$. Для каждого $x \in \mathbb{N}$ запустим конструкцию из доказательства предыдущей теоремы с определенными модификациями: на n-м шаге, если $x \notin A_n$, то действуем так же, как и в теореме 1; иначе полагаем $[\![p_{2n}]\!] \leftrightharpoons [\![p_0]\!]$, $[\![p_{2k-1}]\!] \leftrightharpoons \Delta_k$ $(k \geqslant n)$, $[\![p_{2j}]\!] \leftrightharpoons \varnothing$ $(j > n)$ — читатель сможет легко убедиться, что в данной ситуации получится мера $\mu_x \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$, причем соответствующее ей MSR^{μ^x} окажется вычислимо. Итак, в случае $x \in A$ на каком-то шаге (точнее, когда x впервые встретится в последовательности $\nu(1), \nu(1), \ldots$) будет пострена μ_x, для которой множество ms-правил вычислимо. В случае $x \notin A$ (эквивалентно $x \notin A_n$ для всех n) мы просто итеративно зададим меру, найденную в предшествующей теореме. Строго говоря, у нас «на руках» еще нет номеров для $\{\mu_x\}_{x\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$, однако по произвольной формуле $\Phi[p_0, \ldots, p_N]$ и $x \in \mathbb{N}$ можно эффективно найти значение $\mu_x(\Phi[p_0, \ldots, p_N])$ — оно станет известно по описанной нами процедуре на шаге n при $2n \geqslant N$. В результате наличествует вычислимое отображение $\rho : x, \Phi \mapsto \mu_x(\Phi)$, которое согласно s-m-n теореме преобразуется к вычислимой функции $\rho' : x \mapsto \ulcorner\mu_x\urcorner$, где $\ulcorner\mu_x\urcorner$ есть код для $\mu_x \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$. Итак, если бы имелась нужная ξ такая, что $\xi(n) = 1$ для $n \in \Xi$, и $\xi(n) = 0$ для $n \in \#[\mathscr{P}_{\mathsf{c}}] \setminus \Xi$, то множество A было бы вычислимо — противоречие с выбором A. $\square$

2. Случай «финитарных» вероятностных мер

Приведем несколько предварительных соображений об эквивалентности тех или иных формул относительно вероятностной семантики. Согласно определению вероятности, если $\vdash \phi \equiv \psi$, то $\mu(\phi \equiv \psi) = 1$[1]. Значит, μ можно трактовать как конечно-аддитивную меру на алгебре Линденбаума–Тарского (классической логики). Тем не менее, синтаксическая равносильность — излишне жесткое требование для наших нужд, поэтому введем более слабое отношение *вероятностной эквавалентности*: пишем «$\phi \simeq \psi$» (когда ясно, о какой μ идет речь), если и только если $\mu(\phi \equiv \psi) = 1$. В последующем установим ряд полезных свойств $\simeq$.

Лемма 1 (о замене). *Пусть* μ *— произвольная вероятность над формулами в языке* $\mathcal{L}$; $\phi_1 \simeq \psi_1$, ..., $\phi_k \simeq \psi_k$. *Тогда для любой формулы* $\chi(p_1, \ldots, p_k)$ *выполнено*

$$\chi(\phi_1, \ldots, \phi_k) \simeq \chi(\psi_1, \ldots, \psi_k).$$

[1] Запись «$\phi \equiv \psi$» есть сокращение для $(\neg\phi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что в классической логике выводима

$$\neg\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \equiv \psi_k) \vee (\chi\,(\phi_1, \dots, \phi_k) \equiv \chi\,(\psi_1, \dots, \psi_k))\,,$$

а потому вероятность указанной тавтологии равна единице. Вышесказанное (с учетом определения μ и замечания к нему) влечет неравенство

$$\mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \equiv \psi_k) \leqslant \mu\,(\chi\,(\phi_1, \dots, \phi_k) \equiv \chi\,(\psi_1, \dots, \psi_k))\,.$$

Таким образом, достаточно понять, что $\mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \equiv \psi_k) = 1$, ибо следствием последнего является $\mu\,(\chi\,(\phi_1, \dots, \phi_k) \equiv \chi\,(\psi_1, \dots, \psi_k)) = 1$.

Воспользуемся *индукцией по k*.

Случай $k = 1$ (база) тривиален, так как $\phi_1 \simeq \psi_1$. Допустим, индуктивная гипотеза верна для $k-1$. Индуктивный шаг:

$$\begin{aligned}\mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \equiv \psi_k) &= \mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{k-1} \equiv \psi_{k-1}) - \\ &\quad - \mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{k-1} \equiv \psi_{k-1} \wedge \neg\,(\phi_k \equiv \psi_k)) = \\ &\quad = 1 - \mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{k-1} \equiv \psi_{k-1} \wedge \neg\,(\phi_k \equiv \psi_k))\,.\end{aligned}$$

Наконец, осталось заметить, что

$$\begin{aligned}&\mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{k-1} \equiv \psi_{k-1} \wedge \neg\,(\phi_k \equiv \psi_k)) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \mu\,(\neg\,(\phi_k \equiv \psi_k)) = 1 - \mu\,(\phi_k \equiv \psi_k) = 0\,.\end{aligned}$$

Это завершает цепочку преобразований и дает

$$\mu\,(\phi_1 \equiv \psi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \equiv \psi_k) = 1. \qquad \square$$

Очевидно, для отношения $\simeq$ имеет место рефлексивность и симметричность, а привлекая тавтологию $\neg\,(\phi \equiv \psi \wedge \psi \equiv \chi) \vee \phi \equiv \chi$ легко получить и транзитивность. Стало быть, $\simeq$ — действительно *эквивалентность*; она играет принципиальную роль в дальнейшем.

Теорема 3. *Пусть $\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}}$, причем $|\{\mu\,(\phi) \mid \phi \in conj\,(\mathtt{Fact}^*)\}| < \infty$. Тогда множество ImR^μ (а вместе с ним и MSR^μ) вычислимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу предшествующей леммы эквивалентные по $\simeq$ формулы можно заменять друг на друга в любом контексте (без изменения в величине соответствующих вероятностей, ведь $\phi \simeq \psi$ влечет $\mu\,(\phi) = \mu\,(\psi)$), то нам достаточно показать конечность множества классов эквивалентности $\{\psi^\mu \mid \psi \in conj\,(\mathtt{Fact}^*)\}$, где $\psi^\mu \risingdotseq \{\phi \mid \psi \simeq \phi\}$. Тогда, имея по одному представителю из каждого класса, процедуру проверки «$R \in \mathsf{ImR}^\mu$?» легко выписать (фактически у произвольного правила всегда будет лишь конечное число менее общих, «уточняющих» его правил).

С этой целью обратимся к геометрическому представлению дискретной вероятности, в котором любая $\psi \in conj\,(\mathtt{Fact}^*)$ занимает свое «истинностное» пространство в $\mathbb{R}^2$ площади $\mu\,(\psi)$ (см. доказательство теоремы 1). Сначала возьмем квадрат со стороной единичной длины, а также зафиксируем некую вычислимую нумерацию ν элементов

$\mathtt{Fact}$ (отметим, что такую нумерацию можно выбрать, ибо $\mathtt{Fact}$ вычислимо и, в частности, перечислимо). Дальнейшее построение происходит по нижеследующей схеме.

Шаг 0. Вычисляем $\mu(\nu(0))$, затем делим исходный квадрат одной (вертикальной, или горизонтальной — оставляем на усмотрение читателя) линией в отношении площадей $\mu(\nu(0))$ к $1 - \mu(\nu(0))$, помечаем получившиеся прямоугольники символами $[\![\nu(0)]\!]$ и $[\![\neg\nu(0)]\!]$ соответственно.

Шаг n. Пусть ранее нами построена геометрическая интерпретация всевозможных конъюнкций вида $\nu_{\varepsilon,n} \leftrightharpoons \nu(0)^{\varepsilon_0} \wedge \cdots \wedge \nu(n-1)^{\varepsilon_{n-1}}$, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, запись $\nu(i)^0$ графически означает $\neg\nu(i)$, а $\nu(i)^1$ — $\nu(i)$; иными словами, всем $\nu_{\varepsilon,n}$ отведены непересекающиеся прямоугольные сегменты $[\![\nu_{\varepsilon,n}]\!]$ площадей $\mu\left(\nu^{\varepsilon}_{n-1}\right)$ (на «картинке»). Для каждой такой конънкции вычислим $\mu(\nu_{\varepsilon,n} \wedge \nu(n))$, после чего поделим $[\![\nu_{\varepsilon,n}]\!]$ на два прямоугольника в отношении $\mu(\nu_{\varepsilon,n} \wedge \nu(n))$ к $\mu(\nu_{\varepsilon,n} \wedge \neg\nu(n)) = \mu(\nu_{\varepsilon,n}) - \mu(\nu_{\varepsilon,n} \wedge \nu(n))$ (при сопутствующих обозначениях $[\![\nu_{\varepsilon,n} \wedge \nu(n)]\!]$ и $[\![\nu_{\varepsilon,n} \wedge \neg\nu(n)]\!]$).

Разумеется, «истинностное» пространство всякой $\psi \in conj(\mathtt{Fact}^*)$ (и вообще формулы от переменных $\mathtt{Fact} = \{\nu(0), \nu(1), \dots\}$) рано или поздно будет найдено. Действительно, пусть N — это номер шага, когда все переменные из ψ уже перечислены (он всегда существует). Разумеется, среди $\nu(0), \dots, \nu(N)$ могут встретиться и другие переменные, не входящие явным образом в ψ; тогда ψ разлагается в совершенную дизъюнктивную нормальную форму относительно $\nu(0), \dots, \nu(N)$, а результат объединения сегментов, отвечающих элементарным конъюнкциям, образует интерпретацию ψ. Указанный метод естественно согласуется с тем, что у нас логически эквивалентные в CL формулы всегда играют одну и ту же роль (а ψ эквивалентна своей с.д.н.ф.).

Наконец, после некоторого шага уже не появляется никаких новых линий, т. е. любая «разделяющая» линия совпадает с отрезком какой-либо прежде проведенной; в противном случае мы бы имели бесконечную последовательность строго убывающих к нулю (по площади) сегментов, а это противоречит наличию наименьшего отличного от нуля значения μ на элементах $conj(\mathtt{Fact}^*)$. С этого момента разметка прекращается: построение завершено. Нетрудно понять, полученная картинка дает информацию обо всех классах $\{\psi^{\mu} \mid \psi \in conj(\mathtt{Fact}^*)\}$ (в ней каждый ψ^{μ} обозначен одним из своих представителей), причем количество классов оказалось конечно. □

Как видно из доказательства теоремы, все три условия:

- $\tau[\mu] \leftrightharpoons |\{\mu(\psi) \mid 0 < \mu(\psi) < 1,\ \psi \in conj(\mathtt{Fact}^*)\}| < \infty$;
- $\kappa[\mu] \leftrightharpoons |\{\psi^{\mu} \mid \psi \in conj(\mathtt{Fact}^*)\}| < \infty$;
- $\iota[\mu] \leftrightharpoons 1/\inf\{\mu(\psi) \mid \mu(\psi) > 0,\ \psi \in conj(\mathtt{Fact}^*)\} < \infty$,

где $\inf\{\dots\}$ есть точная нижняя грань соответствующего подмножества в $\mathbb{R}$, — имеют одну и ту же силу (и гарантируют вычислимость MSR^{μ}). Число $\kappa[\mu]$, однако, сообщает больше полезной информации при построении геометрической интерпретации. Отметим, хотя при возникновении ситуации $\mu \in \mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}} \leftrightharpoons \{\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}} \mid \kappa[\mu] < \infty\}$ всегда найдется вычислимая характеристическая функция для MSR^{μ}, это еще не означает, что можно эффективно отыскать $\chi_{\mathsf{MSR}^{\mu}}$ по номеру μ. Если же вдобавок дана величина $\kappa[\mu]$, то положение становится благоприятным, а интересующая нас проблема — разрешимой (о чем и говорит теорема 4).

Теорема 4. *Существует алгоритм, по каждой паре* $\langle \ulcorner \mu \urcorner, \kappa[\mu] \rangle$, *где* $\ulcorner \mu \urcorner$ *— какой-нибудь номер меры* $\mu \in \mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}}$, *выдающий код вычислимой характеристической функции для множества* MSR^{μ}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, почти все действия по построению геометрического представления в доказательстве теоремы 3 могут быть реализованы эффективно: проблему составляет лишь обнаружение момента «стабилизации» интерпретации (после него уже имеется нужная «картинка» и, таким образом, практически наличествует разрешающая процедура для MSR^{μ} — ее легко эффективно выписать). Убедимся, что знания $\kappa[\mu]$ достаточно для определения момента «стабилизации». На шаге n нам известны «истинностные» пространства всевозможных конъюнкций от переменных $\nu(0), \ldots, \nu(n)$, а потому можно вычислить количество различных интерпретаций для последних (обозначим его κ_n). Поскольку элементы $conj(\mathtt{Fact}^*)$ попадают в один класс эквивалентности тогда и только тогда, когда их образы на «картинке» совпадают (данное утверждение нетрудно проверить), то $\kappa[\mu]$ достигается на некотором шаге. Иначе говоря, найдется N со свойством $\kappa_N = \kappa[\mu]$, причем мы способны отследить наступление такого шага, а значит, эффективно терминировать процесс построения геометрической интерпретации. Нами описана вычислимая функция, которая по $\langle \ulcorner \mu \urcorner, \kappa[\mu] \rangle$ и правилу R выдает ответ на вопрос «$R \in \mathsf{MSR}^{\mu}$?»; искомый же алгоритм получается с помощью s-m-n теоремы. □

Замечание 2. Мы оставляем в виде упражнения читателю убедиться (доказательство можно провести в духе теоремы 2), что никакое подмножество в следующих включениях не вычислимо выделимо из объемлющего:

$$\#\left[\mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}}\right] \subset \#\left[\mathscr{P}_{\mathsf{c}}\right] \subset \#\left[\mathscr{F}_{\mathsf{c}}\right],$$

где $\mathscr{F}_{\mathsf{c}}$ — класс всех (всюду определенных) вычислимых функций.

Введем некоторые подклассы «финитных» мер: $\mathbb{T}_t \leftrightharpoons \left\{\mu \in \mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}} \mid \tau[\mu] = t\right\}$, $\mathbb{K}_k \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \left\{\mu \in \mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}} \mid \kappa[\mu] = k\right\}$ и $\mathbb{I}_i \leftrightharpoons \left\{\mu \in \mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}} \mid \iota[\mu] = i\right\}$, где $t, k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Q}$.

Следствие 2. *Пусть* $K \subseteq \mathbb{K}_k$ *(само значение* k *не обязательно известно). Тогда существует алгоритм, который по всякому номеру меры* $\mu \in K$ *выдает код разрешающей процедуры для* MSR^{μ}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется единое для всех рассматриваемых мер число k такое, что для каждой $\mu \in K$ выполнено $\kappa[\mu] = k$. Хотя k и не дано явно, оно все же существует (зафиксируем его); будем ассоциировать $\ulcorner \mu \urcorner$ ($\mu \in K$) с парой $\langle \ulcorner \mu \urcorner, k \rangle$. Итак, нужный алгоритм по сути своей есть «сужение» алгоритма из четвертой теоремы. □

Теперь обратимся к другим параметрам распределений из $\mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}}$. Ранее было сказано, что знание κ более целесообразно, нежели τ или ι, хотя в известной степени все они взаимозаменяемы при определении множества $\mathscr{P}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{c}} = \{\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}} \mid \tau[\mu] < \infty\} =$

$= \{\mu \in \mathscr{P}_{\mathsf{c}} \mid \iota[\mu] < \infty\}$. Для формального обоснования этого заявления мы сначала докажем вспомогательную лемму, следствием которой и будет нужный «негативный» результат для τ и ι — в противовес «позитивным» теореме 4 и следствию 2 (для κ).

Лемма 2. *Зафиксируем произвольное натуральное $t \geqslant 3$ и некое правило R с непротиворечивой посылкой, причем $\mathtt{Body}\,[R] \subseteq \mathtt{Fact}^*$ и заголовок R не лежит в $\mathtt{Fact}^*$. Тогда нет такой частично вычислимой функции $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, что $\#\,[\mathbb{T}_t] \subseteq dom\,(f)$, а $f\,(\ulcorner\mu\urcorner) = 1$ равносильно $R \in \mathsf{ImR}^{\mu}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как будет ясно из последующих рассуждений, без ограничения общности можно считать $R \leftrightharpoons p_0 \leftarrow p_1$ (для этого в геометрической интерпретации меры каждому литералу из $\mathtt{Body}\,[R]$ припишем ту же часть вероятностного пространства, что будет отведена для p_1 в доказательстве ниже).

От противного. Допустим, таковая f все же найдется. Далее для m-универсального множества A мы получим вычислимую $h : \mathbb{N} \to \#\,[\mathbb{T}_t]$ со свойством: $x \in A$ эквивалентно $f\,(h\,(x)) = 1$, — это будет противоречить невычислимости A. Отметим, все задействованные в ходе построения ниже вероятностные распределения равномерны (и конструируются с помощью рис. 2, см. аналогию с доказательством теорем 1–2).

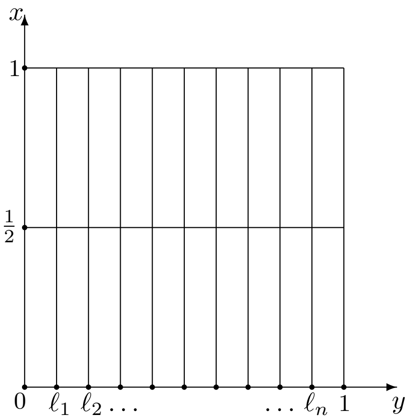

Рис. 2

Для любого натурального $n \geqslant 1$ рисунок выше чертится по точкам:

$$E_k\,(\ell_k, 0)\,,\ E'_k\,(\ell_k, 1)\,,\ F_k\Big(\ell_k, \frac{1}{2}\Big), \quad \text{где } \ell_k = k/\,(n+1)\,,\ k = \overline{0, n+1}.$$

Также обозначим некоторые из областей внутри четырехугольников:

$$\begin{aligned} &\Omega \leftrightharpoons \big[\!\big[E_0 E'_0 E'_{n+1} E_{n+1}\big]\!\big]\,, \quad \Delta_0 \leftrightharpoons \big[\!\big[F_0 E'_0 E'_{n+1} F_{n+1}\big]\!\big]\,, \\ &\Delta_k \leftrightharpoons \big[\!\big[E_{k-1} E'_{k-1} E'_k E_k\big]\!\big] \quad \text{и} \quad \Delta'_k \leftrightharpoons \Delta_k \cap \Delta_0, \quad \text{где } k = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Сначала нам понадобится мера-заготовка μ^t, определенная лишь на некой конечной совокупности переменных X_t, причем текущий параметр

$$\tau \restriction_{X_t} \leftrightharpoons \big|\big\{\mu^t\,(\phi) \mid 0 < \mu^t\,(\phi) < 1,\ \phi \in conj\,((\mathtt{Fact} \cap X_t)^*)\big\}\big|$$

равен t. Отдельно рассмотрим два возможных случая.

1. $t = 2n + 2$. Положим $[\![p_0]\!] \leftrightharpoons \Delta_0$, $[\![p_1]\!] \leftrightharpoons \Delta_1, \dots, [\![p_{n+1}]\!] \leftrightharpoons \Delta_{n+1}$. Легко видеть, количество нетривиальных значений для равномерной вероятности на элементах $conj\left((\mathtt{Fact} \cap \{p_0, \dots, p_{n+1}\})^*\right)$ равно $n+1$, а точнее, это числа $\frac{2}{2n+2}, \frac{4}{2n+2}, \dots, \frac{2n}{2n+2}$. Если дополнительно ввести $[\![p_{n+2}]\!] \leftrightharpoons \Delta'_{n+1}$, то за счет различных комбинаций предшествующее τ увеличится на $n+1$, ибо возникнут значения $\frac{1}{2n+2}, \frac{3}{2n+2}, \dots, \frac{2n+1}{2n+2}$, т. е. $\tau\restriction_{\{p_0,\dots,p_{n+2}\}} = \tau\restriction_{\{p_0,\dots,p_{n+1}\}} + n+1 = 2n+2$. Поэтому можно достичь желаемого t, составить X_t и μ_t.

2. $t = 2n + 1$. Аналогично п. 1, только в конце следует взять $[\![p_{n+2}]\!] \leftrightharpoons \Delta'_n \cup \Delta'_{n+1}$. Тогда добавятся $\frac{1}{2n+2}, \frac{3}{2n+2}, \dots, \frac{2n-1}{2n+2}$, но $\frac{2n+1}{2n+2}$ уже никак нельзя будет получить.

Итак, для конкретного t областью определения μ^t служит конечное множество $X^t = \{p_0, p_1, \dots, p_{N(t)}\}$, где $N(t) = \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor + 2$.

Схема сведения основывается на приеме, приведенном в доказательстве теоремы 2. Возьмем $x \in \mathbb{N}$ и запустим перечисление ν множества A; напоминаем, $A_n = \{\nu(1), \dots, \nu(n)\}$. На n-м шаге задаем μ_x на наборе $\{p_0, \dots, p_n\} \cup X^t$ (за исходную меру берется μ^t): если $x \notin A_n$, то текущая (частичная) вероятность при надобности (когда $p_n \notin X^t$) пополняется с помощью, например, $[\![p_n]\!] \leftrightharpoons [\![p_1]\!]$, — это ничего не меняет в ситуации с (не-)улучшаемостью R относительно имеющегося набора; иначе полагаем $[\![p_m]\!] \leftrightharpoons \Delta'_1$ при четном t, либо $[\![p_m]\!] \leftrightharpoons \Delta'_1 \cup \Delta'_2$ при нечетном t (здесь p_m есть переменная с наименьшим индексом, не принадлежащая $\{p_0, \dots, p_{n-1}\} \cup X^t$) – таким образом, R с необходимостью стало улучшаемо (причем в обоих случаях характеристика τ осталась прежней, и мы не вышли за пределы $\mathbb{T}_t$).

Нами указано вычислимое отображение $h' : x, \Phi \mapsto \mu_x(\Phi)$, а по s-m-n теореме из него извлекается вновь вычислимое $h : x \mapsto \ulcorner \mu_x \urcorner$, где $\ulcorner \mu_x \urcorner$ есть код для $\mu_x \in \mathbb{T}_t$. Нетрудно убедиться, h — искомая. □

Следствие 3. *Для любого натурального $k \geqslant 3$ и рационального $i \geqslant 3$ верно:*

1) *не существует алгоритма, который по всякому номеру меры $\mu \in \mathbb{T}_t$ выдает код разрешающей процедуры для MSR^μ;*

2) *не существует алгоритма, который по всякому номеру меры $\mu \in \mathbb{I}_i$ выдает код разрешающей процедуры для MSR^μ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Тривиально из леммы 2.

2) Заметим, доказательство леммы 2 можно модифицировать, изменив рис. 2 и действие на шаге n так, чтобы ее результат оказался применим к $\mathbb{I}_i$ (вместо $\mathbb{K}_k$). Вид нового рисунка следующий:

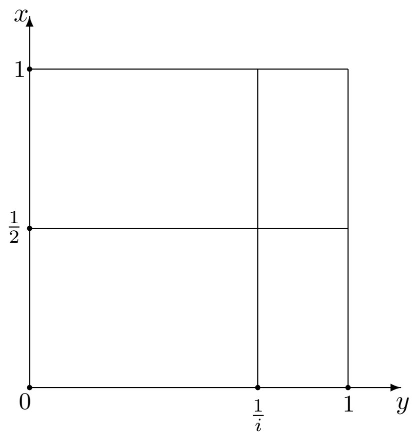

Рис. 3

Здесь отметим точки: $E_0\,(0,0)$, $E_1\,(1,0)$, $E_i\left(\frac{1}{i},0\right)$; $E_0'\,(0,1)$, $E_1'\,(1,1)$, $E_i'\left(\frac{1}{i},0\right)$; $F_0\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $F_1\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $F_i\left(\frac{1}{i},\frac{1}{2}\right)$. Пусть $[\![p_0]\!] \leftrightharpoons [\![F_0E_0'E_1'F_1]\!]$ и $[\![p_1]\!] \leftrightharpoons [\![E_0E_0'E_i'E_i]\!]$. Очевидно, текущее ι есть i. Поскольку $\frac{1}{i} \leqslant \frac{1}{3}$, то каждая из равных площадей $[\![F_0E_0'E_i'F_i]\!]$ и $[\![E_0F_0F_iE_i]\!]$ не превосходит $\frac{1}{i}$. Поэтому введение любой из них в качестве области истинности некоторой переменной не меняет характеристики ι. Итак, на шаге n, если нужно сделать правило R улучшаемым, то можно положить $[\![p_m]\!] \leftrightharpoons [\![F_0E_0'E_i'F_i]\!]$ (остальное так же, как и в лемме 2). $\square$

Значит, для τ и ι не выполнены аналоги следствия 2 и, тем более, теоремы 4.

3. Об арифметической сложности

В заключение бегло коснемся вопроса о положении некоторых введенных нами классов вероятностных мер в арифметической иерархии.

Пусть предикат $T\,(n,x,r)$ истинен, если и только если одноместная частично-вычислимая функция с номером n останавливается на входе x за r шагов; предикат $\mathtt{For}\,(m)$ — если $m \in \gamma\,(\mathrm{For}_{\mathcal{L}})$; а предикат $\mathtt{Taut}\,(m)$ — если m есть код формулы, являющейся тавтологией CL. Разумеется, все они оказываются вычислимы (последний — поскольку пропозициональная классическая логика разрешима).

Функция $\kappa\,(n,l,r) : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ работает по следующей схеме:

- Сначала занумеруем $\{q_1,\ldots,q_m\} = \{p_0,\ldots,p_l\} \cap \mathtt{Fact}$. Параллельно запустим $æ_n$ на всевозможных конъюнкциях из

$$\mathscr{K} \leftrightharpoons \left\{{q_1}^{\varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge {q_m}^{\varepsilon_m} \mid \varepsilon_i \in \{0,1\}\,,\ i = \overline{1,m}\right\}$$

  и отсчитаем r тактов. Если при этом хотя бы на одном элементе не достигнута завершающая конфигурация, полагаем $\kappa\,(n,l,r) = 0$.

- Пусть мы пришли в конечные состояния для всех $K \in \mathscr{K}$. Тогда (по некоторому фиксированному детерминированному алгоритму) для всяких ϕ и ψ из $conj\,(\{p_0,\ldots,p_l\}^* \cap \mathtt{Fact}^*)$ разлагаем формулу $\phi \equiv \psi$ в дизъюнктивную нормальную форму D относительно $\{q_1,\ldots,q_m\}$ и полагаем $\mu\,(\phi \equiv \psi)$ равной сумме результатов вычисления $æ_n$ (воспринимаемых как рациональные числа) на конъюнкциях

K, содержащихся в D. Теперь ϕ и ψ попадают в один класс вероятностной эквивалентности лишь в случае, когда $\mu(\phi \equiv \psi) = 1$. Поэтому можно подсчитать число таких классов, на которые разбиваются элементы $conj(\{p_0, \ldots, p_l\}^* \cap \mathtt{Fact}^*)$.

Эта функция вычислима, причем при $n \in \#[\mathscr{P}_\mathsf{c}]$ и достаточно большом r она правильно выдает текущее количество классов эквивалентности, а при $n \in \#\left[\mathscr{P}_\mathsf{c}^\mathsf{f}\right]$ всегда найдутся натуральные r_0 и l_0 такие, что для любых $l \geqslant l_0$ и $r \geqslant r_0$ верно $\kappa(n,l,r) = \kappa[æ_n]$.

Еще нам понадобятся стандартные преобразования кодов формул:

$$\mathtt{ne}(s) \leftrightharpoons \begin{cases} s, \ \textit{если выполнено } \neg\mathtt{For}(s) \\ \gamma(\neg\phi), \ \textit{если } s = \gamma(\phi) \end{cases},$$

$$\mathtt{co}(s,m) \leftrightharpoons \begin{cases} s, \ \textit{если выполнено } \neg\mathtt{For}(s) \\ m, \ \textit{если выполнено } \mathtt{For}(s) \wedge \neg\mathtt{For}(m) \\ \gamma(\phi \wedge \psi), \ \textit{если } s = \gamma(\phi), \ m = \gamma(\psi) \end{cases},$$

(для дизъюнкции: $\mathtt{di}(m,s)$ — аналогично).

Все эти функции, очевидно, вычислимы (при геделевской нумерации).

Напоминаем, $\Pi^0_r(\Sigma^0_r)$-множество M должно задаваться формулой первого порядка в пренексной нормальной форме, начинающейся с квантора всеобщности (существования), при этом сперва идет r чередующихся блоков кванторов, а затем стоит вычислимый предикат. Легко понять, если $\Phi \equiv \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_m$, где первопорядковым Φ_j соответствуют множества сложности $\Pi^0_{a_j}$ $(\Sigma^0_{a_j})$, то определяемое формулой Φ множество не сложнее, чем Π^0_a (Σ^0_a) для параметра $a = \max\{a_j\}$.

Например, свойство ч.в.ф. с номером n быть полностью определенной, т. е. $æ_n \in \mathscr{F}_\mathsf{c}$, равносильно $\forall x \exists k\, T(n,x,r)$.

Свойство *быть вычислимой рационально-значной мерой* ($æ_n \in \mathscr{P}_\mathsf{c}$):

$$æ_n \in \mathscr{F}_\mathsf{c} \wedge \forall s\, [\mathtt{Taut}(s) \to æ_n(s) = 1] \wedge \\ \wedge \forall s,m\, [\mathtt{Taut}(\mathtt{ne}(\mathtt{co}(s,m))) \to æ_n(s) + æ_n(m) = æ_n(\mathtt{di}(s,m))].$$

Имеем $\forall\exists$-формулу, значит, перед нами Π^0_2-множество.

Свойство *быть «финитной» мерой* ($æ_n \in \mathscr{P}_\mathsf{c}^\mathsf{f}$):

$$æ_n \in \mathscr{P}_\mathsf{c} \wedge \exists k\, \forall r,l\, [\kappa(n,l,r) \leqslant k].$$

Такая запись эквивалентна и $\forall\exists\forall$-формуле, и $\exists\forall\exists$-формуле. В итоге мы получаем Δ^0_3-множество, ибо $\Pi^0_3 \cap \Sigma^0_3 = \Delta^0_3$.

Можно также рассмотреть множества с фиксированными значениями характеристик κ, τ и ι, отвечающих за «финитность» ($\mathbb{K}_k, \mathbb{T}_t, \mathbb{I}_i$); интересно, что это дает Π^0_2-множества. Скажем, $n \in \mathbb{K}_k$ означает

$$n \in \#[\mathscr{P}_\mathsf{c}] \wedge \forall r,l\, [\kappa(n,l,r) \leqslant k] \wedge \exists l,r\, [\kappa(n,l,r) = k]$$

(подобным же образом поступаем с $\mathbb{T}_t$ и $\mathbb{I}_i$). Тем не менее, как мы убедились в предыдущем разделе, знание τ и ι (в отличие от κ) не позволяет, вообще говоря, автоматически порождать разрешающую процедуру для множества специфичных правил.

Замечание 3. Пусть дано непустое $S \subseteq \mathscr{F}_{\mathsf{c}}$. Тогда $\#\,[\mathscr{F}_{\mathsf{c}}] \leqslant_m \#\,[S]$. Действительно, возьмем произвольную $g \in S$ и положим $h\,(n, x) \leftrightharpoons \text{æ}_n\,(x) \cdot 0 + g\,(x)$. Очевидно, области определения h и g совпадают. Далее по s-m-n-теореме найдется вычислимая $\rho : n \to \to \ulcorner h_n \urcorner$, где $h_n\,(x) \leftrightharpoons h\,(n, x)$. Ясно, что $\rho\,(n)$ будет номером для g (а потому принадлежать $\#\,[S]$) в случае $n \in \#\,[\mathscr{F}_{\mathsf{c}}]$, иначе $\rho\,(n)$ — номер не всюду определенной функции (по построению). Итак, m-сводимость установлена. Отсюда, коль скоро Π^0_2-полнота $\#\,[\mathscr{F}_{\mathsf{c}}]$ хорошо известна, то и все рассмотренные выше Π^0_2-множества Π^0_2-полны.

Заключение

Освещен комплекс центральных проблем, характеризующих алгоритмическую сторону И-С объяснений, а значит, максимальной специфичности. Помимо прочего, доказана неразрешимость некоторых наиболее общих задач по выявлению максимально специфичных правил и вероятностных мер, для которых совокупность всех специфичных правил вычислима; разрешимость множества максимально специфичных правил в условиях неких естественных «финитарных» ограничений; изучена возможность равномерного нахождения разрешающих процедур при указанных ограничениях, когда заданы различные параметры, отвечающие за «финитарность»; проведен анализ сложности определенных нами подклассов мер в арифметической иерархии. Затрагиваемая тематика связана как с эффективным применением И-С подхода на практике (для моделирования в экономике, медицине, биоинформатике и т. п. — см., например, [5; 12; 13]), так и с его теоретическими основаниями, базирующимися на современных тенденциях в области синтеза логики и вероятности.

Автор выражает благодарность П. Е. Алаеву за полезное обсуждение и ценные замечания, способствовавшие улучшению изложения материала.

Список литературы

1. *Сперанский С. О.* О логической непротиворечивости вероятностных предсказаний // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 99–115.

2. *Смердов С. О., Витяев Е. Е.* Синтез логики, вероятности и обучения: формализация предсказания // Сибирские электронные математические известия. 2009. Т. 9. С. 340–365.

3. *Vityaev E. E., Smerdov S. O.* On the Problem of Prediction // Knowledge Processing and Data Analysis: KONT/KPP 2007, LNAI 6581 / Eds. K. E. Wolff, D. E. Palchunov et al. Springer, 2011. P. 280–296.

4. *Vityaev E. E.* The Logic of Prediction // Mathematical Logic in Asia 2005, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference. August 16–19, Novosibirsk, Russia / Eds. S. Goncharov,

R. Downey, H. Ono. World Scientific Publisher, 2006. P. 263–276.

5. *Vityaev E. E., Kovalerchuk B. Ya.* Relational Methodology for Data Mining and Knowledge Discovery // Intelligent Data Analysis, Special Issue on Philosophies and Methodologies for Knowledge Discovery and Intelligent Data Analysis / Eds. K. Rennolls, E. Vityaev. IOS Press, 2008. Vol. 12 (2). P. 189–210.

6. *Витяев Е. Е.* Извлечение знаний из данных. Компьютерное познание. Модели когнитивных процессов. Новосибирск, 2006.

7. *Goncharov S. S., Ershov Yu. L., Sviridenko D. I.* Semantic Programming // Information Processing '86, Proceedings of the IFIP 10$^{\text{th}}$ World Computer Congress. Dublin, Ireland, September 1–5, 1986. North-Holland, 1986. P. 1093–1100

8. *Hempel C. G.* Maximal Specificity and Lawlikeness in Probabilistic Explanation // Philosophy of Science. 1968. Vol. 35. No. 2. P. 116–133.

9. *Hempel C. G.* Deductive-Nomological versus Inductive-Statistical Explanation // Minnesota Studies in the Philosophy of Science / Eds. H. Feigl, G. Maxwell. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1962. Vol. 3. P. 98–169.

10. *Scott D., Krauss P.* Assigning Probabilities to Logical Formulas // Aspects of Inductive Logic / Eds. J. Hintikka, P. Suppes. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966. P. 219–264.

11. *Halpern J. Y.* An Analysis of First-Order Logics of Probability // Artificial Intelligence. 1990. No. 46. P. 311–350.

12. *Kovalerchuk B. Ya., Vityaev E. E., Ruiz J. F.* Consistent and Complete Data And «Expert» Mining in Medicine // Medical Data Mining and Knowledge Discovery. Springer, 2001. P. 238–280.

13. *Vityaev E. E., Kovalerchuk B. Ya.* Data Mining for Financial Applications // Data Mining and Knowledge Discovery Handbook: A Complete Guide for Practitioners and Researchers / Eds. O. Maimon, L. Rokach. Springer, 2005. P. 1203–1224.

Материал поступил в редколлегию 04.09.2010

Адрес автора

СПЕРАНСКИЙ Станислав Олегович

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: katze.tail@gmail.com