Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

E. G. Sheshukov, On a case of the solution of problems of nonlinear filtration with initial gradient,
Trudy Sem. Kraev. Zadacham, 1980, Issue 17, 248–254

https://www.mathnet.ru/eng/kukz259

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.89
December 13, 2025, 01:30:36

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 532.546

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Е. Г. Шешуков

В работе [1] введен специальный закон фильтрации, позволяющий сводить исходные задачи нелинейной фильтрации с начальным градиентом к краевым задачам для аналитической функции. Автор [1] ищет решение соответствующей краевой задачи методом разложения в бесконечные ряды. В настоящей работе на примере решения задачи фильтрации к системе стоков показывается, как можно в таких случаях строить решение методом краевых задач. Исследуется влияние физических параметров на форму границ застойных зон.

1. Постановка задачи. В горизонтальном однородном нефтяном или водоносном пласте постоянной мощности имеются две галереи нагнетательных скважин, расположенных вдоль осей $x = -L_1$ и $x = L_2$. Система координат x, y находится в горизонтальном сечении пласта. Интенсивность галерей обозначена соответственно через q_1 и q_2 (дебиты единицы длины). Пласт эксплуатируется при $x = 0$ равномерной батареей эксплуатационных скважин, дебиты которых $2Q$, где $Q = (q_1 + q_2)\,T$, $2T$ — расстояние между центрами соседних скважин батареи. Пусть $L_i \gg T$, $i = 1, 2$, $r \ll T$, где r — радиус эксплуатационной скважины. При таких условиях математическое исследование фильтрации достаточно проводить, заменяя батарею эксплуатационных скважин равномерной системой стоков и считая нагнетательные галереи расположенными на бесконечности, т. е. $r = 0$, L_1 и $L_2 = \infty$. Характерным элементом такого течения является полоса ширины T (рис. 1). Здесь сток расположен в точке E, в бесконечно удаленных точках A и D скорости фильтрации соответственно равны $v_A = q_1$, $v_D = q_2$.

Фильтрация в пласте подчиняется нелинейному закону [1]

$$f(v) = |\operatorname{grad} h| = \sqrt{\lambda_0^2 + (v/\lambda_1)^2}, \tag{1.1}$$

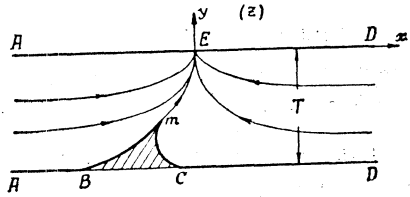

Рис. 1.

где h — напор, v — скорость фильтрации, λ_0 — начальный градиент напора, λ_1 — постоянная размерности скорости. При $|\operatorname{grad} h| \leqslant \lambda_0$ в плоскости течения образуются застойные зоны (см. *BmCB* на рис. 1), которые требуется определить.

Заметим, что при $Q_1 = Q_2$ и при $Q_1 = 0$ (или $Q_2 = 0$) исходная задача превращается в детально рассмотренные ранее задачи для закона фильтрации $f = \lambda_0 + v/\lambda_1$ [2].

2. Основные уравнения. Сведение к краевой задаче. Плоская устновившаяся фильтрация несжимаемой жидкости, не следующая закону Дарси, описывается системой уравнений [3]

$$\operatorname{grad} h = -\frac{f(v)}{v}\vec{v}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{2.1}$$

После перехода к безразмерным переменным: $u = v/\lambda_0\lambda_1$, $\varphi = -h/\lambda_0 T$, $\psi = \psi_0/\lambda_0\lambda_1 T$, $\mu = x/T$, $\nu = y/T$, ψ_0 — функция тока, система (2.1) при законе (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}. \tag{2.2}$$

С помощью преобразования видоизмененного годографа скорости уравнения (2.2) линеаризуются

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \operatorname{cth}^2 s\frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial s} = -\operatorname{cth}^2 s\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{2.3}$$

где $s = \operatorname{Arsh} u$, θ — аргумент вектора скорости.

Каноническая система (2.3) всесторонне исследована Г. А. Домбровским [4]. Ее решениями являются функции

$$\varphi = -\Phi(\theta, s) + \operatorname{cth} s\frac{\partial\Phi}{\partial s},$$

$$\psi = -\Psi(\theta, s) + \operatorname{th} s\frac{\partial\Psi}{\partial s}, \tag{2.4}$$

где $\Phi(\theta, s)$ и $\Psi(\theta, s)$ — сопряженно гармонические функции.

Области течения G_σ ($\sigma = \mu + i\nu$) в плоскости видоизмененного годографа скорости соответствует полуполоса G_χ ($\chi = \theta + is$) шириной π (рис. 2). Параметры $s_A = \operatorname{Arsh} Q_1$,

$s_D = \operatorname{Arsh} Q_2$, где $Q_1 = q_1/\lambda_0\lambda_1$, $Q_2 = q_2/\lambda_0\lambda_1$. Будем считать $\psi = 0$ на границе $ABmCD$. Тогда на AE функция $\psi = Q_1$ на DE $\psi = -Q_2$.

В области $G\chi$ ищется аналитическая функция $W(\chi) = \Phi(\theta, s) + i\Psi(\theta, s)$ по значению ее мнимой части на границе, вытекающему из второго соотношения (2.4):

$$\begin{aligned}
&\Psi = 0 && \text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ s = 0, \\
&\Psi = R_1 \operatorname{sh} s && \text{при } \theta = 0 \quad 0 \leqslant s \leqslant s_A, \\
&\Psi = -Q_1 && \text{при } \theta = 0, \quad s_A < s < \infty, \\
&\Psi = R_2 \operatorname{sh} s && \text{при } \theta = \pi, \quad 0 \leqslant s < s_D, \\
&\Psi = Q_2 && \text{при } \theta = \pi, \quad s_D < s < \infty,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

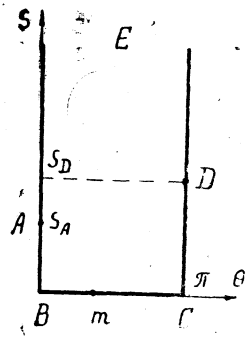

Рис. 2.

где R_1 и R_2 — постоянные интегрирования, определяемые ниже из физических соображений.

Связь области годографа $G\chi$ с физической областью течения G_σ осуществляется по формуле

$$d\sigma = \frac{e^{i\theta}}{u}\left[\frac{u\,d\varphi}{\sqrt{1+u^2}} + i\,d\psi\right]$$

или после интегрирования, следуя [4],

$$\sigma = \sigma_0 - e^{i\theta}\left[\frac{1}{\operatorname{sh} s}\operatorname{Im} W'(\chi) - \frac{i}{\operatorname{ch} s}\operatorname{Re} W'(\chi)\right]. \tag{2.6}$$

Таким образом, для решения задачи необходимо построить аналитическую функцию $W(\chi) = \Phi(\theta, s) + i\Psi(\theta, s)$. Ниже для ее определения применяется метод краевых задач, позволяющий находить аналитическое решение в простой форме.

3. Решение краевой задачи. Аналитическая функция $W(\chi)$ ищется в параметрической форме $W = W(\zeta)$, $\chi = \chi(\zeta)$. Для этого с помощью функции

$$\chi(\zeta) = \pi/2 + \arcsin\zeta = \pi + i\ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \tag{3.1}$$

область годографа конформно отображается на вспомогательную полуплоскость G_ζ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 3). Точкам A и D в полуплоскости ζ соответствуют координаты $\zeta = -a$ и $\zeta = d$, где $a = \operatorname{ch} s_A = \sqrt{1 + Q_1^2}$, $d = \operatorname{ch} s_D = \sqrt{1 + Q_2^2}$.

Далее записывается $W(\zeta) = W_1(\zeta) + W_2(\zeta)$, где аналитические функции $W_1(\zeta) = \Phi_1(\xi, \eta) + i\Psi_1(\xi, \eta)$ и $W_2(\zeta) = \Phi_2(\xi, \eta) + i\Psi_2(\xi, \eta)$ определяются в G_ζ по условиям на оси $\eta = 0$:

$\Psi_1 = 0$ при $-a < \xi < d$, $\Psi_1 = -Q_1$ при $-\infty < \xi < -a$, $\Psi_1 = Q_2$ при $d < \xi < \infty$ и $\Psi_2 = 0$ при $-\infty < \xi < -a$, $-1 < \xi < 1$, $d < \xi < \infty$, $\Psi_2 = R_1 \operatorname{sh} s(\xi) = R_1 \sqrt{\xi^2 - 1}$ при $-a < \xi < -1$, $\Psi_2 = R_2 \operatorname{sh} s(\xi) = R_2 \sqrt{\xi^2 - 1}$ при $1 < \xi < d$. Легко заметить, что $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ будет удовлетворять условиям (2.5).

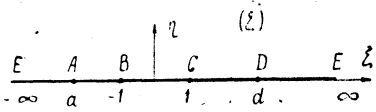

Рис. 3.

Функция $W_1(\zeta)$ строится методом особых точек [5], если поместить в точки $\xi = -a$, $\eta = 0$ и $\xi = d$, $\eta = 0$ стоки обильности $2Q_1$ и $2Q_2$,

$$W_1(\zeta) = -\frac{Q_1}{\pi} \ln(\zeta + a) - \frac{Q_2}{\pi} \ln(\zeta - d) + iQ_2. \tag{3.2}$$

Применяя интеграл Шварца для полуплоскости [6], восстанавливаем функцию $W_2(\zeta)$

$$W_2(\zeta) = \frac{R_1}{\pi} \int_{-a}^{-1} \frac{\sqrt{t^2 - 1}\, dt}{t - \zeta} + \frac{R_2}{\pi} \int_{1}^{d} \frac{\sqrt{t^2 - 1}\, dt}{t - \zeta} + \text{const}.$$

После вычисления интегралов получаем

$$W_2(\zeta) = \frac{R_1}{\pi} [\zeta N(a) + \sqrt{\zeta^2 - 1} M(\zeta, a)] + \frac{R_2}{\pi} [\zeta N(d) - \sqrt{\zeta^2 - 1} M(\zeta, d)] + \text{const}, \tag{3.3}$$

где

$$N(p) = \ln(p + \sqrt{p^2 - 1}), \quad M(\zeta, q) = \ln\left(\frac{\zeta q \mp \sqrt{(\zeta^2 - 1)(q^2 - 1)} \pm 1}{\zeta \pm q}\right)$$

при $q = a$ берутся верхние знаки, при $q = d$ — нижние знаки.

Формулы (2.6), (3.1) — (3.3) позволяют найти решение исходной задачи.

4. Определение границы застойной зоны. Обсуждение результатов расчета. Постоянная σ_0 определяется из условия, что сток расположен в начале координат. Устремляя ζ к бесконечности ($s \to \infty$), из (2.6) получим $\sigma \to \sigma_0$. Следовательно, $\sigma_0 = 0$.

Для нахождения границы застойной зоны следует воспользоваться формулой (2.6). Так как на границе застойной зоны $\psi = 0$, $s = 0$, а также $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0$, то, раскрывая неопределенность в (2.6), получим формулу

$$\sigma = ie^{i\theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial s} \right)_{s=0}. \tag{4.1}$$

По формулам (3.1) — (3.3) определяется функция

$$\frac{dW}{d\chi}=\frac{dW}{d\zeta}\Big/\frac{d\chi}{\partial\zeta}:$$

$$\frac{dW}{d\chi}=\frac{i\sqrt{\zeta^2-1}}{\pi}\left[\frac{Q_1(1+R_1)}{\zeta+a}+\frac{Q_2(1-R_2)}{\zeta-d}-R_1s_A-R_2s_D\right]-$$

$$-\frac{i\zeta}{\pi}\left[R_1\ln\frac{1+a\zeta+\sqrt{(\zeta^2-1)(a^2-1)}}{\zeta+a}-\right.$$

$$\left.-R_2\ln\frac{d\zeta-1+\sqrt{(\zeta^2-1)(d^2-1)}}{\zeta-d}\right],$$

из которой

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=0}=-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi}\left[\frac{Q_1(1+R_1)}{\xi+a}+\frac{Q_2(1-R_2)}{\xi-d}-R_1s_A-R_2s_D\right]-$$

$$-\frac{R_1\xi}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{Q_1\sqrt{1-\xi^2}}{1+a\xi}+\alpha\right)+\frac{R_2\xi}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{Q_2\sqrt{1-\xi^2}}{1-\xi d}+\beta\right),\quad(4.2)$$

где $-1<\xi=-\cos\theta<1$; $\alpha=0$ при $1+a\xi>0$; $\alpha=\pi$ при $1+a\xi<0$; $\beta=0$ при $1-\xi d>0$; $\beta=\pi$ при $1-\xi d<0$.

Смешанная производная $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial s}$ при $s=0$ вычисляется по формуле

$$\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial s}\right|_{s=0}=\frac{d\xi}{d\theta}\frac{d}{d\xi}\left(\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=0}\right)=\sin\theta\frac{d}{d\xi}\left(\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=0}\right).\quad(4.3)$$

Входящие в решение постоянные R_1 и R_2 определяются из условий, что при обходах точек A и D в области годографа $G\chi$ функция $\nu(\theta,\ s)$ получает приращение, равное 1, т. е.

$$\nu_{AE}-\nu_{AB}=1,\quad \nu_{DE}-\nu_{CD}=1.\quad(4.4)$$

Тогда, на основании формул (2.6) с учетом (2.5), из соотношений (4.4) имеем $R_1=-1$, $R_2=1$.

Параметрические уравнения границы застойной зоны, как следует из (4.1) и (4.3), записываются в виде

$$\mu=-\sin\theta\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=0}-\sin\theta\cos\theta\frac{d}{d\xi}\left(\left.\frac{\partial\psi}{\partial s}\right|_{s=0}\right),$$

$$\nu=\cos\theta\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=0}-\sin^2\theta\frac{d}{d\xi}\left(\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=0}\right),$$

$\xi=-\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Учитывая (4.2), получаем простые формулы, не имеющие квадратур;

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \frac{Q_1 + a}{Q_2 + d} - \frac{\cos^2\theta}{\pi}\left(\frac{Q_1}{a - \cos\theta} - \frac{Q_2}{d + \cos\theta}\right),$$

$$\nu = -\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{Q_1 \sin\theta}{1 - a\cos\theta} + \operatorname{arctg}\frac{Q_2 \sin\theta}{1 + d\cos\theta} + \alpha + \beta\right) - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\pi}\left(\frac{Q_1}{a - \cos\theta} - \frac{Q_2}{d + \cos\theta}\right), \tag{4.5}$$

где $a = \sqrt{1 + Q_1^2}$, $d = \sqrt{1 + Q_2^2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

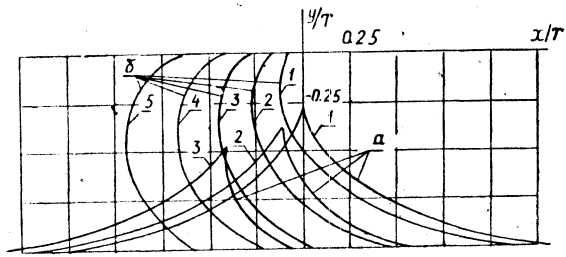

Рис. 4.

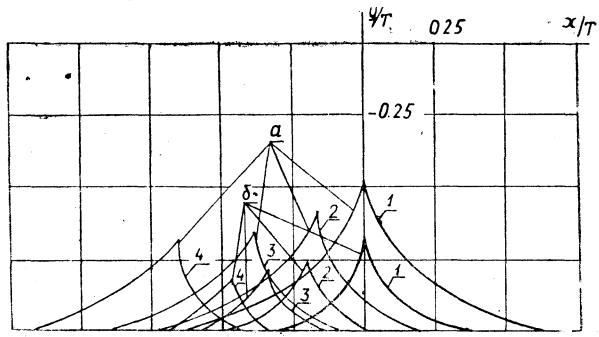

Рис. 5.

Для иллюстрации влияния параметров Q_1 и Q_2 на форму границы застойной зоны проведены по формулам (4.5) расчеты для следующих вариантов: 1. $Q_2 = Q_1 = 0{,}5$. 2. $Q_2 = 2Q_1 = 1$, 3. $Q_2 = 6Q_1 = 3$ (кривые „*а*“ рис. 4); 1. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0{,}5$, 2. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1$, 3. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 2$, 4. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 4$, 5. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 10$ (кривые „*б*“ на рис. 4); 1. $Q_2 = Q_1 = 1$, 2. $Q_2 = 2Q_1 = 2$, 3. $Q_2 = 4Q_1 = 4$, 4. $Q_2 = 10$ $Q_1 = 10$ (кривые „*а*“ на рис. 5); 1. $Q_2 = Q_1 = 2$, 2. 2. $Q_2 = 2Q_1 = 4$, 3. $Q_2 = 3Q_1 = 6$, 4. $Q_2 = 5Q_1 = 10$ (кривые „*б*“ на рис. 5). На рис. 6 приведены зависимости площади застойной зоны *BmCB* (см. рис. 1) от параметров Q_1 и Q_2. Расчеты проводились по формуле

$$s = \int_0^{\pi} (1 + \nu)\, \mu'(\theta)\, d\theta,$$

где $\mu(\theta)$, $\nu(\theta)$, $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ — параметрические уравнения границы застойной зоны.

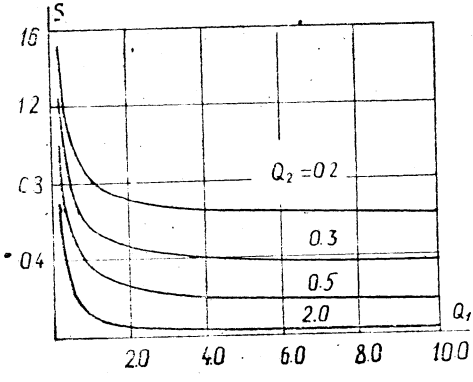

Рис. 6.

Результаты расчетов показывают, что увеличение Q_2 ведет:

1) при $Q_1 = Q_2$ — к уменьшению симметричной застойной зоны,

2) при $Q_2 > Q_1$ — к уменьшению застойной зоны и ее смещению в сторону потока с меньшим дебитом,

3) при $Q_2 < Q_1$ — к уменьшению застойной зоны и ее смещению в сторону потока с большим дебитом до симметричного положения при $Q_2 = Q_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панько С. В. О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4, с. 177—181.
2. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., „Наука“, 1975.
3. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. — ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, с. 33—52.
4. Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. М., „Наука“, 1964.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., ГИФМЛ, 1961.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1973.

Доложено на семинаре 26 января 1978 г.