Н. Г. Мощевитин, Финальные свойства интегралов от условнопериодических функций, связанные с проблемой малых знаменателей, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, номер 5, 94–96

УДК 531.31

**Н. Г. Мощевитин**

# ФИНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ОТ УСЛОВНОПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОБЛЕМОЙ МАЛЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ

Вопрос о поведении интеграла $I(t)=\int\limits_0^t f(\omega_1 t, \ldots, \omega_r t)dt$, где функция $f(x_1, \ldots, x_r)$ определена на торе $T^r$, $\int\limits_{T^r} f(x_1, \ldots, x_r)dx_1\ldots dx_r=0$, а $\omega_1, \ldots, \omega_r\in\mathbf{R}$ несоизмеримы, был поставлен А. Пуанкаре [1]. Особый интерес представляет задача о нулях функции $I(t)$. Пусть $f(0, \ldots, 0)\neq 0$. Известно, что если функция $f(x_1, \ldots, x_r)$ является тригонометрическим полиномом, то $I(t)$ имеет бесконечно много нулей при $t\to\infty$. Кроме того, если линейная форма $m_1\omega_1+\ldots+m_r\omega_r$ допускает оценку снизу на некотором множестве векторов $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$, то для векторов из указанного множества при достаточной гладкости функции $f(x_1, \ldots, x_r)$ справедливо аналогичное утверждение о нулях $I(t)$. В [2] получена теорема о нулях при $r=2$ для любых несоизмеримых $\omega_1$, $\omega_2$ и $f(x_1, x_2)\in C^2(T^2)$. В [3] этот результат обобщен для функций, абсолютно непрерывных на $T^2$. Известные примеры Пуанкаре [1, 2, 4] показывают, что для непрерывных функций теорема о нулях в общем случае не имеет места. Гипотеза В. В. Козлова о нулях интеграла $I(t)$ в случае гладкой функции $f$ с нулевым средним и для несоизмеримого набора частот в настоящее время пока не доказана.

В данной работе получена теорема о нулях для класса векторов $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$, не допускающего оценку снизу линейной формы $m_1\omega_1+\ldots+m_r\omega_r$ и функции $f(x_1, \ldots, x_r)$ определенной гладкости.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x_1, \ldots, x_s)$, $s\geqslant 2$, периодична по каждому из аргументов с периодом единица и для коэффициентов Фурье $F_{m_1,\ldots,m_s}$ этой функции выполняется оценка*

$$|F_{m_1,\ldots,m_s}|\leqslant C(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-s-\varepsilon_0},\quad \overline{m}=\max\{|m|,\ 1\},\ C,\ \varepsilon_0>0 \text{ — константы.}$$

*Кроме того, $\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 F(x_1, \ldots, x_s)dx_1\ldots dx_s=0$. Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s\in\mathbf{R}$ обладают следующим свойством: система неравенств*

$$\left|\alpha_j-\frac{a_j}{p_j\tau_j}\right|<M(p\tau_1\ldots\tau_s)^{-2}\varphi(\tau),\quad j=1, \ldots, s,$$

*где $p=[p_1, \ldots, p_s]$, $\tau=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\tau_j$, $M$ — константа и $\varphi(\tau)\to 0$, $\tau\to\infty$, имеет бесконечно много решений в числах $a_1, \ldots, a_s$; $p_1, \ldots, p_s\in\mathbf{Z}$; $\tau_1, \ldots, \tau_s\in\mathbf{N}$, таких, что $\tau$ принимает сколь угодно большие значения и*

$$(a_i, \tau_i)=1\quad \forall i=1, \ldots, s; \tag{1}$$

$$(p_i, \tau_j)=(\tau_i, \tau_j)=1\quad \forall i,\ j;\ i\neq j; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tau_j \leqslant \gamma_1 \tau \ln^{\gamma_2} \tau \quad \forall j=1, \ldots, s, \\ &p \leqslant \gamma_1 \ln^{\gamma_2} \tau. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

*Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{p\tau_1\ldots\tau_s} F(\alpha_1 k, \ldots, \alpha_s k) = o(1), \ \tau \to \infty.$

Замечание 1. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, обладающие указанными свойствами, составляют в $\mathbf{R}^s$ всюду плотное множество лебеговой меры нуль и мощности континуума. О такого рода результатах см. [5, 6].

Замечание 2. Нетрудно показать, что числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ линейно независимы над $\mathbf{Z}$.

Замечание 3. За счет увеличения гладкости функции $F(x_1, \ldots, x_s)$ можно ослабить требование (3), положив $\tau_j \leqslant \Phi_1(\tau)$, $p \leqslant \Phi_2(\tau)$, где $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$ растут быстрее, чем соответственно $\tau \ln^{\gamma_2}\tau$ и $\ln^{\gamma_2}\tau$.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что

$$\left| \sum_{k=1}^{p\tau_1\ldots\tau_s} F(\alpha_1 k, \ldots, \alpha_s k) - \sum_{k=1}^{p\tau_1\ldots\tau_s} F\left(\frac{a_1 k}{p_1\tau_1}, \ldots, \frac{a_s k}{p_s\tau_s}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 (p\tau_1 \ldots \tau_s)^{-2} \max_j \left|\alpha_j - \frac{a_j}{\rho_j \tau_j}\right| \leqslant C_2 \varphi(\tau).$$

Рассмотрим квадратурную формулу приближенного интегрирования

$$0 = \int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{p\tau_1 \ldots \tau_s} \sum_{k=1}^{p\tau_1\ldots\tau_s} F\left(\frac{a_1 k}{p_1\tau_1}, \ldots, \frac{a_s k}{\rho_s\tau_s}\right) - R$$

и оценим погрешность $R$.

Известна [7] следующая оценка:

$$|R| \leqslant \frac{1}{p\tau_1 \ldots \tau_s} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{s+\varepsilon_0}} \times$$

$$\times \left| \sum_{k=1}^{p\tau_1\ldots\tau_s} \exp\left(2\pi i \left(\frac{m_1 a_1}{p_1\tau_1} + \ldots + \frac{m_s a_s}{p_s\tau_s}\right) k\right)\right|. \tag{4}$$

Очевидно,

$$\frac{1}{p\tau_1 \ldots \tau_s} \sum_{k=1}^{p\tau_1\ldots\tau_s} \exp\left(2\pi i \left(\frac{m_1 a_1}{p_1\tau_1} + \ldots + \frac{m_s a_s}{p_s\tau_s}\right) k\right) =$$

$$= \delta_{p\tau_1\ldots\tau_s}(m_1 a_1 \tau_2 \ldots \tau_s \pi_2 \ldots \pi_s + \ldots + m_s a_s \tau_1 \ldots \tau_{s-1} \pi_1 \ldots \pi_{s-1}),$$

где

$$\pi_j = \frac{p}{p_j} \in \mathbf{Z}, \ (\pi_i, \tau_j) = 1 \quad \forall i, j\colon i \neq j, \tag{5}$$

а $\delta_q(a)=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}k}=\begin{cases}1, & q \mid a;\\ 0, & q\nmid a.\end{cases}$

Предположим

$$\delta_{p\tau_1\ldots\tau_s}(m_1a_1\tau_2\ldots\tau_s\pi_2\ldots\pi_s+\ldots+m_sa_s\tau_1\ldots\tau_{s-1}\pi_1\ldots\pi_{s-1})=1.$$

Тогда

$$p\tau_s\ldots\tau_s \mid m_1a_1\tau_2\ldots\tau_s\pi_2\ldots\pi_s+\ldots+m_sa_s\tau_1\ldots\tau_{s-1}\pi_1\ldots\pi_{s-1}.$$

Учитывая (1), (2), (5), получим $\tau_j \mid m_j$ $\forall j=1, \ldots, s$. Принимая во внимание (4) и соображения делимости, оцениваем погрешность: $|R| \leqslant C_3\tau^{-s-\varepsilon_0}$. В силу (3)

$$\sum_{k=1}^{p\tau_1\ldots\tau_s} F(\alpha_1k, \ldots, \alpha_sk)=o(1)+Rp\tau_1\ldots\tau_s=o(1),\ \tau\to\infty.$$

Теорема доказана.

Рассуждения, аналогичные приведенным в [2], позволяют с помощью теоремы 1 доказать следующую теорему о нулях.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x_1, \ldots, x_{s+1})$, $s\geqslant 2$, *периодична по каждому из аргументов с периодом единица и ее коэффициенты Фурье оцениваются величиной* $C_0(\bar{m}_1\ldots\bar{m}_{s+1})^{-s-\varepsilon_0}$; *кроме того,* $\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1, \ldots, x_{s+1})dx_1\ldots dx_{s+1}=0$ *и* $f(0, \ldots, 0)\neq 0$. *Пусть числа* $\omega_1, \ldots, \omega_{s+1}\in\mathbb{R}$ *таковы, что* $\alpha_j=\frac{\omega_j}{\omega_{s+1}}$, $j=1, \ldots, s$, *удовлетворяют условию теоремы* 1. *Тогда* $I(t)=\int_t^0 f(\omega_1t, \ldots, \omega_{s+1}t)dt$ *имеет бесконечно много нулей при* $t\to\infty$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л., 1947.
2. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М., 1980.
3. Сидоров Е. А. Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем//Успехи матем. наук. 1979. 34, вып. 6. 184—188.
4. Poincare H. Sur les séries trigonomé triques//Comptes Rendus. 1885. **101**, N 2. 1131—1134.
5. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М., 1978.
6. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М., 1977.
7. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.



Поступила в редакцию
18.11.87