



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Солев, Условие локальной регулярности,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1992, том 194, 141–149

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

18 марта 2025 г., 03:10:31



УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

Пусть X - стационарный в широком смысле обобщенный процесс со спектральной плотностью f , то есть такой оператор из пространства \mathcal{D} бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в фиксированное гильбертово пространство \mathcal{X} , что

$$(x(\varphi), x(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\omega) \overline{\tilde{\psi}(\omega)} f(\omega) d\omega$$

Здесь (\cdot, \cdot) - скалярное произведение в \mathcal{X} , $\tilde{\varphi}$ - преобразование Фурье функции φ

Обозначим через \mathcal{X}_t подпространство пространства \mathcal{X} , порожденное величинами $x(\varphi)$, $\text{supp } \varphi \subset [-t, t]$. Пусть \mathcal{X}^t - подпространство, построенное по величинам $x(\varphi)$, $\text{supp } \varphi \cap [-t, t] = \emptyset$. В случае, когда $f(\omega) \equiv 1$, подпространства $\mathcal{X}_t, \mathcal{X}^t$ ортогональны и $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_t \oplus \mathcal{X}^t$. Вопрос, на который мы отвечаем в настоящей заметке, состоит в следующем: при наших условиях на спектральную плотность f имеет место представление $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_t + \mathcal{X}^t$. Последнее, очевидно, эквивалентно соотношению

$$\cos(\mathcal{X}_t, \mathcal{X}^t) < 1 \tag{I}$$

где величина $\cos(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+)$ определяется по подпространствам $\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+$ следующим образом

$$\cos(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{H}_- \\ \psi \in \mathcal{H}_+}} \frac{|(\varphi, \psi)|}{\|\varphi\| \|\psi\|}$$

Дадим теперь другую форму условия (I). Пусть \mathcal{X}_* - обобщенный процесс, сопряженный к процессу \mathcal{X} , то есть

1. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_*$
2. $(x(\varphi), x_*(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\omega) \overline{\tilde{\psi}(\omega)} d\omega$

Здесь и далее предполагается, что $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}^* = \mathcal{X}_\infty^*$, а подпространства \mathcal{X}_t^* строятся по процессу \mathcal{X}_* так же, как

соответствующие подпространства \mathcal{X}_\pm по процессу \mathcal{X} . Пусть величина $\sin(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+)$ определяется по подпространствам $\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+$ соотношением

$$\sin(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = \inf_{\psi \in \mathcal{H}_-} \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_+} \frac{|(\varphi, \psi)|}{\|\varphi\| \|\psi\|}$$

Очевидно, величина $\sin(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+)$ - нижняя граница спектра оператора $P_- P_+$, где P_-, P_+ - ортопроекторы на подпространства $\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+$ соответственно. Также ясно, что

$$\sin^2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) + \cos^2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = 1 \quad (2)$$

где \mathcal{H}^+ - ортогональное дополнение к пространству \mathcal{H}_+ .

Из (2) следует, что условие (I) эквивалентно условию

$$\sin(\mathcal{X}_t, \mathcal{X}_t^*) > 0 \quad (3)$$

2. Пусть L_f^2 - L^2 -пространство, построенное по мере $f d\lambda$, а τ - стандартная изометрия: $\mathcal{X} \rightarrow L_f^2$, заданная соотношением $\tau x(\varphi) = \varphi$. Обозначим через $\mathcal{H}_t(f)$ образ при отображении τ подпространства \mathcal{X}_t . По известной альтернативе М.Г. Крейна, [1], если $\mathcal{H}_t(f) \neq L_f^2$, то пространство $\mathcal{H}_t(f)$ состоит из всех целых функций степени не выше t , лежащих в пространстве L_f^2 . Это обстоятельство нам будет удобно положить в определение пространства $\mathcal{H}_t(f)$. То есть, если f неотрицательная функция, будем обозначать через $\mathcal{H}_t(f)$ подпространство пространства L_f^2 , порожденное целыми функциями степени не выше t . Очевидно,

$$\tau \mathcal{X}_t^* = \frac{1}{f} \mathcal{H}_t\left(\frac{1}{f}\right) \quad (4)$$

Поэтому условие (3) переходит в условие

$$0 < \sin(\mathcal{H}_t(f), \frac{1}{f} \mathcal{H}_t(\frac{1}{f})) \quad (5)$$

Предположим, что $\mathcal{H}_t(f) \neq L_f^2$, тогда (см. [1]), функционал $l_2: l_2 \varphi = \varphi(2)$, ограниченный функционал в $\mathcal{H}_t(f)$, так что в этом случае в пространстве $\mathcal{H}_t(f)$ существует воспроизводящее ядро $(\frac{1}{t} \varphi, \mu)$: при $\varphi \in \mathcal{H}_t(f)$

$$(\varphi(\cdot), G_t^f(z, \cdot))_f = \varphi(z)$$

где $(\cdot, \cdot)_f$ скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_t(f)$
 Отметим далее (подробнее см. [2]), что соотношение

$$0 < \inf_t \sin(\mathcal{H}_t(f), \frac{1}{f} \mathcal{H}_t(f))$$

выполняется в том и только в том случае, когда функция f удовлетворяет условию Маккенхаупта:

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I f d\alpha \cdot \frac{1}{|I|} \int_I \frac{1}{f} d\alpha < \infty$$

Пусть μ - мера с плотностью $\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}$. Рассмотрим "ослабленный" вариант условия Маккенхаупта:

$$\sup_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) d\mu(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x-t)} d\mu(t) < \infty \quad (6)$$

ТЕОРЕМА. Пусть спектральная плотность f процесса x удовлетворяет условию $f, 1/f \in L^1_{1/1+t^2}$. Тогда для того, чтобы процесс x удовлетворял условию

$$\sin(x_t, x_t^*) > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы он имел спектральную плотность f , удовлетворяющую условию (6)

Прежде чем перейти к доказательству сформулированной теоремы (его мы дадим в п.4), в пункте 3 мы приведем ряд вспомогательных результатов, касающихся подходящих оценок для воспроизводящих ядер.

3. Прежде всего заметим, что

$$\|e_z\|_f^2 = \|G_t^f(z, \cdot)\|_f^2 = G_t^f(z, z) \quad (7)$$

где $\|\cdot\|_f$ - норма в пространстве L_f^2 .

Пусть $\mathcal{H}(\alpha) \equiv 1$. Напомним некоторые сведения, касающиеся пространства $\mathcal{H}_0(\mathcal{H})$. Пусть φ - целая функция степени не выше t , лежащая в пространстве $\mathcal{H}_0(\mathcal{H})$. Тогда

$$\|\varphi\|_{\Pi}^2 = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(n \frac{\pi}{\sigma})|^2 \quad (8)$$

Система

$$\psi_n(x) = \frac{\sin \sigma(x - \frac{n\pi}{\sigma})}{\sqrt{\pi\sigma} (x - \frac{n\pi}{\sigma})} \quad (n=0, \pm 1, \dots)$$

является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}_\sigma(\Pi)$; воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}_\sigma(\Pi)$ имеет вид:

$$G_\sigma^\Pi(x, y) = \frac{\sin(\sigma x - \sigma y)}{\pi(x - y)}$$

Разложение функции φ , $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma(\Pi)$, по базису

$\{\psi_n\}$

имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \varphi(n \frac{\pi}{\sigma}) \psi_n(x)$$

Обозначим через μ_t вероятностную меру с плотностью

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 tx}{tx^2}$$

ЛЕММА I. Пусть f - неотрицательная функция, $1/f \in L^1_{(1+x)^2}$. Тогда

$$G_t^f(x, x) \leq \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x-x)} d\mu_t(x) \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{f(x)} \frac{\sin t(x-x)}{\pi(x-x)}$$

Ясно, что в условиях леммы $\varphi_2 \in L^2_f$ и при $\varphi \in \mathcal{H}_t(f)$

$$(\varphi, \varphi_2)_f = \varphi(x)$$

Таким образом, $G_t^f(\alpha, \cdot) = P_t(f) \varphi_2$, где $P_t(f)$ ортопроектор в пространстве L_f^2 на подпространство $\mathcal{H}_t(f)$. Отсюда,

$$G_t^f(\alpha, \alpha) = \|G_t^f(\alpha, \cdot)\|_f^2 \leq \|\varphi_2\|_f^2 = \\ = \frac{t}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(\alpha-x)} d\mu_t(x)$$

ЛЕММА 2. Пусть f - неотрицательная функция, $f \in L_{1/1+\alpha^2}$. Тогда

$$G_t^f(\alpha, \alpha) \geq \frac{t}{\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha-x) d\mu_t(x) \right]^{-1} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения воспроизводящего ядра следует, что

$$G_t^f(\alpha, \alpha) \geq \frac{|\varphi(\alpha)|^2}{\| \varphi \|_f^2}, \quad \varphi \in \mathcal{H}_t(f)$$

Теперь, чтобы получить (10) нужно взять $\varphi = \frac{\sin t(\alpha-x)}{\alpha-x}$

ЛЕММА 3. Пусть φ - целая функция степени не выше S , f неотрицательная функция, причем $\ln f, \ln |\varphi| \in L_{1/1+\alpha^2}$. Тогда

$$G_{t+S}^{f/|\varphi|^2}(\alpha, \alpha) \geq G_t^f(\alpha, \alpha) |\varphi(\alpha)|^2 \quad (11)$$

при $t, S > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейное подмножество $\Gamma = \varphi \mathcal{H}_t(f)$ замкнутое подпространство пространства $\mathcal{H}_{t+S}(f/|\varphi|^2)$. Пусть $G_\Gamma(\alpha, \mu)$ - воспроизводящее ядро в Γ . Очевидно, $G_\Gamma(\alpha, \mu) = \overline{\varphi(\alpha)} \varphi(\mu) G_t^f(\alpha, \mu)$. Отсюда, учитывая неравенство

$$G_\Gamma(\alpha, \alpha) \leq G_{t+S}^{f/|\varphi|^2}(\alpha, \alpha)$$

получаем (11).

ЛЕММА 4. Пусть f - неотрицательная функция, $1/f \in L^1$
Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_t^f(x, x) dx \leq \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1

$$\begin{aligned} G_t^f(x, x) &\leq \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x-x)} \frac{\sin^2 tx}{\pi t x^2} dx = \\ &= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x)} \frac{\sin^2 t(x-x)}{\pi t (x-x)^2} dx \end{aligned}$$

Отсюда следует (12), поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t(x-x)}{\pi t (x-x)^2} dx = 1$$

ЛЕММА 5. Пусть f - неотрицательная функция, $\varphi \in L^{1/\mu, \mu, 2}$,
а функция $\varphi \in \mathcal{H}_s(f)$ ($s > 0$). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 G_t^{1/f}(x, x) dx \leq \frac{t+s}{\pi} \|\varphi\|_f^2 \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в условиях леммы $\|\varphi\|_f \in L^{1/\mu, \mu, 2}$. Поэтому выполнены условия леммы 3 и, следовательно,

$$|\varphi(x)|^2 G_t^{1/f}(x, x) \leq G_{t+s}^{1/f \cdot |\varphi|^2}(x, x)$$

Отсюда, учитывая лемму 4, получаем (13).

ЛЕММА 6. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_s(f)$, $t > s$. Тогда

$$G^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t(x-y)}{\pi t (x-y)^2} |\varphi(x)|^2 f(x) dx dy \geq \frac{t-s}{t} \|\varphi\|_f^2 \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A интегральный оператор в пространстве L^2 с ядром $K(x, y)$

$$K(x, y) = \varphi(y) \frac{\sin t(x-y)}{\pi(x-y)} \sqrt{f(x)}$$

Очевидно, $\sigma^2 = \frac{\int_0^t}{t} \|A\|_2^2$, где $\|A\|_2$ - норма Гильберта-Шмидта оператора A . Далее, заметим, что $A = \sqrt{f} P_t(\Pi) \varphi$, где \sqrt{f}, φ - операторы умножения на функции \sqrt{f}, φ соответственно, а $P_t(\Pi)$ - ортопроектор в пространстве L^2 на подпространство $\mathcal{H}_t(\Pi)$. Ясно, что $\|A\|_2 \geq \|A P_{t-s}(\Pi)\|_2$

Поскольку $A P_{t-s}(\Pi) = \sqrt{f} \cdot \varphi P_{t-s}(\Pi)$, то, учитывая известную формулу для ядерной нормы

$$\|P_t(\Pi) h P_t(\Pi)\|_1 = \frac{5}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h dx$$

где h - функция из L^1 , а $\|\cdot\|_1$ - ядерная норма, получаем при $h = |\varphi|^2 f$

$$\|A\|_2^2 \geq \|\sqrt{h} P_{t-s}(\Pi)\|_2^2 = \|P_{t-s}(\Pi) h P_{t-s}(\Pi)\|_1$$

Таким образом, $\sigma^2 \geq \frac{t-s}{t} \|\varphi\|_f^2$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

Необходимость. Пусть выполнено условие(3). Обозначим

$$\varphi_x(x) = \frac{\sin t(x-x)}{\pi(x-x)}, \quad \psi_x(x) = \frac{1}{f(x)} \frac{\sin t(x-x)}{\pi(x-x)}$$

Заметим, что

$$P_t \varphi_x(x) = \frac{1}{f(x)} G_t^{1/f}(x, x), \quad Q_t \psi_x(x) = G_t^f(x, x)$$

где P_t, Q_t - ортопроекторы в пространстве L_f^2 на подпространства $1/f \mathcal{H}_t(1/f), \mathcal{H}_t(f)$ соответственно. Поэтому при условии(3)

$$\|\varphi_x\|_f^2 \leq \|G_t^{1/f}(x, x)\|$$

$$\| \psi_x \|_f^2 \leq m G_t^f(x, x)$$

где m некоторая, не зависящая от x константа.

Остается заметить, что при условии (5)

$$\sup_x G_t^f(x, x) G_t^{1/f}(x, x) < \infty \quad (14)$$

Достаточность. Пусть функция f удовлетворяет условию (6). В этом случае существуют такие константы m и M , не зависящие от x , что

$$m G_t^f(x, x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(\alpha)} d\mu_t(x-\alpha) \leq M G_t^f(x, x) \quad (15)$$

$$m G_t^{1/f}(x, x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\mu_t(x-\alpha) \leq M G_t^{1/f}(x, x) \quad (16)$$

Пусть

$$f_*(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\mu_{\sigma t}(x-\alpha) \quad (17)$$

Как это следует из лемм 5 и 6, при условии (6) нормы $\| \cdot \|_f$ и $\| \cdot \|_{f_*}$ эквивалентны на $\mathcal{H}_t(f)$. Поэтому

$$\| \varphi \|_{f_*} = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(k \frac{\pi}{\sigma} + t)|^2 f_*(k \frac{\pi}{\sigma} + t)$$

при $\sigma > 5t$.

Ввиду соотношений (15), (16) получаем, что нормы

$$\| \varphi \|_* = \sum_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\frac{\pi}{\sigma} k)|^2 G_{\sigma}^{1/f}(\frac{\pi}{\sigma} k, \frac{\pi}{\sigma} k)$$

$$\| \varphi \|_*^* = \sum_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\frac{\pi}{\sigma} k)|^2 G_{\sigma}^f(\frac{\pi}{\sigma} k, \frac{\pi}{\sigma} k)$$

эквивалентны исходным нормам $\|\cdot\|_f$ и $\|\cdot\|_{1/f}$ на подпространствах $\mathcal{H}_t(f)$, $\mathcal{H}_t(1/f)$ соответственно.

Рассмотрим элементы

$$\varphi = \sum_{k \in K} a_k \sqrt{G_{\sigma}^f\left(\frac{\pi}{\sigma}k, \frac{\pi}{\sigma}k\right)} \frac{\sin \sigma\left(x - \frac{\pi}{\sigma}k\right)}{x - \frac{\pi}{\sigma}k}$$

$$\psi = \frac{1}{f(x)} \sum_{k \in K} a_k \sqrt{G_{\sigma}^{1/f}\left(\frac{\pi}{\sigma}k, \frac{\pi}{\sigma}k\right)} \frac{\sin \sigma\left(x - \frac{\pi}{\sigma}k\right)}{x - \frac{\pi}{\sigma}k}$$

Здесь K - конечное подмножество целых чисел.

При условии (6)

$$|(\varphi, \psi)|^2 \geq m \sum_{k \in K} |a_k|^2$$

где m зависит только от функции f и t . Поэтому в силу сказанного о нормах $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_*$ получаем, что косинус угла между φ и ψ в пространстве L_f^2 отделен от нуля равномерно по $a = \{a_j, j \in K\}$ и K . Поскольку функции указанного вида плотны в $\mathcal{H}_t(f)$ и $\frac{1}{f} \mathcal{H}_t(1/f)$, мы приходим к выводу, что

$$\sin\left(\mathcal{H}_t(f), \frac{1}{f} \mathcal{H}_t(1/f)\right) > 0$$

Теорема доказана.

Литература

1. Крейн М.Г. Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов. - Докл. АН СССР, т. 94, 1954.
2. Солев В.Н. Гауссовские $\frac{1}{f}$ -регулярные процессы и асимптотическое поведение функции правдоподобия. - Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1982, т. II 9, с. 203-217.