А. Н. Зубков, А. С. Штерн, Об одной гипотезе О. И. Тавгеня,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 93–99

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 512.546.37

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ О. И. ТАВГЕНЯ

А. Н. Зубков, А. С. Штерн

Когда амальгамированное произведение двух групп линейно? Этот вопрос отмечен как известный и важный в статье Басса [1]. О. И. Тавгенем в его замечательной работе [2] была сформулирована

Гипотеза 1. *Пусть* $G = G_1 \underset{H}{*} G_2$, *причем* $H \triangleleft G_i$, $i = 1, 2$. *Предположим, что в каждой группе* G_i *существует* p*-конгруэнц система (в смысле* [3]*)* $G_i^{(1)} \supset G_i^{(2)} \supset \ldots \supset G_i^{(k)} \supset \ldots$ *такая, что*

(1) $G_i^{(1)}/G_i^{(k)}$ *имеет конечную ширину* $\leqslant C$ *для всех* $k \geqslant 1$, $i = 1, 2$,

(2) $G_1^{(k)} \cap H = G_2^{(k)} \cap H$ *для всех* $k \geqslant 1$,

(3) $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} HG_1^{(k)} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} HG_2^{(k)}$.

Тогда G *линейна.*

Привлекая аппарат аналитических про-p-групп, О. И. Тавгень показал, что сформулированная выше гипотеза следует из свойства пополненной групповой алгебры $Z_p[[G]]$ быть почти Артина — Риса алгеброй [2] для любой аналитической про-p-группы G. Последнее может быть переформулировано как

Гипотеза 2. *Пусть* G *— аналитическая про-*p*-группа,* M *— (топологический) конечнопорожденный* $Z_p[[G]]$*-модуль без* Z_p*-кручения (т. е.* M *свободен как абелева про-*p*-группа). Пусть* U *— замкнутый подмодуль в* M *такой, что* $\dim_{Z_p} U < \infty$. *Тогда найдется замкнутый подмодуль* $N \subseteq M$ *такой, что* $N \cap U = 0$ *и* $\dim_{Z_p} M/N < \infty$.

Ниже будет показано, что гипотеза 2 неверна уже в случае, когда G — произвольная аналитическая про-p-группа с полупростой расщепляемой (над Q_p) алгеброй Ли g.

Идея доказательства очень проста. Мы рассмотрим дуальный к некоторому g-модулю Верма. Затем в про-p-пополнении этого модуля определим действие G. Далее построим пару подмодулей M, U, как в гипотезе 2, причем они будут содержать G'-подмодули M', U', где G' изоморфна открытой подгруппе в $SL_2(Z_p)$, так, что если подмодуль N есть в M, то такой же подмодуль N' есть в M'. Таким образом, мы редуцируем ситуацию к $SL_2(Z_p)$. Используя работу Лазара [4], мы сведем все к элементарным вычислениям в некотором модуле Верма над $sl_2(Z_p)$.

Интересно выяснить, для каких G гипотеза 2 имеет место. Например, верна ли она для разрешимых про-p-групп? О. И. Тавгень доказал, что гипотеза 2 верна для нильпотентных групп [2]. Кроме того, отрицательный ответ на гипотезу 2 не исключает гипотезы 1, которая вполне может оказаться верной.

Построение контрпримера. Согласно замечанию из [2] в условиях гипотезы 2 переход от группы к подгруппе конечного индекса ничего не меняет. Мы будем пользоваться этим замечанием, не оговаривая его каждый раз особо. В частности, если две аналитические про-p-группы имеют изоморфные алгебры Ли, то они изоморфны с «точностью» до подгрупп конечного индекса [4], поэтому для них гипотеза 2 выполняется (или не выполняется) одновременно.

Начнем с некоторых определений из [4]. Кольцо Ω с отображением $v : \Omega \to R_+ \cup \{\infty\}$, удовлетворяющим аксиомам

1) $v(\lambda - \nu) \geqslant \min\{v(\lambda), v(\nu)\}\ \forall \lambda, \nu \in \Omega$,

2) $v(\lambda\nu) \geqslant v(\lambda) + v(\nu)\ \forall \lambda, \nu \in \Omega$,

3) $v(1) = 0$,

называется *фильтрованным кольцом.* Будем предполагать, что фильтрация отделима. Это означает, что $v(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Модуль M над фильтрованным кольцом (Ω, v) называется *фильтрованным*, если на нем определено отображение $w : M \to R_+ \cup \{\infty\}$ такое, что

1) $w(x - y) \geqslant \min\{w(x), w(y)\}\ \forall x, y \in M$,

2) $w(\lambda x) \geqslant v(\lambda) + w(x)\ \forall \lambda \in \Omega, x \in M$.

Будем предполагать, что все фильтрации отделимы. Это означает, что $v(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Кольцо (или модуль) называется *нормированным*, если во второй аксиоме неравенство заменяется равенством. Однако во избежание недоразумений отметим, что нормированная Ω-алгебра — это просто Ω-алгебра, которая является одновременно фильтрованным кольцом и нормированным Ω-модулем. Ясно, что нормированное кольцо не имеет делителей нуля. Пусть Ω — нормированное кольцо и M — нормированный Ω-модуль. Модуль M называется *делимым*, если из условия $w(x) \geqslant v(\lambda)$ следует, что $x = \lambda y$ для подходящего $y \in M$. Обозначим через K поле частных кольца Ω. На $K \otimes_\Omega M$ корректно определена фильтрация $w'(\lambda^{-1} \otimes x) = w(x) - v(\lambda)$, $x \in M$, $\lambda \in \Omega \setminus 0$. Несложно проверить, что подмодуль $M' = \{y \in K \otimes_\Omega M \mid w'(y) \geqslant 0\}$ является делимым Ω-модулем. Модуль M' будем обозначать через $\operatorname{div}(M)$. Фильтрованный модуль называется *насыщенным*, если он делимый и полный в топологии, определенной фильтрацией. Пополнение делимого — насыщенный модуль, но не всегда div от полного дает насыщенный модуль. Пополнение модуля $\operatorname{div}(M)$ будем обозначать через $\operatorname{Sat}(M)$. Подробнее о свойствах функторов div и Sat см. [4, гл. 1].

Далее, в категории групп тоже можно определить фильтрованные объекты. Именно, группа G с отображением $v : G \to R_+^* \cup \{\infty\}$, удовлетворяющим аксиомам

$$v(xy^{-1}) \geqslant \min\{v(x), v(y)\} \quad \forall x, y \in G,$$

$$v([x, y]) \geqslant v(x) + v(y) \quad \forall x, y \in G,\ [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy,$$

называется *фильтрованной.* Если p — фиксированное простое число, то группа называется *p-нормированной*, если выполняются еще две аксиомы:

$$(p-1)^{-1} < v(x) < \infty \quad \forall x \in G \setminus 1, \quad v(x^p) = v(x) + 1\ \forall x \in G.$$

Если к тому же

$$v(x) > 1 + (p-1)^{-1} \Longrightarrow \exists y \in G,\ y^p = x,$$

то группа называется *p-делимой.* Наконец, p-делимая полная группа называется *p-насыщенной.* Более полную информацию можно найти в [4, гл. 3].

Перечислим некоторые необходимые определения и обозначения из [5]. Пусть R — система корней полупростой расщепляемой алгебры Ли (g, h), h — фиксированная подалгебра Картана в g, $R \subseteq h^*$, B —

базис R, R_+, R_- — множества положительных и отрицательных корней относительно B, P_{++} — множество доминантных (старших) весов. Положим также

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\alpha, \quad n_+ = \sum_{\alpha\in R_+} g^\alpha, \quad n_- = \sum_{\alpha\in R_-} g^\alpha, \quad b_+ = h + n_+, \quad b_- = h + n_-.$$

Фиксируем некоторый базис Шевалле X_α, $\alpha \in R$, $H_i = H_{\lambda_i}$, $\{\lambda_i \mid i = 1,\dots,k\} = B$ [6]. Все структурные константы алгебры g относительно этого базиса целые. Тогда

$$g^b = \sum_{\alpha\in R} Z_p X_\alpha + \sum_{i=1}^{i=k} Z_p H_i$$

будет Z_p-алгеброй Ли. Рассмотрим модуль Верма $M(\lambda+\delta), \lambda \in P_{++}$. Его можно отождествить с модулем $U(g)\otimes_{U(b_+)} Q_p$, где Q_p — одномерный b_+-модуль, относительно действия $(x+y)(1) = \lambda(x)\cdot 1$, $x \in h$, $y \in n_+$. Базис $M(\lambda+\delta)$ состоит из элементов вида

$$w_{p_1,\dots,p_t} = X_{-\alpha_1}^{p_1}\dots X_{-\alpha_t}^{p_t} \otimes 1,$$

где $\{\alpha_1,\dots,\alpha_t\}$ — некоторое фиксированное упорядочение множества R_+. Сумму коэффициентов в записи корня $\alpha \in R$ через базу B будем обозначать символом $l(\alpha)$. *Длиной элемента* $w_{p_1,\dots,p_t}$ назовем число $l(w_{p_1,\dots,p_t}) = \sum_{1\leqslant i\leqslant t} p_i l(\alpha_i)$. По определению $l(0) = +\infty$. Наконец,

$$l\Big(\sum_{p_1,\dots,p_t} \beta_{p_1,\dots,p_t} w_{p_1,\dots,p_t}\Big) = \min_{p_1,\dots,p_t} l(w_{p_1,\dots,p_t}).$$

Лемма 1. *Пусть $w = w_{p_1,\dots,p_t}$, $\alpha \in R_+$. Если $X_\alpha w \neq 0$, то $l(w) \geqslant l(\alpha)$ и $l(X_\alpha w) = l(w) - l(\alpha)$. Аналогично если $X_{-\alpha} w \neq 0$, то $l(X_{-\alpha} w) = l(w) + l(\alpha)$.*

Доказательство. Согласно предложению 7.1.6 из [5] для произвольного $H \in h$ имеем

$$H(X_\alpha w) = \left(\lambda - \sum_{i=1}^{i=t} p_i\alpha_i + \alpha\right)(H) X_\alpha w.$$

С другой стороны, так как $X_\alpha w$ — (целочисленная) комбинация элементов вида $X_{-\alpha_1}^{q_1}\dots X_{-\alpha_t}^{q_t}\otimes 1$, то, сравнивая веса, получаем

$$\alpha - \sum_{i=1}^{i=t} p_i\alpha_i = -\sum_{i=1}^{i=t} q_i\alpha_i.$$

Отсюда ясно, что $l(w) \geqslant l(\alpha)$ и $l(X_\alpha w) = l(w) - l(\alpha)$. Для $X_{-\alpha}$ все рассуждения повторяются дословно. Лемма доказана.

Отметим одно полезное соотношение, которое легко выводится индукцией по параметру m:

$$X_\alpha(X_{-\alpha}^m \otimes 1) = m(\lambda(H_\alpha) - m + 1) X_{-\alpha}^{m-1} \otimes 1.$$

Число $\lambda(H_\alpha)$ всегда целое [6].

Пусть $\{w^*_{p_1,\dots,p_t} \mid p_1 \geqslant 0,\dots,p_t \geqslant 0\}$ — база модуля $M(\lambda+\delta)^*$, дуальная к $\{w_{p_1,\dots,p_t} \mid p_1 \geqslant 0,\dots,p_t \geqslant 0\}$. Для простоты обозначим элемент $w_{0,\dots,0}$ через v. Тогда нетрудно показать, что g-подмодуль, порожденный элементом v^*, конечномерен. Нужно только проверить, что

$n_-v^* = 0$ и $X_\alpha^m v^* = 0$ для достаточно большого m (вообще говоря, зависящего от α) и всех $\alpha \in B$. По лемме 7.2.4 из [5] это означает, что модуль $U(g)v^*$ простой и конечномерный. Предположим, что $X_{-\alpha}v^* \neq 0$ для некоторого $\alpha \in R_+$. Другими словами, существует элемент базиса w такой, что $v^*(X_{-\alpha}w) \neq 0$. В частности, $X_{-\alpha}w \neq 0$. По лемме 1 $l(X_{-\alpha}w) > 0$. Но $X_{-\alpha}(w)$ согласно определению v^* должно быть равно νv, $\nu \neq 0$. Поэтому $l(X_{-\alpha}w) = 0$; противоречие. Далее, пусть $\alpha \in B$, K — наибольший g-подмодуль в $M(\lambda+\delta)$ [5]. По лемме 7.2.5 из [5] $X_{-\alpha}^m w \in K$, где $m = \lambda(H_\alpha) + 1$, но $v \notin K$. Как и выше, $X_\alpha^m w \neq 0$ для подходящего базисного w. Более того, $X_\alpha^m w = \nu v$. Сравнивая веса, как в лемме 1, и учитывая то, что $\alpha \in B$, видим, что вес w равен $\lambda - m\alpha$. Другими словами, $w = X_{-\alpha}^m v$ и $w \in K$. Но тогда и $v \in K$; противоречие.

Все дальнейшие рассуждения будут происходить над кольцом коэффициентов Z_p. Поэтому для упрощения обозначений мы будем обозначать g^b той же буквой g. Z_p-подмодуль, натянутый на векторы дуального базиса, обозначим через S. Ясно, что это g-модуль.

Определим в S топологию при помощи базиса окрестностей нуля $\{S_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, где

$$S_{n,k} = \Big\{\sum_w b_w w^* \mid b_w \equiv 0(\mathrm{mod} p^k) \text{ для } w \text{ с } l(w) < t\Big\}.$$

Здесь почти все b_w равны нулю. Пополнение S в этой топологии обозначим через $\widehat{S}$. Ясно, что $\widehat{S}$ — свободная абелева про-p-группа с топологическим базисом $\{w^*\}$. Другими словами, любой элемент $\widehat{S}$ однозначно записывается в виде ряда $\sum\limits_w b_w w^*$. Алгебра g является нормированной Z_p-алгеброй Ли относительно фильтрации $u : g \to R_+ \cup \{\infty\}$, где $u(x) = n \leftrightarrow x \in p^n g \backslash p^{n+1} g$. Более того, несложно посчитать, что $\widehat{S}$ насыщен относительно фильтрации $\{p^n \widehat{S}\}_{n=1}^{\infty}$, так как он без кручения и полон в p-адической топологии (см. [7, замечание на с. 192]). Заметим, что p-адическая топология сильнее про-p-топологии $\widehat{S}$.

Универсальная обертывающая Z_p-алгебра $U(g)$ будет нормированной Z_p-алгеброй, причем вложение $g \to U(g)$ является изометрией и $U(g)$ нормировано как кольцо [4, гл. 4, 2.2.5]. Соответствующее отображение из $U(g)$ в $R_+ \cup \{\infty\}$ обозначим через f. База

$$\{X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_t}^{p_t} H_1^{r_1} \dots H_k^{r_k} X_{\alpha_1}^{q_1} \dots X_{\alpha_t}^{q_t} \mid p_1, \dots, p_t, r_1, \dots, r_k, q_1, \dots, q_t \geqslant 0\}$$

будет фильтрованно свободной в $U(g)$, т. е.

$$f\Big(\sum_{p,r,q} \lambda_{p,r,q} X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_t}^{p_t} H_1^{r_1} \dots H_k^{r_k} X_{\alpha_1}^{q_1} \dots X_{\alpha_t}^{q_t}\Big) = \inf_{p,r,q}\{v_p(\lambda_{p,r,q})\}$$

[4, гл. 4, 2.2.7]. Здесь v_p — стандартная фильтрация на Z_p. Отсюда несложно вывести, что $\widehat{S}$ превращается в фильтрованный $U(g)$-модуль, а в силу насыщенности и в фильтрованный $\mathrm{Sat}\, U(g)$-модуль [4, гл. 1, 2.2.9, 2.2.10]. Так как $\mathrm{Sat}\, U(g)$ — диагональная насыщенная алгебра, то $G = \exp(p^s g) \leqslant \mathrm{Sat}\, U(g)^*$ — насыщенная подгруппа (если $p > 2$, то $s = 1$, иначе $s = 2$ [4, гл. 4, 1.3.5, 3.1.4]). В [4] также показано, что G представимо в виде произведения «однопараметрических» подгрупп. Именно, любой элемент группы G однозначно записывается в виде упорядоченного произведения p-адических степеней элементов $\exp(p^s z)$, где z пробегает базис Шевалле алгебры g. В терминологии из [4] это означает, что элементы $\exp(p^s z)$ образуют упорядоченную базу G. Более того, фильтрация на G определяется по правилу

$$v\Big(\prod_z \exp(p^s z)^{\lambda_z}\Big) = \inf_z\{s + v_p(\lambda_z)\}.$$

Следовательно, по критерию аналитичности из [8] G — аналитическая про-p-группа с алгеброй Ли $Q_p \otimes g$ [4, гл. 3, 2.1.9].

Ясно, что G действует на $\widehat{S}$ по формуле

$$\exp(p^s x) \cdot z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(p^s x)^i}{i!} \cdot z, \quad x \in g, \ z \in \widehat{S}.$$

При этом $(G_n - 1) \cdot \widehat{S} \subseteq p^n \widehat{S}$ и $(G-1)^n \cdot \widehat{S} \subseteq p^n \widehat{S}$ для всех $n \geqslant 1$. Здесь $G_n = \{x \in G \mid v(x) \geqslant n\}$. Таким образом, $\widehat{S}$ — топологический G-модуль относительно обеих топологий. Ясно также, что $\operatorname{Sat} U(g)v^*$ — конечномерный подмодуль в $\widehat{S}$. Обозначим его через U. Понятно, что это и G-модуль.

Фиксируем $\alpha \in B$ и $m = \lambda(H_\alpha) + 1$. Пусть A — замкнутый G-подмодуль в $\widehat{S}$, порожденный $(X_{-\alpha}^m(v))^*$ и U. Обозначим $X_{-\alpha}^i(v)$ через v_i, $i = 1, 2, \ldots$. Параметр $\lambda(H_\alpha) \geqslant 0$ обозначим через n. Тогда $m = n + 1$. В силу сделанного выше замечания

$$X_\alpha v_i = i(n - i + 1)v_{i-1}, \quad X_{-\alpha} v_i = v_{i+1}, \quad H_\alpha v_i = (n - 2i)v_i.$$

Введем еще Z_p-подалгебру $g_0 = Z_p X_{-\alpha} + Z_p X_\alpha + Z_p H_\alpha$. Ясно, что g_0 изоморфна $sl_2(Z_p)$ [5]. Как нормированная Z_p-алгебра, g_0 изометрично вкладывается в g. Более того, это вложение очевидным образом продолжается до изометрий $U(g_0) \to U(g)$ и $\operatorname{Sat} U(g_0) \to \operatorname{Sat} U(g)$. Фактически фильтрованно свободная база $U(g_0)$ является частью базы $U(g)$. Отсюда следует, что группа $G_0 = \exp(p^s g_0)$ канонически отождествляется с замкнутой подгруппой группы G. Теперь заметим, что на дуальном базисе имеют место соотношения

$$X_\alpha v_i^* = -(i+1)(n-i)v_{i+1}^*, \quad X_{-\alpha} v_i^* = -v_{i-1}^*, \quad H_\alpha v_i^* = -(n-2i)v_i^*.$$

Если теперь определить U_0 как g_0-подмодуль, порожденный $v^* = v_0^*$, а A_0 как G_0-подмодуль, порожденный U_0 и v_{n+1}^*, то A_0 (и тем более A) бесконечномерен и $U_0 \subseteq U$.

Предположим, что в A есть G-подмодуль конечной коразмерности, скажем N, причем $N \cap U = 0$. Тогда $N_0 = N \cap A_0$ имеет конечную коразмерность в A_0 и $N_0 \cap U_0 = 0$. Таким образом, задача сводится к $SL_2(Z_p)$. Далее мы опускаем индекс 0. Без потери общности можно предполагать, что $A/N \cong Z_p^r$, где $0 < r < \infty$. Относительно индуцированной из $\widehat{S}$ фильтрации A и N будут нормированными Z_p-модулями. Из определения функтора div и того, что Z_p — целостное кольцо главных идеалов, имеем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{div} N \to \operatorname{div} A \to Q_p \otimes (A/N) = Q_p^r.$$

Поэтому $\operatorname{div} A / \operatorname{div} N \cong Z_p^t$, где $0 < t \leqslant r$ (A/N без кручения!).

Обозначим div$A$ и div$N$ через D и L соответственно. Ясно, что $D_n = \{r \in D \mid w(r) = n\} = p^n D = D \cap p^n \widehat{S}$ (аналогично для L). Градуированный $F_p[t]$-модуль $\bigoplus_{n=0}^{\infty} D_n/D_{n+1}$, где t действует посредством умножения на p, без кручения. Значит, он свободен и, более того, так как $D_n/D_{n+1} = t^n \cdot (D/D_1)$, то его базой будет база D/D_1 как векторного пространства (над F_p). Последнюю разобьем на две части. Именно, пусть $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_t$ — база $D/L + D_1 \cong (D/L)/(L + D_1/L) \cong F_p^t$, а $\{\bar{b}_i \mid i \in I\}$ — база $L + D_1/D_1$, где $a_1, \ldots, a_t \in D$ и $b_i \in L$, $i \in I$. Как и выше, $L_n + D_{n+1}/D_{n+1} = t^n \cdot (L + D_1/D_1)$. Отсюда легко получается, что $\{a_1, \ldots, a_t\} \cup \{b_i \mid i \in I\}$ будет топологической базой пополнения D по фильтрации, а $\{b_i \mid i \in I\}$ — такой же базой для пополнения L [4, гл. 1, 2.1.16]. Другими словами, любой элемент из $\overline{D}$ однозначно записывается в виде $\sum\limits_{i=1}^{t} \lambda_i a_i + \sum\limits_{j \in I} \mu_j b_j$, где значения $v_p(\mu_j)$ сходятся к $+\infty$ по фильтру дополнений к конечным множествам из I. Аналогично этому элементы из $\overline{L}$ имеют вид $\sum\limits_{j \in I} \mu_j b_j$.

В силу сказанного выше о действии группы G легко показать, что $\overline{D} = \mathrm{Sat}(A)$ (как и $\overline{L} = \mathrm{Sat}(N)$) превращается в $\mathrm{Sat}\, Z_p[G] = \mathrm{Sat}\, U(g)$-модуль [4, гл. 4, 3.2.5]. Несколько слов об отождествлении $\mathrm{Sat}\, Z_p[G]$ с $\mathrm{Sat}\, U(g)$. Алгебру $Z_p[G]$ можно снабдить так называемой индуцированной фильтрацией [4, гл. 3, 2.3.1]. По определению это нижняя граница всех фильтраций w на $Z_p[G]$ со свойством $w(x-1) \geqslant v(x)$ $\forall x \in G$. Тогда алгебра $Z_p[G]$ будет иметь фильтрованно свободную базу

$$\left\{\prod_z (\exp(p^s z) - 1)^{\alpha_z} \mid \forall \alpha_z \geqslant 0\right\}$$

[4, гл. 3, 2.3.3]. Отсюда так же, как для $U(g)$, следует, что $\mathrm{Sat}(A)$ (или $\mathrm{Sat}(N)$) — фильтрованный $Z_p[G]$-модуль, а значит, и $\mathrm{Sat}\, Z_p[G]$-модуль. Отметим, что $Z_p[[G]]$ канонически вкладывается в $\mathrm{Sat}\, Z_p[G]$. В $\mathrm{Sat}\, Z_p[G]$ мы можем определить Z_p-алгебру Ли $\log(G) = \{\log(x-1) \mid x \in G\}$. Нетрудно видеть, что она изометрична $p^s g$. Тогда согласно [4, гл. 4, 3.2.5] $\mathrm{Sat}\, U(p^s g) = \mathrm{Sat}\, U(g)$ канонически изометрична $\mathrm{Sat}\, Z_p[G]$. Нам важно только, что $\mathrm{Sat}(A)$ и $\mathrm{Sat}(N)$ суть g-подмодули в $\widehat{S}$.

Рассмотрим Z_p-модуль

$$V = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i v_i^* \mid \lim_{i \to \infty} \alpha_i = 0\right\}.$$

Несложно показать, что V — насыщенный g-подмодуль в $\widehat{S}$. Более того, V является насыщением (по фильтрации) модуля $W = U(g) \cdot v_0^* + U(g) \cdot v_{n+1}^*$. Действительно, $X_\alpha^i v^* = \mu_i v_i^*$, $\mu_i \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. С другой стороны, $A = U + Z_p[[G]] v_{n+1}^*$ в силу компактности $Z_p[[G]]$. В частности, $\mathrm{Sat}(A) \subseteq V$ и $W \subseteq \mathrm{Sat}(A)$. Отсюда $\mathrm{Sat}(A) = V$. Пусть $V^* = \mathrm{Hom}_{Z_p}(V, Z_p)$. Несложно показать, что

$$V^* = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \delta_i \mid \forall \beta_i \in Z_p\right\},$$

где $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$ — дуальный базис к $\{v_i^*\}_{i=0}^{\infty}$. Действительно, произвольный элемент x из V можно представить в виде

$$\sum_{i=0}^{i=k(l)} \alpha_i v_i^* + p^l \Delta.$$

Номер k_l зависит от $l \leqslant 0$. Пусть $f \in V^*$. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=k(l)} \alpha_i f(v_i^*) + p^l f(\Delta) = \sum_{i=0}^{i=k(l)} f(v_i^*) \delta_i(x) + p^l f(\Delta).$$

Увеличивая l, в пределе получим равенство

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f(v_i^*)\delta_i(x).$$

Очевидно, что g действует на базисы $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ одинаково. Поэтому мы будем пользоваться старыми обозначениями.

Пусть w — старший вектор некоторого простого $g \otimes Q_p = sl_2(Q_p)$-подмодуля конечномерного модуля $(V/\operatorname{Sat}(N))^* \otimes Q_p \subseteq V^* \otimes Q_p$. Тогда $X_\alpha w = 0$ и $H_\alpha w = tw$, где $t \geqslant 0$ — старший вес этого подмодуля [5]. Можно предполагать, что $w \in V^*$. Из условия $X_\alpha w = 0$ следует, что $w = \alpha v_0 + \beta v_{n+1}$, а из $H_\alpha w = tw$, что либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$. Однако нетрудно понять, что ни v_0, ни v_{n+1} не порождают конечномерного подмодуля. Полученное противоречие показывает, что A — искомый контрпример к гипотезе 2. Мы доказали даже больше: в A любой (замкнутый) G-подмодуль либо бесконечной коразмерности, либо конечного индекса как абелева подгруппа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bass H.* Groups of integral representation type // Pacific J. Math. 1980. V. 86. P. 15–51.
2. *Tavgen' O. I.* Amalgamated free products of linear groups and Artin — Rees property. Bombay, 1992. (Preprint / Tata Institute of Fundamental Research.)
3. *Lubotzky A.* A group theoretic characterization of linear groups. // J. Algebra. 1988. V. 113. P. 207–214.
4. *Lazard M.* Groups analytiques p-adiques // Publ. Math. IHES. 1965. V. 26. P. 386–603.
5. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.
6. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
7. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
8. *Dixon J., du Sautou M. P. F., Mann A., Segal D.* Analytic pro-p groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. (London Math. Soc. Lecture Notes, Ser. 157.)

г. Омск

Статья поступила 25 ноября 1993 г.,
окончательный вариант — 18 февраля 1994 г.