V. V. Peller, Applications of ultraproducts in operator theory. A simple proof of E. Bishop's theorem, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 92, 230–240

В.В.Пеллер

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЙ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ. ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БИШОПА

§ I. Введение

В работе [I] Е.Бишоп получил следующее описание субнормальных операторов *) в гильбертовом пространстве: множество субнормальных операторов в гильбертовом пространстве совпадает с замыканием в сильной операторной топологии множества нормальных операторов. При этом нетривиальная часть этой теоремы состоит в доказательстве того, что множество субнормальных операторов сильно замкнуто. Этот факт у Бишопа доказывается довольно сложно.

В этой работе дано простое доказательство теоремы Бишопа, использующее конструкцию ультрапроизведения. Ситуация здесь такова: дана обобщенная последовательность операторов $\{T_\alpha\}$, сходящаяся сильно к оператору T, операторы T_α имеют нормальные расширения N_α; ультрапроизведения позволяют совершить предельный переход в построении нормальных расширений – построить нормальное расширение для оператора T.

Рассматриваются также другие возможности использования ультрапроизведений в тех случаях, когда нужно осуществить предельный переход в построении некоторых конструкций.

Перейдём теперь к определению ультрапроизведения банаховых пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [2]. Пусть Γ – множество, на котором задан ультрафильтр λ (см.[3]) и $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – семейство банаховых пространств. Рассмотрим $\Pi_0(\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ – линейное пространство всех семейств $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ таких, что $f_\gamma\in X_\gamma$ и $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\|f_\gamma\|_{X_\gamma}<+\infty$. Определим на множестве $\Pi_0(\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ полунорму $\|f\|=\lim\limits_\lambda\|f_\gamma\|_{X_\gamma}$ (предел по ультрафильтру существует ввиду компактности промежутка $[0,\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\|f_\gamma\|_{X_\gamma}]$). У л ь т р а п р о и з в е д е н и е м п р о с т р а н с т в X_γ п о у л ь т р а ф и л ь т р у λ называется пространство $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma/\lambda$, полученное в результате пополнения нормированного пространства $\Pi_0(\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})/\{f:\|f\|=0\}$.

---

*) Словом о п е р а т о р мы обозначаем линейное непрерывное преобразование некоторого гильбертова пространства. С у б н о р м а л ь н ы й о п е р а т о р в пространстве $\mathcal{H}$ – это такой оператор T, для которого существует н о р м а л ь н о е р а с ш и р е н и е, т.е. оператор N в пространстве $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}\supset\mathcal{H}$, такой что $N\mathcal{H}\subset\mathcal{H}$ и $N|\mathcal{H}=T$.

Заметим, что, если все пространства X_γ - гильбертовы, то и их ультрапроизведение - гильбертово пространство (скалярное произведение в нем определяется следующим образом: $(f,g)=\lim\limits_{\lambda}(f_\gamma,g_\gamma)$, где $f=\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $g=\{g_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\in\Pi_0(\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$.

В § 2 этой работы доказывается упомянутая теорема Бишопа, а также получены ее аналоги, связанные с существованием коммутирующих нормальных расширений для коммутирующего семейства операторов.

§ 3 посвящён проблеме существования дилатации семейства операторов с заданными свойствами. Показано, в частности, что существование коммутирующей унитарной дилатации для коммутирующего набора сжатий эквивалентно возможности аппроксимации в pw-топологии этого набора сжатий наборами коммутирующих унитарных операторов.

В § 4 дано доказательство теоремы Дж.Вермера [4] о характеризации спектральных мер в гильбертовом пространстве с помощью ультрапроизведений.

В § 5 рассматривается следующий вопрос: дана последовательность операторов $\{T_N\}$, сходящаяся к оператору T; каждый оператор T_N линейно подобен оператору из некоторого класса; когда можно заключить, что и оператор T линейно подобен оператору того же класса?

Я благодарен Н.К.Никольскому за полезные обсуждения.

§ 2. Расширение и аппроксимация в сильной операторной топологии

Здесь будет показано, что в ряде случаев существование расширения из некоторого класса для оператора эквивалентно тому, что этот оператор можно аппроксимировать в сильной операторной топологии операторами того же класса. В частности, будет получено простое доказательство теоремы Е.Бишопа [I].

ТЕОРЕМА I (Е.Бишоп [I]). Сильное замыкание множества нормальных операторов в гильбертовом пространстве совпадает с множеством субнормальных операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T - субнормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, покажем, что его можно аппроксимировать нормальными операторами ж). Поскольку в конечномерном про-

ж) Эта часть теоремы простая, она таким же образом доказывалась и в работе [I]; ее доказательство приведено для полноты изложения.

странстве всякий субнормальный оператор нормален, то можно пространство $\mathcal{H}$ считать бесконечномерным. В этом случае легко видеть, что оператор T имеет нормальное расширение N в пространстве $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}\supset\mathcal{H}$, той же размерности, что и $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{F}$ – конечномерное подпространство $\mathcal{H}$. Тогда существует унитарный оператор $U_{\mathcal{F}}$ пространства $\mathcal{H}$ на $\mathcal{K}$, тождественный на $\mathcal{F}\cup T\mathcal{F}$. Тогда оператор $N_{\mathcal{F}}=U_{\mathcal{F}}^{-1}NU_{\mathcal{F}}$ в пространстве $\mathcal{H}$ нормален и $N_{\mathcal{F}}|\mathcal{F}=T|\mathcal{F}$. Следовательно, $\lim\limits_{\mathcal{F}} N_{\mathcal{F}}=T$ в сильной операторной топологии. Заметим также, что $\|N_{\mathcal{F}}\|=\|N\|$.

Пусть теперь обобщённая последовательность нормальных операторов $\{N_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ сильно сходится к оператору T. Предположим сначала, что $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\|N_\gamma\|<+\infty$; в этом случае доказательство особенно просто.

Пусть λ – ультрафильтр на Γ, который мажорирует фильтр, порожденный множествами $\{\gamma\in\Gamma:\gamma\geqslant\beta\}$, $\beta\in\Gamma$. Вложим изометрически пространство $\mathcal{H}$ в ультрапроизведение $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$ (здесь $\mathcal{H}_\gamma$ – копия $\mathcal{H}$) следующим образом:

$$x\longrightarrow\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\,,\quad x_\gamma=x\,,\quad x\in\mathcal{H}.$$

Определим в $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$ нормальный оператор N равенством

$$N\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=\{N_\gamma x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\,,\ \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\in\Pi_0(\{\mathcal{H}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}).$$

Покажем, что $N|\mathcal{H}=T$. Это означает, что $\lim\limits_{\lambda}\|N_\gamma x-Tx\|=0$, но это так ввиду сильной сходимости $\{N_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ к T. Таким образом, в этом случае теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай. Выделим в пространстве $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$ подпространство $\mathcal{L}$, порождённое элементами

$$\{(N_\gamma^*)^k x\}_{\gamma\in\Gamma}\,,\ x\in\mathcal{H},\ k\geqslant 0.$$

Эти элементы действительно принадлежат $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$, так как $\lim\limits_{\lambda}\|(N_\gamma^*)^k x\|=\lim\limits_{\lambda}\|N_\gamma^k x\|=\|T^k x\|$ ввиду сильной сходимости $\{N_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ к T. Определим оператор N равенством

$$N\{(N_\gamma^*)^k x\}_{\gamma\in\Gamma}=\{N_\gamma(N_\gamma^*)^k x\}_{\gamma\in\Gamma}\ \left(=\{(N_\gamma^*)^k Tx\}_{\gamma\in\Gamma}\right)$$

и продолжим его на линейную оболочку $\mathcal{L}$ рассматриваемого семейства элементов. Тогда легко видеть, что N – нормальный (a priori не обязательно ограниченный). Легко также видеть, что $\mathcal{H}\subset\mathcal{L}$, $N|\mathcal{H}=T$ – ограниченный оператор и множество

$\cup(N^*)^k\mathcal{H}$ порождает $\mathcal{L}$. Отсюда следует, что оператор N ограничен (так как его спектр $\sigma(N)$ содержится в $\sigma(T)$ и, следовательно, $\|N\|\leq\|T\|$; см.[5], задача 157) и является нормальным расширением оператора T . ●

Аналогичным образом можно охарактеризовать те наборы коммутирующих операторов $T_1, T_2, \ldots, T_m$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, которые имеют коммутирующее нормальное расширение, т.е. для которых существуют гильбертово пространство $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}\supset\mathcal{H}$, коммутирующие нормальные операторы $N_1, N_2, \ldots, N_m$ такие, что $N_i|\mathcal{H}=T_i$, $1\leq i\leq m$. Известно, что коммутирующие субнормальные операторы могут не иметь коммутирующих нормальных расширений [6],[7].

ТЕОРЕМА 2. Коммутирующие операторы $T_1, \ldots, T_m$ имеют коммутирующее нормальное расширение тогда и только тогда, когда существует обобщенная последовательность наборов $\{N_{1,\gamma}, \ldots, N_{m,\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ коммутирующих нормальных операторов такая, что $\lim\limits_{\gamma} N_{i,\gamma}=T_i$, $1\leq i\leq m$, в сильной топологии.

Можно следующим образом уточнить теорему 2.

ТЕОРЕМА 2′. Набор операторов $\{T_1, \ldots, T_m\}$ имеет коммутирующее нормальное расширение, совместный спектр которого содержится во множестве K, $K\subset\mathbb{C}^n$, тогда и только тогда, когда этот набор можно аппроксимировать в сильной топологии наборами коммутирующих нормальных операторов с совместными спектрами, содержащимися в K .

Оказывается, что во многих случаях для оператора в гильбертовом пространстве (или для наборов операторов) существование расширения из некоторого класса $\mathcal{P}$ эквивалентно тому, что этот оператор может быть аппроксимирован в сильной топологии операторами из $\mathcal{P}$. Точнее, если класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно операции ультрапроизведения *), относительно сужения на приводящие подпространства и вместе с каждым оператором содержит все унитарно эквивалентные с ним операторы, то имеет место

ТЕОРЕМА 3. Оператор T имеет расширение из класса $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда T можно аппроксимировать в сильной топологии операторами из $\mathcal{P}$.

Аналогичное утверждение имеет место и для наборов операторов. Все эти утверждения доказываются так же, как теорема I.

---

*) Это означает, что, если оператор T_γ в пространстве $\mathcal{H}_\gamma$ принадлежит классу $\mathcal{P}$, $\gamma\in\Gamma$, и λ - ультрафильтр на Γ , то оператор T в пространстве $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$, определяемый равенством $T\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=\{T_\gamma x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, принадлежит классу $\mathcal{P}$.

§ 3. Дилатация и аппроксимация в pw-топологии

В этом параграфе будет показано, что в некоторых случаях существование дилатации заданного класса эквивалентно возможности аппроксимации в pw-топологии элементами того же класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $T=\{T_1,\dots,T_m\}$ – набор коммутирующих операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Набор коммутирующих операторов $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_m\}$ в пространстве $\mathcal{K}, \mathcal{K}\supset\mathcal{H}$, называется д и л а т а ц и е й набора T, если $PU^k|\mathcal{H}=T^k$ при всех мультииндексах $k=\{k_1,\dots,k_m\}$ из $\mathbb{Z}_+^m$, где P – проектор $\mathcal{K}$ на $\mathcal{H}$, $T^k \overset{def}{=} T_1^{k_1},\dots,T_m^{k_m}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщённая последовательность $\{T_\gamma\}$ наборов коммутирующих операторов в $\mathcal{H}$ называется сходящейся к набору $T=\{T_1,\dots,T_m\}$ в pw-т о п о л о г и и, если

$$\lim_\gamma (T_\gamma^k x,y)=(T^k x,y)$$

для любых x,y из $\mathcal{H}$ и любого мультииндекса k.

В частности, эти определения имеют смысл и для одного оператора $(m=1)$.

Пусть $\mathcal{P}$ – класс операторов в гильбертовом пространстве, замкнутый относительно операции ультрапроизведения, относительно сужения на приводящие подпространства и вместе с каждым оператором содержащий все унитарно эквивалентные с ним операторы. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Оператор T в бесконечномерном гильбертовом пространстве имеет дилатацию из класса $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда его можно аппроксимировать в pw-топологии операторами класса $\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$ и оператор $U, U\in\mathcal{P}$, в пространстве $\mathcal{K}$ является унитарной дилатацией оператора T в пространстве $\mathcal{H}$. Поскольку $\mathcal{P}$ замкнут относительно сужения на приводящие подпространства, то можно считать, что пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ изоморфны. Пусть $\mathcal{F}$ – конечномерное подпространство $\mathcal{H}$, $V_\mathcal{F}$ – унитарный оператор $\mathcal{H}$ на $\mathcal{K}$, тождественный на $\mathcal{F}$, $W_\mathcal{F} \overset{def}{=} V_\mathcal{F}^{-1} U V_\mathcal{F}$. Тогда $W_\mathcal{F}\in\mathcal{P}$. Если $x,y\in\mathcal{F}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, то

$$(W_\mathcal{F}^k x,y)=(V_\mathcal{F}^{-1} U^k x,y)=(U^k x,y)=$$

$$=(U^k x,Py)=(PU^k x,y)=(T^k x,y),$$

где P – ортопроектор $\mathcal{K}$ на $\mathcal{H}$. Следовательно, $\lim W_{\mathfrak{F}} = T$ в pw-топологии.

Пусть теперь $\{W_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – pw-сходящаяся к T обобщенная последовательность операторов из $\mathcal{P}$, λ – ультрафильтр на Γ, мажорирующий фильтр, порожденный множествами $\{\gamma\in\Gamma : \gamma \geqslant \beta\}$, $\beta \geqslant \gamma$. Вложим $\mathcal{H}$ в ультрапроизведение $\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/$ ($\mathcal{H}_\gamma$ – копия $\mathcal{H}$) естественным образом

$$x \longrightarrow \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma},\ x_\gamma = x.$$

Определим оператор $\mathcal{U}$ в $\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$ равенством

$$\mathcal{U}\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{W_\gamma x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}.$$

Покажем, что $\mathcal{U}$ – дилатация T. Имеем

$$(\mathcal{U}^k x, y) = \lim_\gamma (W_\gamma^k x, y) = (T^k x, y),\ k\in\mathbb{Z}_+,$$

ввиду pw-сходимости $\{W_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ к T. Следовательно, $P\mathcal{U}^k|\mathcal{H} = T^k$, $k\geqslant 0$, где P – ортопроектор $\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$ на $\mathcal{H}$. Очевидно, дилатацию оператора T из класса $\mathcal{P}$ можно построить и в пространстве, изометричном $\mathcal{H}$. ●

Аналогичное утверждение справедливо и для наборов операторов. В качестве следствия можно получить следующую теорему, которая является характеризацией тех наборов коммутирующих сжатий *), которые имеют коммутирующую унитарную дилатацию. Известно, что набор трех коммутирующих сжатий может не иметь коммутирующей унитарной дилатации (С.Пэрротт, см. 8)).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(T_1, T_2, \ldots, T_m)$ – набор коммутирующих сжатий в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Он имеет коммутирующую унитарную дилатацию тогда и только тогда, когда его можно аппроксимировать коммутирующими наборами унитарных операторов в pw-топологии.

Аналогичным образом можно охарактеризовать наборы операторов, имеющих коммутирующую нормальную дилатацию с совместным спектром, содержащимся в заданном подмножестве $\mathbb{C}^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичная связь между дилатацией и аппроксимацией в pw-топологии имеется и в L^p-пространствах. Например, в пространстве $L^p[0,1]$ оператор T имеет унитарную дилатацию в том и только в том случае, когда его можно аппроксимировать в pw-топологии унитарными операторами. Оба эти ут-

---

*) Оператор T называется сжатием, если $\|T\|\leqslant 1$.

верждения при $p\neq 2$ эквивалентны тому, что существует положительное сжатие $\tilde{T}$ в $L^p[0,1]$ такое, что $|Tf|\leq \tilde{T}|f|$ п.в. при $f\in L^p[0,1]$ (см.[9]).

§ 4. Спектральные меры в гильбертовом пространстве

В этом параграфе мы докажем теорему Дж.Вермера [4], о характеризации наборов коммутирующих спектральных мер в гильбертовом пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ - множество, $\mathfrak{F}$ - σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{M}$, X - банахово пространство. Отображение $\mathcal{E}$ множества $\mathfrak{F}$ во множество проекторов пространства X называется спектральной мерой, если выполнены следующие условия.

1) $\mathcal{E}(\sigma\cap\delta)=\mathcal{E}(\sigma)\mathcal{E}(\delta)$, $\delta,\sigma\in\mathfrak{F}$.

2) $\mathcal{E}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\sigma_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{E}(\sigma_i)$ для дизъюнктного набора $\{\sigma_i\}$, $\sigma_i\in\mathfrak{F}$, где ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{E}(\sigma_i)$ сходится в сильной топологии.

3) $\mathcal{E}(\mathfrak{M})=I$ - единичный оператор.

В этом случае $\sup\limits_{\sigma\in\mathfrak{F}}\|\mathcal{E}(\sigma)\|<+\infty$ (см.[10], стр.23).

Спектральная мера со значениями в гильбертовом пространстве называется ортогональной, если $\mathcal{E}(\sigma)$ - ортогональный проектор для всякого σ из $\mathfrak{F}$.

ТЕОРЕМА 6. [4]. Пусть $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\dots,\mathcal{E}_m$ - коммутирующие спектральные меры в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует такой изоморфизм V пространства $\mathcal{H}$, что все спектральные меры $V^{-1}\mathcal{E}_1V$, $V^{-1}\mathcal{E}_2V,\dots,V^{-1}\mathcal{E}_mV$ ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты приведём доказательство для случая $m=1$. В общем случае доказательство проводится так же.

Пусть $\mathcal{E}$ - спектральная мера на пространстве с σ-алгеброй $(\mathfrak{M},\mathfrak{F})$ и пусть $\|\mathcal{E}(\sigma)\|\leq c$ при $\sigma\in\mathfrak{F}$. Рассмотрим направление Γ всех конечных разбиений $\mathfrak{M}$ на измеримые множества с естественным порядком. Пусть $\gamma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m)\in\Gamma$. Поскольку $\|\mathcal{E}(\bigcup\limits_{i\in A}\sigma_i)\|\leq c$ для всякого подмножества A множества $\{1,2,\dots,m\}$, то по теореме Кёте-Тёплица о безусловных базисах в гильбертовом пространстве (см.[11]).

$$\frac{1}{2c}\Big(\sum\|x_i\|^2\Big)^{1/2}\leq\Big\|\sum_{1\leq i\leq m}x_i\Big\|\leq 2c\Big(\sum\|x_i\|^2\Big)^{1/2}, \qquad (1)$$

если $x_i\in\mathcal{E}(\sigma_i)\mathcal{H}$.

Положим $\mathcal{H}_\gamma = \sum_{1\le i\le m} \oplus\, \varepsilon(\sigma_i)$, $V_\gamma : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_\gamma$, $V_\gamma x \stackrel{def}{=} \sum_{1\le i\le n} \oplus\, \varepsilon(\sigma_i) x \in \mathcal{H}_\gamma$. Тогда из (I) следует, что $|V_\gamma| \le 2c$ и $|V_\gamma^{-1}| \le 2c$.

Пусть λ – ультрафильтр на Γ, мажорирующий фильтр, порождённый множествами $\{\gamma\in\Gamma : \gamma \geqslant \beta\}$, $\beta\in\Gamma$. Определим оператор $V : \mathcal{H} \longrightarrow \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_\gamma/\lambda$ равенством

$$Vx = \{V_\gamma x\}_{\gamma\in\Gamma},\ x\in\mathcal{H}.$$

Тогда $\|Vx\| = \lim_\lambda \|V_\gamma x\| \le 2c\|x\|$ и $\|Vx\| \geqslant \frac{1}{2c}\|x\|$.

Пусть $\mathcal{K} \stackrel{def}{=} V\mathcal{H}$, рассмотрим спектральную меру E на $(\mathfrak{M},\mathfrak{F})$ со значениями в $\mathcal{K}$, определяемую соотношением

$$E(\sigma) = V\varepsilon(\sigma)V^{-1}.$$

Тогда E – спектральная мера. Покажем, что она ортогональна. Пусть $\sigma\in\mathfrak{F}$, $x,y\in\mathcal{K}$, $\gamma_0 \stackrel{def}{=} \{\sigma, \mathfrak{M}\setminus\sigma\}$. Имеем

$$\|E(\sigma)x + E(\mathfrak{M}\setminus\sigma)y\| = \|V\varepsilon(\sigma)V^{-1}x + V\varepsilon(\mathfrak{M}\setminus\sigma)V^{-1}y\|.$$

Пусть $V^{-1}x = \tilde{x}$, $V^{-1}y = \tilde{y}$. Тогда при $\gamma \geqslant \gamma_0$ векторы $V_\gamma\varepsilon(\sigma)\tilde{x}$ и $V_\gamma\varepsilon(\mathfrak{M}\setminus\sigma)\tilde{y}$ ортогональны, следовательно,

$$\|V\varepsilon(\sigma)\tilde{x} + V\varepsilon(\mathfrak{M}\setminus\sigma)\tilde{y}\|^2 = \lim_\lambda \|V_\gamma\varepsilon(\sigma)\tilde{x} + V_\gamma\varepsilon(\mathfrak{M}\setminus\sigma)\tilde{y}\|^2 =$$

$$= \lim_\lambda \|V_\gamma\,\varepsilon(\sigma)\tilde{x}\|^2 + \lim_\lambda \|V_\gamma\,\varepsilon(\mathfrak{M}\setminus\sigma)\tilde{y}\|^2 =$$

$$= \|V\varepsilon(\sigma)\tilde{x}\|^2 + \|V\varepsilon(\mathfrak{M}\setminus\sigma)\tilde{y}\|^2 = \|E(\sigma)x\|^2 + \|E(\mathfrak{M}\setminus\sigma)y\|^2.$$

Отсюда заключаем, что $E(\sigma)$ – ортопроектор. ●

§ 5. Предельный переход в задаче о подобии операторов

Здесь мы рассматриваем следующий вопрос. Пусть мы хотим доказать, что оператор T подобен *) оператору из некоторого класса, и мы можем оператор T аппроксимировать операторами, подобными операторам из этого класса. Когда можно сделать вывод о том, что и T подобен оператору того же класса?

Пусть $\mathfrak{P}$ – класс операторов в гильбертовом пространстве, который замкнут относительно операции ультрапроизведения, относи-

*) Операторы T_1 в пространстве $\mathcal{H}_1$ и T_2 в пространстве $\mathcal{H}_2$ называются п о д о б н ы м и, если существует изоморфизм V на $\mathcal{H}_1$ такой, что $VT_1V^{-1} = T_2$.

тельно сужения на инвариантные подпространства и вместе с каждым оператором содержит все унитарно эквивалентные сним операторы.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – обобщённая последовательность операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, сильно сходящаяся к оператору T. Если для каждого γ, $\gamma\in\Gamma$, существует такой изоморфизм V_γ, что $V_\gamma T V_\gamma^{-1}\in\mathcal{P}$ и $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}|V_\gamma|\cdot|V_\gamma^{-1}|<+\infty$, то оператор T подобен оператору из класса $\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать, что V_γ – изоморфизм пространства $\mathcal{H}$ на пространство $\mathcal{H}_\gamma$ такой, что $|V_\gamma|\leq c$ и $|V_\gamma^{-1}|\leq c$, $c\in\mathbb{R}$.

Пусть λ – ультрафильтр на Γ, мажорирующий фильтр, порожденный множествами $\{\gamma\in\Gamma:\gamma\geqslant\beta\}$, $\beta\in\Gamma$. Определим оператор $V:\mathcal{H}\longrightarrow\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$ равенством

$$Vx=\{V_\gamma x\}_{\gamma\in\Gamma},\ x\in\mathcal{H}.$$

Тогда $\|Vx\|=\lim\limits_{\lambda}\|V_\gamma x\|\leq c\|x\|$ и $\|Vx\|\geqslant c^{-1}\|x\|$. Определим оператор R в пространстве $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$ равенством

$$R\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=\{V_\gamma T_\gamma V_\gamma^{-1}\}_{\gamma\in\Gamma}.$$

Тогда $R\in\mathcal{P}$.

Рассмотрим подпространство $\mathcal{K}=V\mathcal{H}\subset\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_\gamma/\lambda$. Тогда $R\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$, и, следовательно, оператор $R|\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{P}$. Имеем $V^{-1}(R|\mathcal{K})V=T$, так как

$$\|(R|\mathcal{K})Vx-VTx\|=\|\{V_\gamma T_\gamma x\}_{\gamma\in\Gamma}-\{V_\gamma Tx\}_{\gamma\in\Gamma}\|=$$

$$=\lim_{\lambda}\|V_\gamma(T_\gamma x-Tx)\|\leq c\lim_{\lambda}\|T_\gamma x-Tx\|=0$$

ввиду сильной сходимости $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ к T. ●

Эту теорему можно применять, в частности, когда $\mathcal{P}$ – класс всех сжатий, класс изометрий, класс субнормальных сжатий, класс самосопряженных сжатий. В случае класса всех сжатий это утверждение доказано в работе [12] с помощью банаховского инвариантного предела. В этом случае заключение теоремы 7 может быть получено при более слабых условиях.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – обобщенная последовательность операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, сходящаяся к оператору T в pw-топологии. Если существует семейство изоморфизмов $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ таких, что $|V_\gamma T V_\gamma^{-1}|\leq 1$ и $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}|V_\gamma|\cdot|V_\gamma^{-1}|<+\infty$, то оператор T подобен сжатию.

Доказательство. Точно так же, как и в теореме 7 определяются операторы $V : \mathcal{H} \to \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_\gamma/\lambda$, $R : \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_\gamma/\lambda \longrightarrow \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_\gamma/\lambda$.

Определим теперь оператор $W : \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_\gamma/\lambda \longrightarrow \mathcal{H}$ равенством

$$W\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \lim_\lambda V_\gamma^{-1} x_\gamma$$

(предел берется в слабой топологии и существует ввиду компактности единичного шара).

Из $p w$ -сходимости $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ к T следует, что

$$WR^n V = T^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ .$$

Утверждение теоремы теперь следует из леммы Дж.Холбрука [13]: если T - оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, R - сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$, V - оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, W - оператор из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{H}$ такие, что $WR^nV=T^n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то оператор T подобен сжатию.

Литература

1. B i s h o p E. Spectral theory for operators on a Banach space. - Trans.Amer.Math.Soc.,1957,vol.86,№2,p.414-415.
2. D a c u n h a - C a s t e l l e D., K r i v i n e J.L. Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et algèbres de Banach. - Stud.Math.,1972,vol.41,p.315-334.
3. Б у р б а к и Н. Общая топология. Основные структуры. М., 1968, 272 с.
4. W e r m e r J. Commuting spectral operators on Hilbert space. - Pacific J. Math.,1954,vol.4,№3,p.355-361.
5. Х а л м о ш П. Гильбертово пространство в задачах. М.,1970, 262 с.
6. S u b i n A. A subnormal semigroups without normal extension. - Proc.Amer.Math.Soc.,1978,vol.68,p.176-178.
7. A b r a h a m s e M.D. Commuting subnormal operators. - Ill. J.Math.,1978,vol22,p.171-176.
8. С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Ф о й а ш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.М.,1970, 431 с.
9. П е л л е р В.В. Аналог неравенства Дж.фон Неймана,изометрическая дилатация сжатий и аппроксимация изометриями в прост-

ранствах измеримых функций. - Тр.мат.ин-та АН СССР, (в печати).

10. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж.Т. Линейные операторы,т.3, Спектральные операторы. М.,1974, 661 с.

11. Г о х б е р г И.Ц., К р е й н М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.,1965,448 с.

12. H o l b r o o k J.A.R. Distortion coefficients for crypto-contractions. - Linear Algebra and Appl.,1977,vol.18,№3, p.229-256.

13. H o l b r o o k J.A.R. Spectral dilations and polynomially bounded operators. - Indiana Univ.Math.J.,1971,vol.20,№11, p.1027-1034.

V.V.Peller. Applications of ultraproducts in operator theory. A simple proof of E.Bishop's theorem.

Summary

Using technique of ultraproducts of Banach spaces a simple proof of the following E.Bishop's theorem is presented: the closure in the strong operator topology of the set of normal operators on the Hilbert space coincides with the set of subnormal operators. The article contains also some other applications of untraproducts in operator theory (existence of dilation,characterization of spectral measures in Hilbert spaces, similarity of operators, and others).