V. G. Zhuravlev, The trace of Hecke operators of quaternion quadratic spaces,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 6, 149–166

1989 АЛГЕБРА И АНАЛИЗ том 1, вып. 6

В. Г. Журавлев

СЛЕД ОПЕРАТОРОВ ГЕККЕ КВАТЕРНИОННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Вычисляется след базисных операторов Гекке полной ортогональной группы определенной рациональной кватернионной алгебры квадратного дискриминанта относительно максимальных целых решеток.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

Среди задач теории чисел, стимулировавших ее возникновение и развитие, выделяется задача о представлениях целых чисел квадратичными формами. Эта задача, и даже более общая задача представлений квадратичных форм, состоит в изучении свойств уравнений вида

$$ {}^tXQX = R \quad (X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})), $$

где Q, R — симметрические матрицы размеров m, n соответственно, $M_{m,n}(\mathbb{Z})$ — множество целочисленных $m \times n$-матриц и ${}^tX$ — транспонированная для X матрица. Если матрица Q положительно определена, то число $N(R) = N(Q; R)$ решений такого матричного уравнения конечно.

В простейшем случае представления чисел суммой двух квадратов, т. е. в случае, когда $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $n = 1$, согласно теореме Ферма для любого R из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, имеет место формула

$$ N(R) = N(1) \sum_{d \mid R} \chi(d), $$

где $\chi(R)$ — характер Дирихле, задаваемый условиями: $\chi(R) = 1, -1$ или 0 соответственно для $R \equiv 1, 3 \pmod 4$ или $R \equiv 0 \pmod 2$. Отсюда, как нетрудно проверить, вытекает формальное тождество — эйлерово разложение

$$ \sum_{R=1}^{\infty} \frac{N(R)}{R^s} = N(1) \prod_p \left(1 - \frac{1+\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}, $$

Ключевые слова: операторы Гекке, тета-ряды, кватернарные квадратичные формы, кватернионные алгебры.

где p пробегает все простые числа. Из теории модулярных форм хорошо известно, что существование эйлерова разложения такого типа равносильно тому, что тета-ряд

$$\theta^1(z, Q) = \sum_{R=0}^{\infty} N(Q; R) \exp(2\pi i R z) \quad (\operatorname{Im} z > 0)$$

является собственной функцией операторов Гекке $T_1(p)$ симплектической группы Sp_1:

$$\theta^1(z, Q) \mid T_1(p) \overset{\text{опр}}{=} \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} \theta^1\left(\frac{z+a}{p}, Q\right) + \chi(p)\,\theta^1(pz, Q) =$$
$$= (1 + \chi(p)) \cdot \theta^1(z, Q).$$

Операторы $T_1(p)$ вместе с некоторыми «скалярными» операторами порождают кольцо всех операторов Гекке T_1 группы Sp_1, и, следовательно, $\theta^1(z, Q)$ — их собственная функция. Этим обстоятельством обусловлено применение операторов Гекке к изучению мультипликативных свойств функций $N(Q; R)$.

В общем случае также можно ввести тета-ряды $\theta^n(Z, Q)$ произвольного рода n, определенные на верхней полуплоскости Зигеля H_n, как производящие функции для $N(Q; R)$. Они являются зигелевыми модулярными формами рода n, и для них естественным образом можно определить операторы Гекке T_1 симплектической группы Sp_n, переводящие модулярные формы в себя. К настоящему времени инвариантность подпространств тета-рядов относительно действия операторов T_1 доказана А. Н. Андриановым [1—3] в самом общем случае тета-рядов произвольного рода со сферическими коэффициентами определенных и неопределенных квадратичных форм от четного числа переменных. Метод А. Н. Андрианова основан на двойственности симплектической группы Sp_n и полной линейной группы GL_n. Иной подход, позволяющий связать действия на тета-ряды операторов Гекке T_1 группы Sp_n и операторов Гекке T_0 ортогональной группы $O_m = O(Q)$, предложен в [4, 5].

Суть его можно проиллюстрировать на примере тета-рядов $\theta^1(z, Q)$ положительно определенных матриц Q второго порядка. Для простоты предположим, что дискриминант D бинарной квадратичной формы q с матрицей Q равен дискриминанту мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Пусть $[M] \mapsto [q_M]$ — взаимно однозначное соответствие между классами $[M]$ подобных идеалов M максимального порядка поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ и собственными классами $[q_M]$ бинарных квадратичных форм q_M дискриминанта D. Положим $\theta^1(z, [M]) = \theta^1(z, Q_M)$ для матрицы Q_M квадратичной формы q_M и возьмем простое чило p, не делящее D, для которого q_M расщепляется над полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Тогда

$$\theta^1(z, [M]) \mid T_1(p) = \theta^1(z, [M \cdot \mathfrak{p}_1]) + \theta^1(z, [M \cdot \mathfrak{p}_2]),$$

где $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ — неассоциированные идеалы с нормой p. С другой стороны, операторы Гекке $T_0(p)$ ортогональной группы $O_2 = O(Q)$ некоторой фиксированной матрицы Q дискриминаната D действуют на векторном пространстве с базисом из классов идеалов и при этом $[M] \mid T_0(p) = [M \cdot \mathfrak{p}_1] + [M \cdot \mathfrak{p}_2]$. Поэтому мы можем записать

$$\theta^1(z, [M]) \mid T_1(p) = \theta^1(z, [M] \mid T_0(p)),$$

и в этом состоит двойственность между операторами Гекке групп Sp_1 и O_2. Подробно тета-ряды рода $n = 1, 2$ бинарных квадратичных форм изучены в [6].

В настоящей работе рассматриваются кватернарные квадратичные формы $q = q_L$, отвечающие максимальным целым решеткам L из алгебры определенных рациональных кватернионов $\mathfrak{A}$ квадратного дискриминанта $D = d^2$. Операторы Гекке $T(n_1, n_2) = T_0(n_1, n_2)$ ортогональной группы $O_4 = O(\mathfrak{A})$ нумеруются парами натуральных чисел n_1, n_2, что в терминах элементарных делителей соответствует набору $(1, n_1; n_1 n_2, n_2)$. Таким же образом нумеруются операторы Гекке $T_1(n_1, n_2)$ симплектической группы Sp_2, и в [5] определен изоморфизм $\omega_{2,2}$ колец этих операторов, обладающий свойством: если T_0 — оператор группы O_4, а $T_1 = \omega_{2,2}(T_0)$ — отвечающий ему оператор группы Sp_2, то образ тета-ряда $\theta^2(Z, Q)$ для матрицы $Q = Q_L$ квадратичной формы q_L под действием оператора T_1 на Z совпадает с образом тета-ряда под действием T_0 на квадратичную форму q_L. Таким образом, изучение действия операторов T_1 на тета-ряды сводится к изучению действия операторов T_0 или к арифметике ортогональной группы O_4. Операторы $T(n_1, n_2)$ играют по отношению к тета-рядам рода два ту же роль, что матрицы Эйхлера для тета-рядов рода один [7, 8]. Следуя аналогии, мы вычислим след $\mathrm{Tr}(T(n_1, n_2))$ операторов Гекке $T(n_1, n_2)$ на пространстве тета-рядов $\theta^2(Z, Q_1), \ldots, \theta^2(Z, Q_H)$ матриц Q_i всех представителей квадратичных форм дискриминанта $D = d^2$.

Значение формулы следа состоит в следующем. Для $n_1 = n_2 = 1$ след $\mathrm{Tr}(T(1, 1))$ равен числу классов H. Далее, в [5] описано ядро гомоморфизма $\omega_{2,1}$ кольца операторов Гекке группы O_4 в кольцо группы Sp_1. Если при этом в ядре $\mathrm{Ker}\,\omega_{2,1}$ найдется оператор T_0 с ненулевым следом, то тета-ряды рода один $\theta^1(z, Q_1), \ldots, \theta^1(z, Q_H)$ линейно зависимы. Применение следа к исследованию количеств представлений $N(Q_i; R)$ состоит в том, что он дает удобный алгоритм вычисления собственных значений операторов Гекке группы Sp_n, где n — размерность матриц R, на пространстве тета-рядов $\theta^n(Z, Q_1), \ldots, \theta^n(Z, Q_H)$, а значит, позволяет исследовать мультипликативные свойства функций $R \mapsto N(Q_i, R)$. Среди других приложений отметим еще возможность на основе формулы следа получать теоремы о порождаемости некоторых пространств зигелевых модулярных форм тета-рядами (ср. с [8]).

Для формулировки основных результатов введем необходимые обозначения. Положим для натуральных чисел $n_1, n_2, m \in \mathbb{N}$

$$B(m, n_i') = \sum_{|t| < 2\sqrt{\iota^\nu n_i/m}} A(mt, n_i'), \tag{1.1}$$

$$B(m; n_1', n_2') = \sum_{\substack{|t_i| < 2\sqrt{\iota^\nu n_i/m} \\ (i = 1, 2)}}{}' A(mt_1, n_1') A(mt_2, n_2'), \tag{1.2}$$

где штрих означает, что $t_1^2 \iota^\nu n_2 = t_2^2 \iota^\nu n_1$, при этом $(\iota^\nu n_1, \iota^\nu n_2) = \iota^\nu \cdot (n_1, n_2)$ — образ пары (n_1, n_2) относительно действия (4.4) элемента ι^ν группы I_A из п. 2.2, $n_i' = m\iota^\nu n_i$ и

$$A(t_i, n_i') = \varkappa(\widetilde{\Delta}_i) \frac{h(\widetilde{\Delta}_i)}{w(\widetilde{\Delta}_i)} \varphi(f(b); \chi) \Phi(f'), \tag{1.3}$$

где $\Delta_i = t_i^2 - 4n_i' = f_i^2\tilde{\Delta}_i$, $\tilde{\Delta}_i$ — дискриминант мнимого квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta_i})$, $h(\tilde{\Delta}_i)$ и $w(\tilde{\Delta}_i)$ — число классов идеалов и единиц этого поля, $\varphi(\cdot;\ \chi)$ и $\Phi(\cdot)$ — мультипликативные функции (6.16), $f_i = f(b) f(d) f'$ — разложение на множители такое, что в $f(b)$ входят все степени простых $p \mid b$, где $b = b_i$ — наибольшее целое число с условием $b^2 \mid (t_i^2, n_i')$, и $p \not\mid d$, а в $f(d)$ входят лишь степени простых $p \mid d$,

$$\varkappa(\Delta) = \prod_{p \mid d} \left(1 - \left\{\frac{\Delta}{p}\right\}\right), \tag{1.4}$$

где $\{\div\}$ — модифицированный символ Лежандра из п. 6.2; и пусть

$$A(t;\ n_1,\ n_2) = \varkappa(\tilde{\Delta}) \frac{h(\tilde{\Delta})}{w(\tilde{\Delta})} \sum_{\substack{\delta \mid f \\ (\delta,\, d) = 1}} \sigma(n_1,\ n_2;\ d(\delta))\, \varphi(\delta;\ \chi), \tag{1.5}$$

при этом $\Delta = t^2 - 4n_1n_2 = f^2 \cdot \tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}$ — дискриминант поля $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$, $d(\delta) = (b, f/\delta)$, где b — наибольшее целое число с условием $b^2 \mid (t^2, n_1n_2)$, и $\sigma(\cdot)$ — функция (7.5). Наконец, пусть $T(n_1, n_2)$ — оператор Гекке группы $O_4 = O(\mathfrak{A})$, определенный в п. 4.1.

В этих обозначениях имеет место

Теорема 1.1. *След оператора Гекке $T(n_1, n_2)$ выражается формулой*

$$\mathrm{Tr}(T(n_1,\ n_2)) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} \mathrm{Tr}_j^+(T(n_1,\ n_2)) + \mathrm{Tr}^-(T(n_1,\ n_2)), \tag{1.6}$$

при этом

$$\mathrm{Tr}_1^+(T(n_1,\ n_2)) = 2^{\max(\rho(n_1,\, n_2),\, 1) - e} W^2 \text{ или } 0 \tag{1.7}$$

в зависимости от того, является ли n_1n_2 квадратом целого числа, состоящего из степеней простых чисел $p \mid d$, или нет, где $\rho(n_1, n_2)$ — количество простых p, не делящих d и входящих в n_1 и n_2 в разных степенях, e — количество различных простых делителей d, $W = \varphi(d)/24$ и φ — функция Эйлера;

$$\mathrm{Tr}_2^+(T(n_1,\ n_2)) = 2^{1-e}\delta(n_1,\ n_2)\, W \sum_{m \mid d} \sum_{\nu} (\varepsilon_d(n_2') B(m,\ n_1') + \varepsilon_d(n_1') B(m, n_2')), \tag{1.8}$$

где во внутренней сумме суммирование ведется по всем элементам ι^ν из фактор-группы $I_A/\{n_1, n_2\}$ п. 8.1, *$\delta(n_1, n_2) = 1$ или $1/2$ соответственно для $n_1 \neq n_2$ или $n_1 = n_2$, $\varepsilon_d(n) = 1$, если n — квадрат целого числа, состоящего из степеней простых $p \mid d$, и $\varepsilon_d(n) = 0$ в противном случае;*

$$\mathrm{Tr}_3^+(T(n_1,\ n_2)) = 2^{-e} \sum_{m \mid d} \sum_{\nu} \left(B(m,\ n_1')\, B(m,\ n_2') - \frac{1}{2} B(m;\ n_1',\ n_2')\right) \tag{1.9}$$

для $n_1 \neq n_2$, и

$$\mathrm{Tr}_3^+(T(n,\ n)) = 2^{-1-e} \sum_{m \mid d} B(m,\ mn)^2; \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Tr}^-(T(n_1,\ n_2)) = \varepsilon(n_1n_2)\, \sigma(n_1, n_2;\ \sqrt{n_1n_2})\, 2^{\rho(n_1,\, n_2)} W + 2^{\rho(n_1,\, n_2) - 1} \sum_{|t| < 2\sqrt{n_1n_2}} A(t;\ n_1,\ n_2), \tag{1.11}$$

где $\varepsilon(n) = 1$, если n — квадрат целого числа, и $\varepsilon(n) = 0$ в остальных случаях.

Согласно предложениям 2.1 и 2.2, операторы $T(n_1, n_2)$ действуют на векторном пространстве L_2 размерности, равной числу классов H максимальных целых решеток из $\mathfrak{A}$ дискриминанта $D = d^2$ относительно полной ортогональной группы $O_{\mathbf{Q}}(\mathfrak{A})$. Для $n_1 = n_2 = 1$ оператор $T(1, 1)$ единичный, и поэтому его след равен H. Таким образом, из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.1. *Для числа классов H имеет место равенство $H = H^+ + H^-$, где*

$$H^+ = 2^{1-e}\left(W^2 + WB(1, 1) + \frac{1}{4}\sum_{m \mid d} B(m, m)^2\right) \tag{1.12}$$

и

$$H^- = W + \frac{1}{2}B(1, 1). \tag{1.13}$$

В работе широко использованы многочисленные факты теории кватернионных алгебр, подробно изложенные, например, в [7—9].

Обозначения. $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — как обычно, кольцо целых рациональных чисел и поля рациональных, вещественных и комплексных чисел соответственно. Для простого p $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел и $\mathbb{Z}_p$ — его целое подкольцо. Если R — некоторое кольцо с единицей, то $R^\times$ — группа обратимых элементов из R и $M_n(R)$ — кольцо $n\times n$-матриц с коэффициентами из R.

§ 2. Кватернионные алгебры, решетки и идеалы

2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ — определенная кватернионная алгебра над полем $\mathbb{Q}$, $N(\alpha) = \alpha\cdot\alpha^\iota$ и $T(\alpha) = \alpha + \alpha^\iota$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$ и ι — каноническая инволюция $\mathfrak{A}$, — норма и след α соответственно. Норма N индуцирует на $\mathfrak{A}$ квадратичное анизотропное над $\mathbb{Q}$ (и даже над $\mathbb{R}$) пространство с группой собственных подобий $S^+_{\mathbf{Q}}(\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}^\times \times \mathfrak{A}^\times)/\Delta(\mathbf{Q}^\times)$, где $\Delta(\mathbf{Q}^\times)$ — диагональная подгруппа в прямом произведении $\mathfrak{A}^\times \times \mathfrak{A}^\times$, состоящая из элементов (a, a) с $a \in \mathbb{Q}^\times$. Для $s = (\alpha, \beta)\,\Delta(\mathbb{Q}^\times) \in S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ будем использовать сокращение $s \equiv (\alpha, \beta)$, и тогда действие $S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ на элементы $\xi \in \mathfrak{A}$ задается формулой $s : \xi \to \alpha\xi\beta^{-1}$, при этом $N(s) = N(\alpha)\,N(\beta)^{-1}$ — множитель этого преобразования. Несобственные подобия совпадают с множеством $S^-_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}) = S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})\,\iota$, если положить $\iota : \xi \mapsto \xi^\iota$. Так как $N(\xi^\iota) = N(\xi)$, то $N(s\cdot\iota) = N(s)$ для любого $s \in S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$. Группа всех подобий $\mathfrak{A}$ — это $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}) = S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}) \cup S^-_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ с формулой коммутирования

$$s\cdot\iota = \iota\cdot s^\iota, \quad \text{где} \quad s^\iota \equiv \left(\beta^{\iota-1}, \alpha^{\iota-1}\right) \quad \text{для} \quad s \equiv (\alpha, \beta) \in S^+_{\mathbf{Q}}(\mathfrak{A}), \tag{2.1}$$

превращающей множество $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ в группу. Аналогично определяются ортогональные преобразования $\mathfrak{A}$: $O^{\pm}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ и $O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$, дополнительно предполагая условие $N(s) = 1$.

2.2. Решетка $M \subset \mathfrak{A}$ — это конечный $\mathbb{Z}$-модуль ранга 4 над $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Z}$ — идеал $N(M)\cdot\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, порожденный нормами $N(\mu)$ $(\mu \in M)$, называется нормой M. Иногда норму удобно отождествить с числом $N(M) > 0$. Решетка M называется максимальной целой, если: 1) $N(M) \subset \mathbb{Z}$ и 2) $M = M'$ для любой решетки M' с $N(M') \subset \mathbb{Z}$, если $M \subset M'$. Две решетки M и M' эквивалентны ($M \sim M'$), если $M' = \sigma\cdot M$ для некоторого $\sigma \in O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$. Обозначим класс эквивалентных решеток через $\mathrm{cls}\, M$. Согласно [10] с. 240, множество максимальных целых решеток из $\mathfrak{A}$ образуют один род.

2.3. Каждая решетка $M \subset \mathfrak{A}$ имеет левое Ω_l и правое Ω_r кольца множителей, являющиеся порядками. Если они максимальны, т. е. являются максимальными целыми решетками, то M называется нормальным идеалом. Пусть $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ и $M_p = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ — p-пополнения алгебры $\mathfrak{A}$ и решетки M. Тогда для любого максимального порядка

$$\Omega_p \overset{\mathbf{Z}_p}{\cong} M_2(\mathbb{Z}_p) \quad \text{и} \quad \Omega_p = \{\alpha_p \in \mathfrak{A}_p;\ N(\alpha_p) \in \mathbb{Z}_p\} \tag{2.2}$$

для $p \nmid d$ и $p \mid d$, где $d = p_1, \ldots, p_e$ — произведение нечетного числа простых p_i, не расщепляющих алгебру $\mathfrak{A}$. Более того, любые два максимальные порядка Ω и Ω' локально сопряжены: $\Omega'_p = \alpha_p \Omega_p \alpha_p^{-1}$ с $\alpha_p \in \mathfrak{A}_p^{\times}$ для любого $p \neq \infty$. Всякий левый I_p и правый J_p Ω_p — идеалы являются главными, а для $p \mid d$ являются двусторонними вида $\pi^n \cdot \Omega_p$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\pi \in \mathfrak{A}_p$, $|N(\pi)|_p = p^{-1}$ и $|\cdot|_p$ — нормирование поля $\mathbf{Q}_p$. Отсюда следует, что если L_p и L'_p — нормальные идеалы, то $L'_p = \alpha_p L_p \beta_p$ для некоторых $\alpha_p, \beta_p \in \mathfrak{A}_p^{\times}$, а значит, $L'_p = \sigma_p \cdot L_p$ для $\sigma_p \in S_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{A})$.

Предложение 2.1. *Если M — максимальная целая решетка из $\mathfrak{A}$, то M — нормальный идеал с нормой $N(M) = 1$, и обратно. Отображение* $\operatorname{cls} M \rightleftarrows [M]$, *где* $[M] = \{\sigma \cdot M;\ \sigma \in S_{\mathbf{Q}}(\mathfrak{A})\}$, *задает взаимно однозначное соответствие между классами* $\operatorname{cls} M$ *максимальных целых решеток M и классами $[M]$ нормальных идеалов из $\mathfrak{A}$.*

2.4. Обозначим через $J_{\mathbb{Q}}$ и $J_{\mathfrak{A}}$ группы иделей для $\mathbb{Q}$ и $\mathfrak{A}$ и через $J^1_{\mathbb{Q}}$ и $J^1_{\mathfrak{A}}$ — подгруппы элементов $\alpha = (\alpha_p)$, для которых $\prod_p |N(\alpha_p)|_p = 1$, и пусть

$$S_A^{1+} = (J^1_{\mathfrak{A}} \times J^1_{\mathfrak{A}})/\Delta(J^1_{\mathbb{Q}}) \quad \text{и} \quad S_A^1 = I_A \cdot S_A^{1+} = S_A^{1+} \cdot I_A, \tag{2.3}$$

где $I_A = \{\iota^{\nu} = (\iota^{\nu_p});\ \nu_p \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$. Поставим решетке $M \subset \mathfrak{A}$ в соответствие подмножество $\tilde{M} = \prod_p M_p$ с $M_{\infty} = \mathfrak{A}_{\infty}$ из аделизации $A_{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathfrak{A}$

Равенство $M = \tilde{M} \cap \mathfrak{A}$ [10] показывает, что M определяется своими локализациями M_p $(p \neq \infty)$. Отсюда следует, что формулы $g \cdot M = g \cdot \tilde{M} \cap \mathfrak{A}$, где $g \cdot \tilde{M} = \alpha \tilde{M} \beta^{-1}$ для $g \equiv (\alpha, \beta) \in S_A^1$, и $\iota^{\nu} \cdot M = \prod_p M'_p \cap \mathfrak{A}$ с $M'_p = M_p$ или M_p^{ι} для $\nu_p \equiv 0$ или $1 \pmod 2$ соответственно, задают действие группы S_A^1 на множестве решеток и, в частности, на множестве нормальных идеалов, и, согласно п. 2.3, это действие транзитивно, откуда вытекает

Предложение 2.2. *Пусть L — фиксированный нормальный идеал из $\mathfrak{A}$ и $S^1_{\tilde{L}} = \{g \in S_A^1;\ g \cdot \tilde{L} = \tilde{L}\}$ — стабилизатор $\tilde{L} \subset$ в $A_{\mathfrak{A}}$. Тогда отображение $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}) \diagdown S_A^1 / S^1_{\tilde{L}} \ni S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})\, g^{-1} S^1_{\tilde{L}} \mapsto [g^{-1} \cdot L]$ задает взаимно однозначное соответствие между указанными двойными классами и множеством классов подобных нормальных идеалов из $\mathfrak{A}$.*

§ 3. Операторы Гекке и формула следа

3.1. Пусть L — снова фиксированный нормальный идеал, L_2 — векторное $\mathbb{C}$-пространство комплекснозначных функций f на группе S_A^1, постоянных на двойных классах из $S^1_{\tilde{L}} \diagdown S_A^1 / S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$, и D — аналогичное пространство функций T с компактным носителем и постоянных на двойных классах из $S^1_{\tilde L} \setminus S^1_A / S^1_{\tilde L}$. D образует ассоциативную коммутативную алгебру (кольцо Гекке) относительно свертки

$$T * T'(x) = \int_{S^1_A} T(xy^{-1}) T'(y)\, dv(y)$$

с мерой Хаара на S^1_A, нормированной условием $v(S^1_{\tilde L}) = 1$. Так как все нормальные идеалы сопряжены относительно действия группы S^1_A, то $v(S^1_{\tilde L'}) = 1$ для любого нормального идеала $L' \subset \mathfrak{A}$. Через свертку $f \mapsto T * f$ D действует как алгебра линейных операторов на пространстве L_2, размерность которого по предложениям 2.1 и 2.2 равна числу классов H нормальных идеалов или числу классов максимальных целых решеток из $\mathfrak{A}$.

3.2. След оператора $T \in D$ можно вычислить с помощью формулы следа Сельберга [11]

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{\{s\}} \int_{S^1_A / G(s)} \Psi_s(\bar g;\ T)\, dv(\bar g) \tag{3.1}$$

с суммированием по всем классам сопряженности $\{s\} = \{gsg^{-1};\ g \in S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})\}$ группы $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$, и при этом $G(s)$ — централизатор s в $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$, $\Psi_s(\bar g;\ T) = T(gsg^{-1})$ для $\bar g = g \cdot G(s)$ и $v(\bar g)$ — левоинвариантная мера Радона, ассоциированная с $v(g)$.

§ 4. Операторы Гекке T (n_1, n_2)

4.1. В этом параграфе мы введем операторы, образующие базис целочисленного подкольца (именно оно интересно для приложений) из D. Начнем с определения их носителей. Как и в § 3, фиксируем нормальный идеал L с условием $L^\iota = L$. Например, $L = \Omega$ — некоторый максимальный порядок из $\mathfrak{A}$. Начнем с локальных рассмотрений. Пусть $U_p = \mathbb{Z}_p^\times$, $\mathbb{Z}_p = \mathbb{R}$ для $p = \infty$, $\dot\Omega_p = \Omega_p \setminus \{0\}$ и

$$S^+_{L_p} = \{\sigma = (\alpha_p,\ \beta_p) \cdot \Delta(\mathbb{Q}_p^\times] \in (\mathfrak{A}_p^\times \times \mathfrak{A}_p^\times)/\Delta(\mathbb{Q}_p^\times);\quad \sigma \cdot L_p = \alpha_p L_p \beta_p^{-1} \subset L_p\}.$$

Тогда из п. 2.3 следует, что

$$S^+_{L_p} = (\dot\Omega_p \times \dot\Omega_p^{-1})\, \Delta(\mathbb{Q}_p^\times)/\Delta(\mathbb{Q}_p^\times) \approx (\dot\Omega_p \times \dot\Omega_p^{-1})/\Delta(U_p) \tag{4.1}$$

или

$$S^+_{L_p} = \{(\alpha_p,\ \beta_p)\, \Delta(\mathbb{Q}_p^\times) \in (\mathfrak{A}_p^\times \times \mathfrak{A}_p^\times)/\Delta(\mathbb{Q}_p^\times);\ N(\alpha_p \beta_p^{-1}) \in \mathbb{Z}_p\}$$

соответственно для $p \nmid d$ или $p \mid d$ и $p = \infty$. Теперь для любых натуральных чисел $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ определим два множества:

$$S^{1+}_{\tilde L}(n_1,\ n_2) = \prod_p S^+_{L_p}(n_1,\ n_2) \cap S^1_A, \tag{4.2}$$

$$S^1_{\tilde L}(n_1,\ n_2) = I_A \cdot S^{1+}_{\tilde L}(n_1,\ n_2) \cdot I_A,$$

при этом $S^+_{L_p}(n_1,\ n_2)$ равны для $p \nmid d$, $p \mid d$ и $p = \infty$ соответственно множествам

$$(\Omega_p(n_1) \times \Omega_p^{-1}(n_2)) \cdot \Delta(\mathbf{Q}_p^\times)/\Delta(\mathbf{Q}_p^\times),$$

$$\left\{(\alpha_p,\ \beta_p)\, \Delta(\mathbf{Q}_p^\times) \in S^+_{L_p};\ |N(\alpha_p \beta_p^{-1})|_p = |n_1 n_2|_p\right\}$$

и $S^+_{L_p}$, где для $i = 1,\ 2$

$$\Omega_p(n_i) = \{\alpha_p \in \Omega_p;\ |N(\alpha_p)|_p = |n_i|_p,\ p^{-1} \cdot \alpha_p \notin \Omega_p\}. \tag{4.3}$$

Из определений и (2.1) вытекает следующее разбиение

$$S_{\tilde{L}}^{1}(n_1,\ n_2)=\bigcup_{\iota^{\nu}\in I_A/\{n_1\,n_2\}_0} S_{\tilde{L}}^{1+}(\iota^{\nu}\cdot(n_1,\ n_2))\cdot I_A, \tag{4.4}$$

причем I_A может стоять и слева, где $\{n_1,\ n_2\}_0$ — стабилизатор пары (n_1, n_2) относительно действия $\iota^{\nu}\cdot(n_1, n_2)=(n_1', n_2')$ с $n_i'=\iota^{\nu}\cdot n_i$ группы I_A, определенного следующим образом: если простое число $p\nmid d$ входит в n_1 и n_2 в степенях α_1 и α_2, то p входит в n_1' и n_2' в тех же степенях или в степенях α_2 и α_1 в зависимости от того, $\nu_p\equiv 0$ или 1 (mod 2); если же $p\mid d$, то степени сохраняются. Кроме того, в силу определения группы $S_{\tilde{L}}^{1}$ и (4.1), (4.2)

$$S_{\tilde{L}}^{1}\cdot S_{\tilde{L}}^{1}(n_1,\ n_2)=S_{\tilde{L}}^{1}(n_1,\ n_2)\cdot S_{\tilde{L}}^{1}=S_{\tilde{L}}^{1}(n_1,\ n_2), \tag{4.5}$$

а так как последнее множество компактно, то мы можем определить оператор Гекке с этим носителем:

$$T(n_1,\ n_2)=T_L(n_1,\ n_2;\ x)\quad (x\in S_A^{1}).$$

Если L — произвольный нормальный идеал, то, согласно п. 2.4, $L=\gamma\cdot L_s$ для некоторого нормального идеала $L_s=L_s^{\iota}$ и $\gamma=\gamma^{+}\cdot\iota^{\mu}\in S_A^{1}$, где $\gamma^{+}\equiv(\gamma_1,\ \gamma_2)\in S_A^{1+}$. В этом случае полагаем

$$S_{\tilde{L}}^{1}(n_1,\ n_2)=\gamma S_{\tilde{L}_s}^{1}(n_1,\ n_2)\,\gamma^{-1}=\gamma^{+}S_{\tilde{L}_s}^{1}(n_1,\ n_2)\,(\gamma^{+})^{-1}. \tag{4.6}$$

4.2. Выясним, для каких $s\in S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ и $\gamma\in S_A^{1}$ подынтегральная функция $\Psi_s(\bar{\gamma};\ T(n_1,\ n_2))$ в формуле следа (3.1) отлична от нуля. Это, очевидно, такие s и γ, для которых $\gamma s\gamma^{-1}\in S_{\tilde{L}}^{1}(\iota^{\nu}\cdot(n_1, n_2))$, или, что равносильно ввиду (4.2) и (4.4) включению

$$\gamma^{+}s\,(\gamma^{+})^{-1}\in S_{\tilde{L}}^{1+}(\iota^{\nu}\cdot(n_1,\ n_2))\cdot I_A \tag{4.7}$$

для некоторого, причем единственного $\iota^{\nu}\in I_A/\{n_1,\ n_2\}_0$. Если $s\equiv(\alpha,\ \beta)\in S_{\mathbb{Q}}^{+}(\mathfrak{A})$ и $\gamma_i=(\gamma_{ip})$ для $i=1, 2$, то в свою очередь включение (4.7) равносильно условиям

$$(\gamma_{1p}\alpha\gamma_{1p}^{-1},\ \gamma_{2p}\beta\gamma_{2p}^{-1})\in(\Omega_p(\iota^{\nu}\cdot n_1)\times\Omega_p^{-1}(\iota^{\nu}\cdot n_2))\cdot\Delta(\mathbf{Q}_p^{\times})$$

для $p\nmid d$, т. е. $\gamma_{1p}\alpha r_p\gamma_{1p}^{-1}\in\Omega_p(\iota^{\nu}\cdot n_1)$ и $\gamma_{2p}\beta r_p\gamma_{2p}^{-1}\in\Omega_p^{-1}(\iota^{\nu}\cdot n_2)$ для некоторого $r_p\in\mathbb{Q}_p^{\times}$; $|N(\alpha\cdot\beta^{-1})|_p=|n_1n_2|_p$ для $p\mid d$ и на γ_{1p}, γ_{2p} никаких ограничений нет. Выберем для любого $p\mid d$ такое $r_p\in\mathbb{Q}_p^{\times}$, то $\alpha\cdot r_p\in\Omega_p$ и $|N(\alpha\cdot r_p)|_p=|m\iota^{\nu}\cdot n_1|_p$ с $m\mid d$, причем m одно для всех $p\mid d$. Согласно (2.2), такие r_p и m существуют и m единственно. Элемент $(r_p)\in J_{\mathbb{Q}}^{1}$ с так выбранными компонентами можно представить в виде $(r_p)=r\cdot u$ с $u\in U_{\mathbb{Q}}^{1}$, $r\in\mathbb{Q}^{\times}$, и так как $s\equiv(\alpha\cdot r,\ \beta\cdot r)$, то с самого начала можем считать $r=1$. Тогда

$$\begin{aligned}&\gamma_{1p}\alpha\gamma_{1p}^{-1}\in\Omega_p(\iota^{\nu}\cdot n_1), && \gamma_{2p}\beta\gamma_{2p}^{-1}\in\Omega_p^{-1}(\iota^{\nu}\cdot n_2) && \text{для}\quad p\nmid d;\\ &\gamma_{1p}\alpha\gamma_{1p}^{-1}\in\Omega_p, && \gamma_{2p}\beta'\gamma_{2p}^{-1}\in\Omega_p\ \text{с}\ \beta'=m\cdot\beta^{-1} && \text{для}\quad p\mid d,\end{aligned} \tag{4.8}$$

и при этом $|N(\alpha)|_p=|n_1'|_p$, $|N(\beta')|_p=|n_2'|_p$, где $n_i'=m\iota^{\nu}\cdot n_i$. Заметим, что если α, β удовлетворяют условиям (4.8) для некоторого $\gamma\in S_A^{1}$, то для $s\equiv(\alpha,\ \beta)$ выполняется включение (4.7). Если (4.7) выполняется еще для $\gamma'\in S_A^{1}$, то α, β удовлетворяют условиям (4.8) для γ' и $m\mid d$. Таким образом, справедлива

Лемма 4.1. *Выполнимость для $s \in S_{\mathbb{Q}}^{+}(\mathfrak{A})$ включения* (4.7) *с некоторым $\gamma \in S_A^1$ равносильна тому, что $s = (\alpha, \beta)\cdot\Delta(\mathbb{Q}^{\times})$ с такими (α, β), что*

$$\alpha \in \Omega_l = \gamma_1^{-1}\tilde{\Omega}\gamma_1 \cap \mathfrak{A}, \quad \beta' \in \Omega_r = \gamma_2^{-1}\tilde{\Omega}\gamma_2 \cap \mathfrak{A} \quad (\beta' = m\cdot\beta^{-1},\ m \mid d),$$
$$N(\alpha) = n_1', \quad N(\beta') = n_2' \ \text{ с } \ n_i' = m\iota^{\nu} n_i \ \text{ и } \ p^{-1}\alpha \notin \Omega_l, \quad p^{-1}\beta' \notin \Omega_r \tag{4.9}$$

для любого $p \nmid d$, где Ω_l, Ω_r — максимальные порядки, являющиеся левым и правым кольцами множителей нормального идеала $L' = \gamma^{-1}\cdot L$, т. е. α, β' — целые элементы из $\mathfrak{A}$; при этом $m \mid d$ и $\iota^{\nu} \in I_A/\{n_1, n_2\}_0$ определяются элементом s однозначно и (α, β), $(-\alpha, -\beta)$ — все возможные представители для s с указанными выше свойствами.

Обратно, если представители (α, β) для s удовлетворяют условиям (4.9) *для некоторых γ_1', $\gamma_2' \in J_{\mathfrak{A}}^1$, то для любого $\gamma \in S_A^1$ включение* (4.7) *равносильно условиям* (4.9).

4.3. Пусть теперь $s \equiv (1, \delta)\cdot\iota \in S_{\mathbb{Q}}^{-}(\mathfrak{A})$. Используя (2.1), в обозначениях п. 4.2 имеем $\gamma^{+}s(\gamma^{+})^{-1} \equiv (\gamma_1\gamma_2^{\iota}, \gamma_2\delta\gamma_1^{\iota})$ и тогда включение (4.7) равносильно условиям:

$$\gamma_{1p}\gamma_{2p}^{\iota}r_p \in \Omega_p(\iota^{\nu}n_1), \quad \gamma_{2p}\delta\gamma_{1p}^{\iota}r_p \in \Omega_p^{-1}(\iota^{\nu}n_2) \quad (r_p \in \mathbb{Q}_p^{\times}) \tag{4.10}$$

для $p \nmid d$; $|N(\delta^{-1})|_p = |n_1n_2|_p$ для $p \mid d$. Для любого $p \nmid d$ из (4.10) вытекает $\gamma_{1p} = \omega_p(\gamma_{2p}^{\iota})^{-1}r_p^{-1}$ с $\omega_p \in \Omega_p(\iota^{\nu}n_1)$, откуда и из (2.2) следует

Лемма 4.2. *Если для $s \equiv (1, \delta)\cdot\iota \in S_{\mathbb{Q}}^{-}(\mathfrak{A})$ существует $\gamma \in S_A^1$ такое, что выполнено включение* (4.7), *то $\delta^{-1} \in \Omega_r = \gamma_2^{-1}\Omega\gamma_2 \cap \mathfrak{A}$ и $N(\delta^{-1}) = n_1n_2$. Обратно, пусть целый элемент $\delta^{-1} \in \mathfrak{A}$ и $\gamma_2 \in J_{\mathfrak{A}}^1$ удовлетворяют этим условиям, $\gamma_1 = \omega(\gamma_2^{\iota})^{-1}\cdot r$, где r — любое число из $\mathbb{Q}^{\times}$ и компоненты элемента $\omega = (\omega_p) \in J_{\mathfrak{A}}^1$ удовлетворяют условиям:*

$$\gamma_{2p}\delta^{-1}\gamma_{2p}^{-1} = \omega_p^{\iota}\cdot\omega_p' \ \text{ с } \ \omega_p \in \Omega_p(\iota^{\nu}\cdot n_1), \quad \omega_p' \in \Omega_p(\iota^{\nu}\cdot n_2) \ \text{ для } \ p \nmid d;$$
$$\omega_p \in \mathfrak{A}_p^{\times}, \quad |N(\omega_p)|_p^{-1} = 1 \ \text{ или } \ p \ \text{ для } \ p \mid d,$$

т. е. $\omega_p \in \Omega_p^{\times}\pi^i = \pi^i\Omega_p^{\times}$, где $i = 1, 2$, $|N(\pi)|_p^{-1} = p$. Тогда

$$s \equiv (1, \delta)\cdot\iota \in S_{\mathbb{Q}}^{-}(\mathfrak{A}) \ \text{ и } \ \gamma = \gamma^{+}\cdot\iota^{\mu} \in S_A^1 \ \text{ с } \ \gamma^{+} \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$$

удовлетворяют условию (4.7) *и всякое γ с последним условием при фиксированном s определяется таким образом.*

§ 5. Классы сопряженности и централизаторы элементов групп $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$

5.1. Пусть $\{s\}$ и $\{s\}_{+}$ — классы сопряженности элемента $s \equiv (\alpha, \beta) \in S_{\mathbb{Q}}^{+}(\mathfrak{A})$ в группах $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ и $S_{\mathbb{Q}}^{+}(\mathfrak{A})$ соответственно. Согласно п. 2.1,

$$\{s\} = \{s\}_{+} \cup \{s^{\iota}\}_{+} \quad \text{и} \quad \{s\}_{+} = [(\{\alpha\} \times \{\beta\})\cdot\Delta(\mathbb{Q}^{\times})]/\Delta(\mathbb{Q}^{\times}),$$

где $s^{\iota} \equiv ((\beta^{\iota})^{-1}, (\alpha^{\iota})^{-1})$ и $\{\alpha\}$ — класс сопряженности $\alpha \in \mathfrak{A}^{\times}$ в $\mathfrak{A}^{\times}$. Два класса $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$ равны тогда и только тогда, когда $T(\alpha) = T(\alpha')$ и $N(\alpha) = N(\alpha')$. Если представители (α, β) элемента s удовлетворяют условиям леммы 4.1, то классу $\{s\}_{+}$ сопоставим множество $[t_1, t_2]_{+}$, состоящее из четверок $(\varepsilon t_1, n_1'; \varepsilon t_2, n_2')$ с $\varepsilon = \pm 1$ и $t_1 = T(\alpha)$, $t_2 = T(\beta)$. Ясно, что различным классам $\{s\}_{+}$ отвечают различные множества (классы) $[t_1, t_2]_{+}$. Отсюда вытекает

Лемма 5.1. *Различным классам* $\{s\}$, *где* $s \equiv (\alpha, \beta) \in S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ *удовлетворяют условиям леммы* 4.1, *отвечают различные множества* $[t_1, t_2] = [t_1, t_2]_+ \cup [t_2, t_1]_+$.

5.2. Рассмотрим классы $\{s\}$ для $s \in S^-_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$.

Лемма 5.2. *В классе* $\{s\}$ *для* $s \equiv (\alpha, \beta)\cdot\iota \in S^-_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ *содержится элемент* $s' \equiv (1, \delta)\cdot\iota$ *с* $\delta = \beta\cdot(\alpha^\iota)^{-1}$. *Отображение* $\{s\} \mapsto \{\delta\}$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. Для $\gamma \equiv ((\alpha\gamma_2^\iota)^{-1}, \gamma_2) \in S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ в силу (2.1) $\gamma s\gamma^{-1} \equiv (1, \gamma_2\beta(\alpha^\iota)^{-1}\gamma_2^{-1})\cdot\iota$. Пусть $s \equiv (1, \delta)\cdot\iota$, $s_1 \equiv (1, \delta_1)\cdot\iota$ и $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$ из группы $S_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ и $\gamma s\gamma^{-1} = s_1$. Тогда снова по (2.1) $\gamma_1\gamma_2^\iota = r$, $\gamma_2\delta\gamma_1^\iota = r\cdot\delta_1$ с некоторым $r \in \mathbb{Q}^\times$. Подставляя $\gamma_1 = r\cdot(\gamma_2^\iota)^{-1}$ во второе равенство, получаем $\gamma_2\delta\gamma_2^{-1} = \delta_1$, т. е. $\{\delta\} = \{\delta_1\}$. Для $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2)\cdot\iota$ доказательство проводится аналогично. ●

В этом случае мы можем также определить мономорфное отображение множества классов $\{s\} = \{s'\}$, для которых выполнено включение (4.7), в множество пар чисел, полагая для $s' \equiv (1, \delta)\cdot\iota$ с условиями леммы 4.2 $\{s'\} \mapsto (t, n_1\cdot n_2)$ с $t = T(\delta^{-1})$.

5.3. Введем одно понятие. Элемент $\alpha \in \mathfrak{A}$ назовем чисто мнимым, если $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$ и $\alpha \notin \mathbb{Q}$ или, что равносильно, $\alpha \in \mathfrak{A}\setminus\mathbb{Q}$ и $T(\alpha) = 0$. Если $s \equiv (\alpha, \beta) \in S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ и α, β чисто мнимые, то s также будем называть чисто мнимым. Пусть $C(\alpha)$ — централизатор $\alpha \in \mathfrak{A}^\times$ в $\mathfrak{A}^\times$ и (см. п. 3.2) $G(s)^+ = G(s) \cap S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$. Тогда, согласно [9],

$$[G(s)^+ : (C(\alpha) \times C(\beta))/\Delta(\mathbb{Q}^\times)] = 2 \quad \text{или} \quad 1, \tag{5.1}$$

если s является чисто мнимым или нет соответственно; при этом $C(\alpha) = \mathfrak{A}^\times$, если $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$, и $C(\alpha) = K_\alpha^\times = \mathbb{Q}(\alpha)^\times$, если $\alpha \in \mathfrak{A}\setminus\mathbb{Q}$.

Лемма 5.3. *Индекс* $[G(s) : G(s)^+] = 2$ *или* 1 *соответственно тому, выполнено или не выполнено равенство*

$$T(\alpha)^2\cdot N(\beta) = T(\beta)^2\cdot N(\alpha). \tag{5.2}$$

Доказательство. По (2.1) условие $s = \gamma s\gamma^{-1}$ для $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2)\cdot\iota \in S^-_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ равносильно тому, что

$$\gamma_1(\beta^\iota)^{-1}\gamma_1^{-1} = r\cdot\alpha, \qquad \gamma_2(\alpha^\iota)^{-1}\gamma_2^{-1} = r\cdot\beta \quad \text{для некоторого} \quad r \in \mathbb{Q}^\times. \tag{5.3}$$

Покажем, что из (5.3) следует (5.2). Так как $T(\alpha^{-1}) = T(\alpha)/N(\alpha)$ для $\alpha \in \mathfrak{A}^\times$, то, вычисляя след обеих частей равенств (5.3) и перемножая их, выводим (5.2). Обратно, из (5.2) следует $N(\alpha)\cdot N(\beta) = (r^{-1})^2$ для некоторого $r \in \mathbb{Q}^\times$, откуда вытекает, что при подходящем выборе знака элементы $(\beta^\iota)^{-1}$ и $\pm r\cdot\alpha$ имеют одинаковые следы и нормы. Пусть это будет для r. Тогда $\gamma_1(\beta^\iota)^{-1}\gamma_1^{-1} = r\cdot\alpha$ с $\gamma_1 \in \mathfrak{A}^\times$. Если взять $\gamma_1 = \gamma_2^\iota$, то отсюда следует и второе равенство из (5.3). Наконец, так как (5.3) выполнено тогда и только тогда, когда $G(s) \cap S^-_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$, то лемма доказана.

5.4. Теперь опишем централизаторы $G(s)$ для $s \equiv (1, \delta)\cdot\iota \in S^-_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$. Согласно лемме 5.2, можно ограничиться рассмотрением только таких s.

Лемма 5.4. *В обозначениях п.* 5.3

$$G(s)^+ = \{\gamma \equiv (r(\gamma_2^\iota)^{-1}, \gamma_2) \in S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A});\ \gamma_2 \in C(\delta),\ r \in \mathbb{Q}^\times\}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Если $\gamma s\gamma^{-1} = s$ для $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2) \in S^+_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$, то по (2.1) $\gamma_1\gamma_2^\iota = r$ и $\gamma_2\delta\gamma_1^\iota = r\cdot\delta$ с некоторым $r \in \mathbb{Q}^\times$. Подставляя выражение для γ_1 из первого равенства во второе, видим, что $G(s)^+$ содержится в правой части равенства (5.4). Те же рассуждения доказывают и обратное включение. ●

Из леммы и включения $\gamma \equiv (\delta^{\iota},\ 1)\cdot\iota \in G(s)$ вытекает

Лемма 5.5. $[G(s) : G(s)^{+}] = 2$ *для любого* $s \equiv (1,\ \delta)\cdot\iota \in S^{-}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$.

§ 6. Вклад в формулу следа классов собственных элементов

Используя обозначения п. 5.1, разобьем классы $\{s\}$ элементов $s \equiv \equiv (\alpha,\ \beta) \in S^{+}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ или, что все равно, классы $[t_1,\ t_2]$ на три типа, определяемые соответственно условиями: 1) $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$; 2) $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 < 0$ или $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 = 0$; 3) $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0$, где $\Delta_i = \Delta(t_i) = t_i^2 - 4n_i'$ $(i = 1,\ 2)$.

6.1. Пусть $\{s\}$ первого типа. По лемме 4.1 и формуле (3.1) вклад класса $\{s\}$ в формулу следа оператора Гекке $T(n_1,\ n_2)$ из п. 4.1 равен

$$\mathcal{I}(s) = \int\limits_{S^1_A/G(s)} \Psi_s(\bar{g};\ T(n_1,\ n_2))\, dv(\bar{g}) = \varepsilon_d(n_1')\cdot\varepsilon_d(n_2')\, v(S^1_A/G(s)), \qquad (6.1)$$

где ε_d — функция из (1.8). Согласно (5.1) и п. 2.1, $G(s)^{+} = S^{+}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})$ и по лемме 5.3 $[G(s) : G(s)^{+}] = 2$. Пусть $U^1(\widetilde{\Omega})$ — группа единиц $\widetilde{\Omega}$, принадлежащая $J^1_{\mathfrak{A}}$, и

$$J^1_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{j=1}^{h} U^1(\widetilde{\Omega})\, \gamma_j \mathfrak{A}^{\times} = \bigcup_{j=1}^{h} \gamma_j U^1(\widetilde{\Omega}_j)\, \mathfrak{A}^{\times}, \qquad (6.2)$$

где $\widetilde{\Omega}_j = \gamma_j^{-1}\widetilde{\Omega}\gamma_j$, — разбиения $J^1_{\mathfrak{A}}$ на соответствующие классы. Согласно [9], с. 307, $v(S^1_A/S^{+}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A})) = 2^{1-e}\cdot W^2$, где

$$W = \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{w(\Omega_j)} = \frac{1}{24}\varphi(d), \qquad (6.3)$$

и $w(\Omega_j)$ — число единиц порядка Ω_j. Отсюда и (6.1) заключаем, что

$$\mathcal{I}(s) = \varepsilon_d(n_1')\cdot\varepsilon_d(n_2')\, 2^{-e} W^2. \qquad (6.4)$$

6.2. Пусть теперь $\{s\}$ второго типа и, для определенности, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$. Опишем γ_1 с первым условием из (4.9). Имеем

$$\{\gamma_1 \in J^1_{\mathfrak{A}};\ \ \alpha \in \Omega_l = \gamma_1^{-1}\widetilde{\Omega}\gamma_1 \cap \mathfrak{A}\} = \bigcup_{\mathfrak{O}} \langle \Omega \mid \mathfrak{O} \rangle, \qquad (6.5)$$

где $\langle \Omega \mid \mathfrak{O} \rangle = \{\gamma_1 \in J^1_{\mathfrak{A}};\ \gamma_1^{-1}\widetilde{\Omega}\gamma_1 \cap K_{\beta} = \mathfrak{O}\}$ и $\mathfrak{O}$ пробегает множество порядков из мнимого квадратичного поля $K_{\alpha} = \mathbb{Q}(\alpha)$ с двумя свойствами:

$$\mathfrak{O}(\alpha) = \mathbb{Z}[1,\ \alpha] \subset \mathfrak{O} \subset \widetilde{\mathfrak{O}}, \qquad \mathfrak{O} = \Omega_l \cap K_{\alpha}, \qquad (6.6)$$

где $\widetilde{\mathfrak{O}}$ — максимальный порядок поля K_{α} и Ω_l — некоторый максимальный порядок из $\mathfrak{A}$. Порядок $\mathfrak{O}$ называется оптимально вложенным в $\mathfrak{A}$. Для его существования необходимо и достаточно (см. [7, 8]), чтобы функция (1.4) $\varkappa(\Delta) \neq 0$, где $\Delta = \Delta(\mathfrak{O})$ — дискриминант порядка $\mathfrak{O}$ и в определении (1.4) $\left\{\frac{\cdot}{\cdot}\right\}$ — модифицированный символ Лежандра: $\left\{\frac{\Delta}{p}\right\} = 1$, если $\Delta\cdot p^{-2} \equiv 0$ или $1 \pmod 4$ для некоторого простого p, и $\left\{\frac{\Delta}{p}\right\} = \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ в остальных случаях, при этом $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ — обычный символ Лежандра для $p \neq 2$ и символ Артина для $p = 2$.

6.3. Согласно последнему условию из (4.9), в разбиении (6.5) нужно выделить $\mathfrak{D}$, для которых $p^{-1}\cdot\alpha \notin \Omega_l$ для любого $p \nmid d$. Итак, пусть

$$\mathfrak{D}(\alpha) \subset \mathfrak{D} = \mathbb{Z}[1, \alpha'] \subset \tilde{\mathfrak{D}} = \mathbb{Z}[1, \tilde{\alpha}]. \tag{6.7}$$

Так как $p^{-1}\cdot\alpha \notin \Omega_l$ равносильно условию $p^{-1}\cdot\alpha \notin \mathfrak{D}$, то нужно следить лишь за порядком $\mathfrak{D}$ или за его ступенью $f' = [\tilde{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D}]$. Не умаляя общности, можем считать $\alpha' = f'\cdot\tilde{\alpha}$.

Л е м м а 6.1. *Следующие условия на* $b \in \mathbb{N}$ *эквивалентны:* 1) $\alpha = a + f\cdot\tilde{\alpha} = b\,(a_1 + f_1\tilde{\alpha})$, *где* $b = (a, f)$; 2) $b^{-1}\cdot\alpha \in \tilde{\mathfrak{D}}$ *и* b — *наибольшее число с этим свойством*; 3) b — *наибольшее число такое, что* $b^2 \mid (T(\alpha)^2, N(\alpha))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале предположим, что в условии 1) b делит a и f и необязательно $b = (a, f)$, а в 2) и 3) опущены требования максимальности b. Тогда, очевидно, 1) и 2) эквивалентны и из 1) следует 3). Покажем, что из 3) следует 2). Действительно, $\alpha_1 = b^{-1}\cdot\alpha$ является корнем многочлена $x^2 - b^{-1}T(\alpha)\,x + b^{-2}\cdot N(\alpha)$ с целыми коэффициентами. Поэтому $\alpha_1 \in \tilde{\mathfrak{D}}$. Таким образом, множества всех b с условиями 1)—3) совпадают, и так как они конечные, то совпадают и наибольшие b. ●

Л е м м а 6.2. *Пусть выполнены условия леммы* 6.1 *и* d' — *наибольшее натуральное число с условием* $(d')^{-1}\cdot\alpha \in \mathfrak{D}$. *Тогда* d' *равно* $(b, f/f')$, *где* $f' = [\tilde{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D}(\alpha)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f = f'\cdot f''$, $b = d'\cdot b_1$, $f'' = d'\cdot f_1'$, т. е. d' делит (b, f''). Тогда $\alpha = a + f\tilde{\alpha} = (d'\cdot b_1)\,a_1 + (d'\cdot f_1')\cdot(f'\cdot\tilde{\alpha})$, откуда и из равенства $\alpha' = f'\cdot\tilde{\alpha}$ вытекает $\alpha = d'\cdot\alpha_1'$ с $\alpha_1' \in \mathfrak{D}$ и, значит, $(d')^{-1}\times\alpha \in \mathfrak{D}$. Обратно, пусть $\alpha = d'\cdot\alpha_1'$ с $\alpha_1' \in \mathfrak{D}$ и $\alpha_1' = a' + b'\cdot\tilde{\alpha}$. Тогда $\alpha = d'\,(a' + b'\tilde{\alpha}) = a + f\cdot\tilde{\alpha}$, и поэтому $a = d'\cdot a'$, $f = d'\cdot b'$, т. е. d' делит (a, f) и по лемме 6.1 d' делит b. Пусть $b = d'\cdot b_1$. Имеем

$$\alpha_1' = \alpha/d' = \frac{b}{d'}\,(a_1 + f_1\tilde{\alpha}) = b_1\,(a_1 + f_1\tilde{\alpha}) \in \mathfrak{D}.$$

Следовательно, $b_1\cdot f_1 = t\cdot f'$ с целым t и $b\cdot f_1 = d' b_1\cdot f_1 = (d'\cdot t)\,f'$. Так как $b\cdot f_1 = f$, то $f = d'\cdot t\cdot f'$, откуда d' делит f/f'. Таким образом, d' делит $(b, f/f')$. ●

6.4. Для класса $\{s\}$ второго типа по лемме 5.3 и (5.1)

$$G(s) = G(s)^+ = (K_\alpha^\times \times \mathfrak{A}^\times)/\Delta(\mathbb{Q}^\times) = \Delta(U_\mathbb{Q}^1)(K_\alpha^\times \times \mathfrak{A}^\times)/\Delta(J_\mathbb{Q}^1) \subset S_A^1. \tag{6.8}$$

Поэтому, используя лемму 4.1, (6.5) и лемму 6.2, имеем

$$\mathcal{I}(s) = v\left(\left\{\gamma \in S_A^1;\ \gamma s\gamma^{-1} \in S_{\mathbb{Z}}^1(\iota^\nu\cdot(n_1, n_2))\right\}\Big/G(s)\right) =$$

$$= \varepsilon_d(n_2')\,2^{-(e-e(\alpha))}\sum_{\mathfrak{D}}\varkappa(\Delta(\mathfrak{D}))\,v\left(I_A\cdot\langle\mathfrak{D}, J_\mathfrak{A}^1\rangle/G(s)^+\right), \tag{6.9}$$

где $e(\alpha)$ — число простых p, делящих d и разветвленных в K_α, $\langle\mathfrak{D}, J_\mathfrak{A}^1\rangle = (\langle\Omega \mid \mathfrak{D}\rangle \times J_\mathfrak{A}^1)/\Delta(J_\mathbb{Q}^1)$, $\mathfrak{D}$ пробегает множество идеалов из (6.7), для которых $(b, f/f')$ делит d^∞, т. е. состоит только из степеней простых $p \mid d$. Здесь $b = b(\alpha)$ — наибольшее натуральное число с условием $b^2 \mid (T(\alpha)^2, N(\alpha))$, $f = f(\alpha)$ и $f' = f(\mathfrak{D})$ — соответственно ступень порядка $\mathfrak{D}(\alpha)$ и $\mathfrak{D}$. Согласно [9], с. 309, имеют место разбиения

$$\langle\Omega \mid \mathfrak{D}\rangle = \bigcup_{k=1}^{2^{e-e(\alpha)}} U^1(\tilde{\Omega})\,\xi_k J_\alpha^1 = \bigcup_{k=1}^{2^{e-e(\alpha)}} \xi_k U^1(\tilde{\Omega}')\,J_\alpha^1, \tag{6.10}$$

где $\tilde{\Omega}' = \xi_1^{-1}\tilde{\Omega}\xi_1$, J_α^1 — группа иделей поля K_α с нормой 1. Поэтому, используя левоинвариантность меры v и обозначая $I'_A = \xi^{-1}I_A\xi$ с $\xi \equiv \equiv (\xi_1, 1)$, получаем

$$v\left(I_A\cdot\langle\mathfrak{O},\ J^1_{\mathfrak{A}}\rangle/G(s)^+\right) = 2^{e-e(\alpha)}v\left(I'_A\cdot X_s/G(s)^+\right) \tag{6.11}$$

с $X_s = \left(U^1(\tilde{\Omega}')\ J^1_\alpha\times J^1_{\mathfrak{A}}\right)/\Delta\left(J^1_{\mathbb{Q}}\right)$. Для вычисления последнего объема воспользуемся разбиением

$$J^1_\alpha = \bigcup_{1\leqslant\rho\leqslant h(\mathfrak{O})} U^1(\tilde{\mathfrak{O}})\,x_\rho K_\alpha^\times. \tag{6.12}$$

Так как $U^1(\tilde{\Omega}'_\rho)\cap K_\alpha = U(\mathfrak{O}) = \mathfrak{O}^\times$ для $\tilde{\Omega}'_\rho = x_\rho^{-1}\tilde{\Omega}'x_\rho$, то ввиду (6.2) и (6.8) объем из правой части равенства (6.11) равен

$$\sum_{\rho=1}^{h(\mathfrak{O})}\sum_{j=1}^{h} v\left(I_{\rho,j}\left(U^1(\tilde{\Omega}_\rho)K_\alpha^\times \times U^1(\tilde{\Omega}_j)\mathfrak{A}^\times\right)/\left(\Delta\left(U^1_{\mathbb{Q}}\right)\left(K_\alpha^\times\times\mathfrak{A}^\times\right)\right)\right) =$$
$$= \sum_\rho\sum_j v\left(I_{\rho,j}\left[U^1(\tilde{\Omega}'_\rho)\times U^1(\tilde{\Omega}_j)/U(\mathfrak{O})\times U(\Omega_j)\right]/\left[\Delta\left(U^1_{\mathbb{Q}}\right)/\{\pm1\}\right]\right), \tag{6.13}$$

при этом $I_{\rho,j} = \xi^{-1}I'_A\xi$ с $\xi\equiv(x_\rho,\ \gamma_j)$. Далее, применяя равенство [9],

$$[S^1_{\tilde{L}'} : ((\gamma^{-1}I_A\gamma)\cdot(U^1(\tilde{\Omega}_l)\times U^1(\tilde{\Omega}_r))/\Delta(U^1_{\mathbb{Q}}))] = 2^e \tag{6.14}$$

для произвольного нормального идеала $L' = \gamma^{-1}\cdot L$ (см. обозначения в лемме 4.1), (6.3) и обозначая через $w(\mathfrak{O})$ — число единиц порядка $\mathfrak{O}$, получаем, что правая часть равенства (6.13) равна

$$\sum_\rho\sum_j\frac{2}{w(\mathfrak{O})\,w(\Omega_j)}v\left(I_{\rho,j}\cdot\left(U^1(\tilde{\Omega}'_\rho)\times U^1(\tilde{\Omega}_j)\right)/\Delta\left(U^1_{\mathbb{Q}}\right)\right) = 2^{1-e}W\,\frac{h(\mathfrak{O})}{w(\mathfrak{O})},$$

так как $v\left(S^1_{\tilde{L}'}\right) = 1$ для любого нормального идеала L'. Таким образом, из (6.9), (6.11), (6.13) и последнего равенства вытекает

$$\mathcal{Y}(s) = \varepsilon_d(n'_2)\,2^{1-e}WA(t_1,\ n'_1) \tag{6.15}$$

с

$$A(t_1,\ n'_1) = \sum_{\mathbb{Q}}\varkappa(\Delta(\mathfrak{O}))\frac{h(\mathfrak{O})}{w(\mathfrak{O})} = \sum_\delta\varkappa(\delta^2\tilde{\Delta})\frac{h(\delta^2\tilde{\Delta})}{w(\delta^2\tilde{\Delta})},$$

где δ делит ступень $f = f(\alpha) = f(t_1,\ n'_1)$ порядка $\mathfrak{O}(\alpha)$ дискриминанта $\Delta'_1 = t_1^2 - 4n'_1$, $(\delta,\ d) = 1$, $(b,\ f/\delta)$ делит d^∞, при этом $b = b(\alpha) = b(t_1,\ n'_1)$ — наибольшее натуральное число с условием $b^2\mid(t_1^2,\ n'_1)$, и где $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(t_1,\ n'_1)$ — дискриминант поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)$, т. е. $\Delta_1 = f^2\cdot\tilde{\Delta}$.

Лемма 6.3. *Положим $f = f(b)\cdot f(d)\cdot f'$, при этом в $f(b)$ входят все степени простых $p\mid b$ и $p\nmid d$, а в $f(d)$ входят лишь степени простых $p\mid d$; и пусть $\varphi(\cdot;\ \chi)$, Φ — мультипликативные функции, определяемые на степенях простых p^α $(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ равенствами:*

$$\varphi(p^\alpha;\ \chi) = p^\alpha\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right),\qquad \Phi(p^\alpha) = 1 + \frac{(p-\chi(p))(p^\alpha-1)}{p-1}, \tag{6.16}$$

где χ — характер поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)$ (см. [12], с. 265). Тогда

$$A(t_1,\ n'_1) = \varkappa(\tilde{\Delta})\frac{h(\tilde{\Delta})}{w(\tilde{\Delta})}\varphi(f(b);\ \chi)\,\Phi(f'). \tag{6.17}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться двумя соотношениями (см. [12], с. 278):

$$\varkappa(\delta^2\cdot\tilde{\Delta}) = \varkappa(\tilde{\Delta}), \quad \frac{h(\delta^2\tilde{\Delta})}{w(\delta^2\tilde{\Delta})} = \frac{h(\tilde{\Delta})}{w(\tilde{\Delta})}\varphi(\delta;\ \chi). \quad \bullet$$

6.5. Наконец, пусть $\{s\}$ третьего типа. С помощью тех же рассуждений, что при доказательстве формулы (6.9), на основании лемм 4.1 и 5.3 получаем

$$\mathcal{I}(s) = 2^{-(e-e(\alpha))-(e-e(\beta))}\varepsilon_1([t_1,\ t_2]) \times$$
$$\times \sum_{\mathfrak{O}_1}\sum_{\mathfrak{O}_2}\varkappa(\Delta(\mathfrak{O}_1))\varkappa(\Delta(\mathfrak{O}_2))\,v(I_A\cdot\langle\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2\rangle/G(s)^+), \tag{6.18}$$

где $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ пробегают те же порядки, что и $\mathfrak{O}$ в сумме (6.9), отвечающие элементам α и β', $\varepsilon_1([t_1,\ t_2]) = 1/2$ или 1 соответственно тому, выполнено или не выполнено равенство $t_1^2n_2' = t_2^2n_1'$, и $\langle\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2\rangle = (\langle\Omega\,|\,\mathfrak{O}_1\rangle\times\langle\Omega\,|\,\mathfrak{O}_2\rangle)/\Delta(J_{\mathbf{Q}}^1)$. Теперь, используя разложения (6.10), (6.12), формулу (6.14) и то, что $[G(s)^+\colon((K_\alpha^\times\times K_\beta^\times)/\Delta(\mathbf{Q}^\times))] = 2$ при $t_1 = t_2 = 0$ и равно 1 в остальных случаях, аналогично п. 6.4 получаем

$$\mathcal{I}(s) = 2^{1-e}\varepsilon([t_1,\ t_2])\sum_{\mathfrak{O}_1}\sum_{\mathfrak{O}_2}\varkappa(\Delta(\mathfrak{O}_1))\varkappa(\Delta(\mathfrak{O}_2))\frac{h(\mathfrak{O}_1)h(\mathfrak{O}_2)}{w(\mathfrak{O}_1)w(\mathfrak{O}_2)},$$

где $\varepsilon([t_1,\ t_2]) = 1/4$, если $t_1 = t_2 = 0$; равно 1/2, если $t_1t_2 \neq 0$ и $t_1^2n_2' = t_2^2n_1'$; и равно 1, если не выполнено последнее равенство. Если воспользоваться суммами $A(\cdot,\ \cdot)$ из (6.15), то равенство для $\mathcal{I}(s)$ запишется в виде

$$\mathcal{I}(s) = 2^{1-e}\varepsilon([t_1,\ t_2])\,A(t_1,\ n_1')\,A(t_2,\ n_2'). \tag{6.19}$$

§ 7. Вклад в формулу следа классов несобственных элементов

7.1. Воспользуемся результатами п. 5.2. По лемме 5.2 в классе $\{s\}$ для $s\in S_{\mathbf{Q}}^-(\mathfrak{A})$ содержится элемент $s \equiv (1,\ \delta)\cdot\iota$. Если для него выполнено включение (4.7), то, согласно п. 5.2, мы можем класс $\{s\}$ отождествить с парой $(t,\ n_1n_2)$ или просто с t, где $t = T(\delta^{-1})$ и $n_1n_2 = N(\delta^{-1})$. Разобьем класс $\{s\}$ на два типа, определяемые условиями: 1) $\Delta = 0$ и 2) $\Delta < 0$, где $\Delta = \Delta(t) = t^2 - 4n_1n_2$. Согласно леммам 4.2 и 5.5 и (4.4), имеем

$$\mathcal{I}(s) = \frac{1}{2}\sum_{\iota^\nu\in I_A/\{n_1,\ n_2\}_0} v(I_A\cdot X(\nu)/G(s)^+), \tag{7.1}$$

где $X(\nu)$ — множество элементов $\gamma \equiv (\gamma_1,\ \gamma_2)\in S_{A_f}^{1+}$ таких, что $\delta^{-1}\in\Omega_r = \gamma_2^{-1}\bar{\Omega}\gamma_2\cap\mathfrak{A}$, $\gamma_1\in\mathbf{Q}^\times\omega\,(\gamma_2^\iota)^{-1}$, где $\omega = (\omega_p)$ удовлетворяют условиям: $\omega_p\in\pi^i\Omega_p^\times$ для $i = 1,\ 2$ и $p_i|d$,

$$\gamma_{2p}\delta^{-1}\gamma_{2p}^{-1} = \omega_p^\iota\omega_p' \quad \text{с} \quad \omega_p\in\Omega_p(\iota^\nu\cdot n_1), \quad \omega_p'\in\Omega_p(\iota^\nu\cdot n_2) \quad \text{для} \quad p\nmid d. \tag{7.2}$$

7.2. Ясно, что если ω_p удовлетворяет условиям (7.2), то и весь класс $\omega_p^\iota\cdot\Omega_p^\times = (\Omega_p^\times\cdot\omega_p)^\iota$ обладает этим свойством. Следующая лемма позволяет находить число таких классов.

Лемма 7.1. *Пусть* $\delta\in\Omega_p$ $(p\nmid d)$ *с нормой* $|N(\delta^{-1})|_p^{-1} = p^{\alpha_1+\alpha_2}$ $(\alpha_i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ *и* p^r *— наибольшая степень с условием* $p^{-r}\cdot\delta\in\Omega_p$.

Тогда число классов $\omega\Omega_p^\times \subset \Omega_p$ с $\omega \in \Omega_p(p^{\alpha_1})$ (см. (4.3)), для которых $\omega^{-1}\cdot\delta \in \Omega_p(p^{\alpha_2})$, равно

$$\sigma_p(p^{\alpha_1},\ p^{\alpha_2};\ p^r) = \sigma(p^{\min(\alpha_1,\ \alpha_2,\ r)}) - \sigma(p^{\min(\alpha_1-2,\ \alpha_2,\ r-1)}) -$$
$$- \sigma(p^{\min(\alpha_1,\ \alpha_2-2,\ r-1)}) + \sigma(p^{\min(\alpha_1-2,\ \alpha_2-2,\ r-2)}), \tag{7.3}$$

где $\sigma(a)$ — сумма делителей натурального числа a.

Доказательство. Искомое число классов тесно связано с коэффициентами формул умножения в кольце Гекке D группы $\Gamma = \Omega_p^\times$, которую по (2.2) можно считать равной $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ (подробности о D см. [13]). Кольцо D — это свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $T(\delta) = \Gamma\delta\Gamma$ ($\delta \in \dot{\Omega}_p$). Если $T(\delta_i) = \bigcup_j \delta_{ij}\Gamma$ ($i = 1,\ 2$) — разбиения, то

$$T(\delta_1)\cdot T(\delta_2) = \sum_{\Gamma\delta\Gamma \subset \Gamma\delta_1\Gamma\delta_2\Gamma} c(\delta)\, T(\delta), \tag{7.4}$$

где $c(\delta)$ равно числу классов $\delta_{1i}\Gamma$ таких, что $\delta_{1i}\delta_{2j}\Gamma = \delta\Gamma$ для некоторого j. Пусть $T(p^\alpha)$ — сумма двойных классов всех элементов $\delta \in \Omega_p$ с $|\det\delta|_p^{-1} = p^\alpha$, $T = \Gamma\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p\end{pmatrix}\Gamma$, $T(1,\ p^\alpha) = \Gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^\alpha\end{pmatrix}\Gamma$. Тогда (см. [13], с. 90)

$$T(p^{\alpha_1})\cdot T(p^{\alpha_2}) = \sum_{0\leqslant t\leqslant \min(\alpha_1,\ \alpha_2)} p^t T^t\cdot T(p^{\alpha_1+\alpha_2-2t}),$$

$$T(p^\alpha) = \sum_{0\leqslant s\leqslant\alpha/2} T^s\cdot T(1,\ p^{\alpha-2s}),$$

откуда

$$T(p^{\alpha_1})\cdot T(p^{\alpha_2}) = \sum_{0\leqslant r\leqslant(\alpha_1+\alpha_2)/2} \sigma(p^{\min(\alpha_1,\ \alpha_2,\ r)})\, T^r\cdot T(1,\ p^{\alpha_1+\alpha_2-2r}).$$

Из этой формулы, (7.4) и соотношения $T(p^\alpha) = T(1,\ p^\alpha) + T\cdot T(p^{\alpha-2})$ для $\alpha \geqslant 2$ следует равенство (7.3). ●

7.3. Пусть $\Delta = 0$, т. е. $\delta^{\iota-1} \in \mathbb{Z}$. В этом случае в определении множества $X(\nu)$: γ_2 — любое из $J_{\mathfrak{A}}^1$ и число классов $\Omega_p^\times\omega_p^{(i)}$ с условием (7.2) для всех $p\nmid d$ равно

$$\sigma(n_1,\ n_2;\ \sqrt{n_1n_2}) = \prod_{p\nmid d} \sigma_p(p^{\nu_p(n_1)},\ p^{\nu_p(n_2)};\ p^{\nu_p(\sqrt{n_1n_2})}), \tag{7.5}$$

где $\nu_p(a)$ — показатель степени p, входящей в a. Положим для $\Gamma = \Omega_p^\times \approx GL_2(\mathbf{Z}_p)$ ($p\nmid d$) и $\omega = \omega_p^{(i)}$ $\Gamma_1 = \omega\Gamma\omega^{-1} \cap \Gamma$ и $\Gamma_2 = \Gamma \cap \omega^{-1}\Gamma\omega$. Тогда $\Gamma_1\omega = \omega\Gamma_2$ и индексы подгрупп Γ_1 и Γ_2 в Γ конечны и совпадают. Отсюда и из левоинвариантности меры v следует, что $\Omega_p^\times$ и $\omega_p^{(i)}$ можно переставлять местами. Поэтому, используя лемму 5.4 и (6.2), получаем

$$v(I_A\cdot X(\nu)/G(s)^+) = 2^e\sigma(n_1,\ n_2;\ \sqrt{n_1n_2}) \sum_{j=1}^{h} v(I_A\cdot X_j/G(s)^+) \tag{7.6}$$

с

$$X_j = \{(\mathbb{Q}^\times U^1(\tilde{\Omega})(\gamma_j^\iota)^{-1}(\alpha^\iota)^{-1} \times U^1(\tilde{\Omega})\gamma_j\alpha);\ \alpha \in \mathfrak{A}^\times\}/\Delta(J_{\mathbb{Q}}^1)$$

и

$$G(s)^+ = \{(\mathbb{Q}^\times(\alpha^\iota)^{-1},\ \alpha)\cdot\Delta(U_{\mathbb{Q}}^1);\ \alpha \in \mathfrak{A}^\times\}/(J_{\mathbb{Q}}^1) \subset S_A^1.$$

Обозначим через $\tilde{\Omega}_j = \gamma_j^{-1}\tilde{\Omega}\gamma_j$, $\tilde{\Omega}_j' = \gamma_j^\iota\tilde{\Omega}(\gamma_j^\iota)^{-1}$ правое и левое кольца множителей нормального идеала $L' = \gamma^{-1}\cdot L$ с $\gamma \equiv ((\gamma_j^\iota)^{-1},\ \gamma_j) \in S_A^{1+}$ и $I_\gamma =$

$= \gamma^{-1} I_A \gamma$. Тогда по (6.14) объем под знаком суммы в (7.6) равен

$$v\left(I_\gamma\left(U^1(\tilde{\Omega}_j') \times U^1(\tilde{\Omega}_j)\right) / \{(\{\pm 1\}\cdot(\alpha^\iota)^{-1},\ \alpha)\,\Delta(U^1_Q));\ \alpha \in U(\Omega_j)\}\right) =$$

$$= \frac{2}{2w(\Omega_j)} v\left(I_\gamma\left(U^1(\tilde{\Omega}_j') \times U^1(\tilde{\Omega}_j)\right)/\Delta(U^1_Q)\right) = \frac{2^{-e}}{w(\Omega_j)},$$

откуда, а также из (7.6) и (6.3) $v(I_A \cdot X(\nu)/G(s)^+) = \sigma(n_1,\ n_2;\ \sqrt{n_1 n_2}) \times W$. Подставляя это равенство в (7.1) и используя функции $\varepsilon(n)$ и $\rho(n_1,\ n_2)$ из § 1, заключаем

$$\mathcal{I}(s) = \varepsilon(n_1 n_2)\,\sigma\left(n_1,\ n_2;\ \sqrt{n_1 n_2}\right) 2^{\rho(n_1,\ n_2)-1} W. \tag{7.7}$$

7.4. Если же $\Delta < 0$ и $K_\delta = \mathbb{Q}(\delta)$, то, принимая во внимание (6.5), аналогично (6.9) получаем

$$v(I_A \cdot X(\nu)/G(s)^+) = 2^{-(e-e(\delta))} \sum_{\mathfrak{O}} \varkappa(\Delta(\mathfrak{O}))\, v(I_A \cdot X(\nu,\ \mathfrak{O})/G(s)^+), \tag{7.8}$$

где $\mathfrak{O}$ пробегает множество порядков (6.7) с $\alpha = \delta^{-1}$, $X(\nu,\ \mathfrak{O})$ — подмножество из $X(\nu)$ (см. (7.1) и (6.9)) с $\gamma_2 \in \langle \Omega \mid \mathfrak{O} \rangle$ для $\alpha = \delta^{-1}$. По лемме 6.2 $d(\mathfrak{O})$ — делитель δ^{-1} в $\mathfrak{O}$ — равен $(b,\ f/f(\mathfrak{O}))$, где $\Delta(t) = f^2 \tilde{\Delta}$, $\Delta(\mathfrak{O}) = f^2(\mathfrak{O})\,\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}$ — дискриминант поля K_δ и где b — наибольшее натуральное число с условием $b^2 \mid (t^2,\ n_1 n_2)$. Далее, по лемме 7.1 количество классов $\Omega_p^\times \omega_p^{(i)}$ с условием (7.2) для всех $p \nmid d$ в обозначениях (7.5) равно $\sigma(n_1 n_2;\ d(\mathfrak{O}))$. Следовательно, используя (5.1) и лемму 5.4, имеем

$$v(I_A \cdot X(\nu,\ \mathfrak{O})/G(s)^+) = 2^e \sigma(n_1,\ n_2;\ d(\mathfrak{O})) \sum_{k=1}^{2^{e-e(\delta)}} v(I_A \cdot X_k(\mathfrak{O})/G(s)^+) \tag{7.9}$$

с

$$X_k(\mathfrak{O}) = \{(\mathbb{Q}^\times U^{-1}(\tilde{\Omega})((\xi_k \alpha)^\iota)^{-1} \times U^1(\tilde{\Omega})\,\xi_k \alpha);\ \alpha \in J^1_\delta\}/\Delta(J^1_{\mathbb{Q}})$$

и

$$G(s)^+ = \{(\mathbb{Q}^\times (\alpha^\iota)^{-1},\ \alpha)\cdot\Delta(U^1_{\mathbb{Q}});\ \alpha \in K_\delta^\times\}/\Delta(J^1_{\mathbb{Q}}) \subset S^1_A.$$

Пусть в (6.10) и (6.12) $\alpha = \delta^{-1}$, $\tilde{\Omega}_\rho = x^{-1} \tilde{\Omega} x$, $\tilde{\Omega}_\rho' = x^\iota \Omega (x^\iota)^{-1}$ — соответственно правое и левое кольца множителей нормального идеала $L' = \gamma^{-1} \cdot L$ с $\gamma \equiv ((x^\iota)^{-1},\ x)$ и $x = \xi_k x_\rho$ (эти порядки не зависят от k) и пусть $I_\gamma = \gamma^{-1} I_A \gamma$. Поскольку $U^1(\tilde{\Omega}_\rho) \cap K_\delta = U(\mathfrak{O})$, то объем под знаком суммы из (7.9) равен

$$\sum_{1 \leqslant \rho \leqslant h(\mathfrak{O})} v\left(I_\gamma\{\mathbb{Q}^\times U^1(\tilde{\Omega}_\rho')(\alpha^\iota)^{-1} \times U^1(\tilde{\Omega}_\rho)\alpha;\ \alpha \in K_\delta^\times\}/G(s)^+\right),$$

а объем из этой суммы в силу (6.14) и вида $G(s)^+$ равен $2^{-e}/w(\mathfrak{O})$ и, значит,

$$v(I_A X(\nu,\ \mathfrak{O})/G(s)^+) = 2^{e-e(\delta)} \sigma(n_1,\ n_2;\ d(\mathfrak{O})) \frac{h(\mathfrak{O})}{w(\mathfrak{O})}.$$

Отсюда и из (7.8) выводим, что объем $v(I_A X(\nu)/G(s)^+)$ равен сумме

$$A(t;\ n_1,\ n_2) = \sum_{\delta \mid f;\ (\delta,\ d)=1} \varkappa(\delta^2 \tilde{\Delta})\,\sigma(n_1,\ n_2;\ d(\delta)) \frac{h(\delta^2 \tilde{\Delta})}{w(\delta^2 \tilde{\Delta})}, \tag{7.10}$$

где $\Delta = \Delta(t) = t^2 - 4n_1n_2 = f^2\tilde{\Delta}$, $d(\delta) = (b, f/\delta)$ и b — наибольшее натуральное число с условием $b^2 \mid (t^2, n_1n_2)$, Принимая во внимание соотношения из доказательства леммы 6.3, заключаем

$$A(t;\ n_1,\ n_2) = \varkappa(\tilde{\Delta})\,\frac{h(\tilde{\Delta})}{w(\tilde{\Delta})} \sum_{\delta \mid f;\ (\delta,\ d)=1} \sigma(n_1\ n_2;\ d(\delta))\cdot\varphi(\delta;\ \chi). \tag{7.11}$$

Наконец, сопоставляя (7.1) и (7.10), выводим

$$\mathcal{I}(s) = 2^{\rho(n_1,\ n_2)-1} A(t;\ n_1,\ n_2). \tag{7.12}$$

§ 8. Вычисление следа оператора Гекке T (n₁, n₂)

8.1. Лемма 8.1. *Каждый класс $[t_1,\ t_2]$, отвечающий по лемме 5.1 классу $\{s\}$ $(s \in S_{\Phi}^{+}(\mathfrak{A}))$, может быть получен при подходящем выборе $(m,\ \nu) : m \mid d$ и $\iota^{\nu} \in I_A/\{n_1,\ n_2\}$, где $\{n_1,\ n_2\}$ — произведение подгрупп $\{n_1,\ n_2\}_0$ и $\{1,\ \iota\}$, порожденной элементом $\iota = (\iota,\ \iota,\ \ldots)$. Различные пары $(m,\ \nu)$ определяют различные классы $[t_1,\ t_2]$, причем только классы с условием $m \mid t_i$ $(i = 1,\ 2)$ могут давать ненулевой вклад в формулу следа.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Если $m \nmid t_i$, то $\Delta_i < 0$ и, значит, класс $[t_1,\ t_2]$ второго или третьего типа. Поэтому, согласно (6.15), (6.19), и (6.17), его вклад $\mathcal{I}(s) = 0$, так как $\varkappa(\tilde{\Delta}_i) = 0$. ●

Полученное описание классов $[t_1,\ t_2]$ позволяет доказать

Предложение 8.1. *Пусть* $\mathrm{Tr}^{+}(T(n_1,\ n_2))$ — *общий вклад в формулу следа всех классов $\{s\}$ элементов $s \in S_{\Phi}^{+}(\mathfrak{A})$ и* $\mathrm{Tr}_j^{+}(T(n_1,\ n_2))$ *определены в теореме 1.1. Тогда выполняется формула*

$$\mathrm{Tr}^{+}(T(n_1,\ n_2)) = \sum_{1\leqslant j\leqslant 3} \mathrm{Tr}_j^{+}(T(n_1,\ n_2)). \tag{8.1}$$

Доказательство. Проверим, что в сумме (8.1) j-й член равен общему вкладу в формулу следа всех классов $\{s\}$ j-го типа, т. е.

$$\mathrm{Tr}_j^{+} = \mathrm{Tr}_j^{+}(T(n_1,\ n_2)) = \sum_{m \mid d} \sum_{\nu} \sum_{[t_1,\ t_2] \in (j)} \mathcal{I}(s), \tag{8.2}$$

где $[t_1,\ t_2]$ пробегают все классы j-го типа с фиксированными m, ν и $m \mid t_i$ $(i = 1,\ 2)$. Если $j = 1$, то по лемме 5.1 и по определению типов в начале § 6 можем считать, например, $t_1 = +2\sqrt{n_1'}$, $t_2 = \pm 2\sqrt{n_2'}$, откуда, по (8.2) и (6.4) следует формула (1.7). Если $j = 2$, то во внутренней сумме (8.2) $|t_1| < 2\sqrt{n_1'}$, $t_2 = +2\sqrt{n_2'}$; и еще $t_1 = +2\sqrt{n_1'}$, $|t_2| < 2\sqrt{n_2'}$ при условии $n_1 \neq n_2$. Поэтому, используя функцию $\delta(n_1,\ n_2)$, из (1.8), (6.15) и (8.2) получаем, что Tr_2^{+} равно

$$\delta(n_1,\ n_2)\, 2^{1-e} W \sum_{m \mid d} \sum_{\nu} \Big(\varepsilon_d(n_2') \sum_{|t_1| < 2\sqrt{n_1'}} A(t_1,\ n_1') +$$

$$+ \varepsilon_d(n_1') \sum_{|t_2| < 2\sqrt{n_2'}} A(t_2,\ n_2')\Big).$$

Отсюда и из (1.1) вытекает (1.8). Пусть теперь $j = 3$ и $n_1 \neq n_2$. Тогда в силу (6.19) и (8.2) Tr_3^{+} равно

$$\sum_{m \mid d} \sum_{\nu} \left(\sum_{\substack{0<t_1<2\sqrt{n_1'} \\ 0<t_2<2\sqrt{n_2'}}} + \sum_{\substack{t_1=0 \\ 0<t_2<2\sqrt{n_2'}}} + \sum_{\substack{0<t_1<2\sqrt{n_1'} \\ t_2=0}} + \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} \right) \mathcal{I}(s) =$$

$$= 2^{1-e} \sum_{m \mid d} \sum_{\nu} \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{|t_i| < 2\sqrt{n_i} \\ (i=1,\,2)}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_i = 0 \\ (i=1,\,2)}} \right) \varepsilon([t_1,\ t_2])\, A(t_1,\ n_1')\, A(t_2,\ n_2'),$$

что ввиду определений (1.1) и (1.2) равносильно (1.9). В случае же $n_1 = n_2 = n$ имеем

$$\mathrm{Tr}_3^+ = \sum_{m \mid d} \left(\sum_{0 < t_1 \leqslant |t_2| < 2\sqrt{mn}} + \sum_{\substack{t_1 = 0 \\ 0 < t_2 < 2\sqrt{mn}}} + \sum_{\substack{t_1 = 0 \\ t_2 = 0}} \right) \mathscr{I}(s) =$$

$$= 2^{-1-e} \sum_{m \mid d} \sum_{\substack{0 < |t_i| < 2\sqrt{mn} \\ (i=1,\,2)}} A(t_1,\ mn) \cdot A(t_2,\ mn)$$

и, значит, справедлива формула (1.10). ●

8.2. Согласно п. 7.1, классы $\{s\}$ $(s \in S_{\mathfrak{Q}}^-(\mathfrak{A}))$, которые могут давать ненулевой вклад $\mathscr{I}(s)$ в формулу следа, параметризуются t с условием $\Delta = t^2 - 4n_1n_2 \leqslant 0$. Для $\Delta = 0$ и $\Delta < 0$ вклад $\mathscr{I}(s)$ был вычислен в (7.7) и (7.12). Складывая все $\mathscr{I}(s)$, получаем

Предложение 8.2. *Общий вклад* $\mathrm{Tr}^-(T(n_1,\ n_2))$ *в формулу следа всех классов* $\{s\}$ *элементов* $s \in S_{\mathfrak{Q}}^-(\mathfrak{A})$ *равен*

$$\varepsilon(n_1n_2)\,\sigma\left(n_1,\ n_2;\ \sqrt{n_1n_2}\right) 2^{\rho(n_1,\,n_2)} W + 2^{\rho(n_1,\,n_2)-1} \sum_{|t| < 2\sqrt{n_1n_2}} A(t;\ n_1,\ n_2).$$

Из предложений 8.1 и 8.2 следует теорема 1.1.

Список литературы

[1] *Андрианов А. Н.* Представления четной дзета-функции на тета-рядах//Зап. научн. семинаров ЛОМИ. *1984*. Т. 134. С. 5—14.

[2] *Андрианов А. Н.* Вычисление коэффициентов в формулах преобразования неоднородных тета-рядов под действием операторов Гекке//Зап. научн. семинаров ЛОМИ. *1987*. Т. 160. С. 9—15.

[3] *Андрианов А. Н.* Сферические тета-ряды//Мат. сб. *1987*. Т. 134 (176). С. 291—305.

[4] *Rallis S.* The Eichler commutation relation and the continuous spectrum of the Weil representation. Berlin: Springer, Lecture notes in Math. *1979*. Vol. 728. P. 211—244.

[5] *Журавлев В. Г.* Явные формулы двойственности симплектических и ортогональных операторов Гекке на тета-рядах положительных квадратичных форм//Мат. сб. *1986*. Т. 130 (172). С. 413—430.

[6] *Андрианов А. Н.* Операторы Гекке и представления бинарных квадратичных форм//Тр. МИАН СССР. *1984*. Т. 165. С. 4—15.

[7] *Eichler M.* Zur Zahlentheorie der Quaternionen—Algebren//J. reine angew. Math. *1956*. Bd 195. S. 127—151.

[8] *Eichler M.* The basis problem for modular forms and the trace of the Hecke operators. Berlin: Springer, Lecture notes in Math. *1973*. Vol. 320. P. 75—152.

[9] *Ponomarev P.* Class number of definite quaternary forms with square discriminant// J. Number Th. *1974*. Vol. 6. P. 291—317.

[10] *O'Meara O. T.* Introduction to quadratic forms. Berlin: Springer, *1963*.

[11] *Tamagawa T.* On Selberg's trace formula//J. Fac. Univ. Tokyo. Sec. I. A. *1960*. Vol. 8. P. 363—386.

[12] *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, *1985*.

[13] *Шимура Г.* Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М.: Мир, *1973*.

Владимирский педагогический институт
им. П. И. Лебедева-Полянского
600024, Владимир, пр. Строителей, 11

Поступило 12 апреля 1989 г.