Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. А. Щепакина, Два вида смены устойчивости интегральных многообразий,
Дифференц. уравнения, 2004, том 40, номер 5, 713–716

https://www.mathnet.ru/de11080

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
16 декабря 2025 г., 21:29:41

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 5, с. 713–716

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.51

ДВА ВИДА СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2004 г. Е. А. Щепакина

Введение. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с малым положительным параметром ε и дополнительной (управляющей) функцией $a(y)$ для переменных x, y, z, приведенную обычной процедурой исключения независимой переменной t к неавтономной форме

$$dy/dx = Y(x,y,z,\varepsilon), \quad \varepsilon\, dz/dx = A(x)z + Z(x,y,z,a(y),\varepsilon), \tag{1}$$

где $y \in R^n$, $x \in R$, $z \in R^m$. В случае $\dim y = 0$, $\dim z = 1$ и $A(x) = x$ получаем типичную "уточную" ситуацию [1–5]. Если $\dim y = 0$, $\dim z = 2$ и матрица $A(x)$ имеет характеристические корни $x \pm i\nu$ ($\nu > 0$), то наблюдаем явление затягивания потери устойчивости [6, 7]. В обоих случаях возникают критические в смысле Ляпунова ситуации (одно нулевое или пара чисто мнимых характеристических чисел матрицы линеаризованной системы) для присоединенной подсистемы $dz/d\tau = A(x)z + Z(x,y,z,a(y),0)$ при $x = 0$ и $Z(x,y,z,a(y),0) = O(\|z\|^2)$.

Напомним, что медленная поверхность S системы (1) описывается уравнением

$$A(x)z + Z(x,y,z,a(y),0) = 0.$$

Пусть $z = 0$ – изолированное решение последнего уравнения. Подмножество S^s (S^u) медленной поверхности S, удовлетворяющее условию $x < 0$ (> 0), является устойчивым (неустойчивым) подмножеством S. Подмножество S, определяемое равенством $x = 0$, является поверхностью срыва исходной автономной системы в "уточной" ситуации [8]. Размерность его равна $\dim y$. В ε-окрестности S^s (S^u) существует устойчивое или притягивающее (неустойчивое или отталкивающее) медленное интегральное многообразие [9]. Медленное интегральное многообразие определяется как гладкая инвариантная поверхность медленных движений. В случае $a(y) \equiv \text{const} = \alpha$ наличие дополнительного скалярного параметра α допускает возможность склеивания притягивающего и отталкивающего интегральных многообразий в одной точке поверхности срыва. Через эту точку проходит траектория-утка. Если мы возьмем $a = a(y)$ ($a = a(y,\varepsilon)$ в общем случае) как функцию векторной переменной y, параметризующей поверхность срыва, то можем склеить притягивающее и отталкивающее интегральные многообразия во всех точках поверхности срыва одновременно. В результате получим медленную притягивающе-отталкивающую интегральную поверхность. Такая поверхность может рассматриваться как естественное обобщение понятия траектории-утки в случае нулевого корня.

В настоящей работе подобные обобщения также сделаны и для критического случая пары чисто мнимых характеристических корней.

Как показано в [10], проблема существования траектории-утки может быть рассмотрена как специфическая задача склеивания притягивающей и отталкивающей интегральных поверхностей, а не только как специальная задача теории сингулярных возмущений. Очевидно, что "уточный" случай (явление затягивания потери устойчивости) соответствует переходу одного вещественного характеристического корня (пары комплексных характеристических корней) соответствующей матрицы из левой комплексной полуплоскости в правую.

В данной работе рассматриваются два частных случая этой проблемы. Отметим, что применение притягивающе-отталкивающих интегральных многообразий типа траекторий-уток для моделирования и управления критическими режимами горения нашло отражение в работах [5, 10, 11].

1. Случай нулевого корня. В этом пункте изучается существование непрерывных притягивающе-отталкивающих интегральных поверхностей для некоторого класса регулярных систем и систем с сингулярными возмущениями.

Регулярные системы. Рассматриваются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений без сингулярных возмущений для переменных x, y, z, приведенные к виду

$$y' = Y(x,y,z_1,z_2), \quad y \in R^n, \quad x \in R, \tag{2}$$

$$z_1' = 2xz_1 + a(y) + Z_1(x,y,z_1,z_2,a(y)), \quad z_1 \in R, \tag{3}$$

$$z_2' = A_2(x)z_2 + a(y)B + Z_2(x,y,z_1,z_2,a(y)), \quad z_2 \in R^m, \tag{4}$$

где $A_2(x)$ – такая ограниченная матрица, удовлетворяющая условию Липшица, что фундаментальная матрица $\Psi(\tau,x)$ $(\Psi(x,x)=I)$ уравнения $dz_2/d\tau = A_2(\tau)z_2$ удовлетворяет неравенству $\|\Psi(\tau,x)\| \le \le k_1\exp(-\gamma(\tau-x))$ $(k_1 \ge 1,\ -\infty < x \le \tau < +\infty)$; B – постоянный вектор; функции Y, Z_1, Z_2 и a непрерывны и подчиняются неравенствам

$$\|Y(x,y,z_1,z_2)\| \le k, \quad |Z_1(x,y,z_1,z_2,a)| \le k, \quad \|Z_2(x,y,z_1,z_2,a)\| \le k, \tag{5}$$

$$\|Y(x,y,z_1,z_2) - Y(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2)\| \le \mu(\|y-\bar y\| + \|z-\bar z\|), \tag{6}$$

$$|Z_1(x,y,z_1,z_2,a) - Z_1(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\bar a)| \le \mu(\|y-\bar y\| + \|z-\bar z\| + |a-\bar a|), \tag{7}$$

$$\|Z_2(x,y,z_1,z_2,a) - Z_2(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\bar a)\| \le \mu(\|y-\bar y\| + \|z-\bar z\| + |a-\bar a|), \tag{8}$$

$$|a(y)| \le K, \quad |a(y) - a(\bar y)| \le L\|y-\bar y\|, \tag{9}$$

где $\|\cdot\|$ означает обычную норму векторного пространства, а $|\cdot|$ – модуль скалярной величины, $z=(z_1,z_2)^{\mathrm{T}}$, $\bar z = (\bar z_1,\bar z_2)^{\mathrm{T}}$, k, μ, K и L – положительные константы.

Пусть F – полное метрическое пространство непрерывных функций $a(y)$, удовлетворяющих условиям (9), относительно метрики $\rho(a,\bar a) = \sup\limits_{y\in R^n}|a(y)-\bar a(y)|$. Через H обозначим полное метрическое пространство непрерывных функций $h(x,y) = (h_1(x,y),h_2(x,y))^{\mathrm{T}}$, $h_1 \in R$, $h_2 \in R^m$, действующих из $R\times R^n$ в R^{m+1} и удовлетворяющих неравенствам $|h_1(x,y)| \le q$, $|h_1(x,y)-h_1(x,\bar y)| \le \delta\|y-\bar y\|$, $\|h_2(x,y)\| \le q$, $\|h_2(x,y)-h_2(x,\bar y)\| \le \delta\|y-\bar y\|$, с метрикой $\rho(h,\bar h) = \sup\limits_{x,y}\|h(x,y)-\bar h(x,y)\|$. На элементах пространства H зададим оператор $T=(T_1,T_2)^{\mathrm{T}}$:

$$T_1h(x,y) = \begin{cases} -\displaystyle\int\limits_x^\infty e^{(x^2-s^2)}[Z_1(\cdot)+a(\varphi(s,x))]\,ds, & x \ge 0,\\ \displaystyle\int\limits_{-\infty}^x e^{(x^2-s^2)}[Z_1(\cdot)+a(\varphi(s,x))]\,ds, & x<0,\end{cases}$$

$$T_2h(x,y) = \int\limits_{-\infty}^x W(x,s)[Z_2(\cdot)+a(\varphi(s,x))B]\,ds,$$

где $Z_{1,2}(\cdot) = Z_{1,2}(s,\varphi(s,x),h_1(s,\varphi(s,x)),h_2(s,\varphi(s,x)),a(\varphi(s,x)))$, $W(x,s)$ – фундаментальная матрица уравнения $dz_2/dx = A_2(x)z_2$ $(W(s,s)=I)$, а функция $\varphi(s,x)$ определяется следующим образом. Для любого элемента $h\in H$ рассматривается начальная задача $d\varphi/ds = Y(s,\varphi,h_1(s,\varphi),h_2(s,\varphi))$, $\varphi(x)=y$, полученная из (2) подстановкой h вместо z с переобозначением y на φ и x на s. Решение этой задачи обозначается через $\varphi(s,x,y|h) = \varphi(s,x)$.

Следует отметить, что при определении оператора T_1 в верхней строке записан оператор, используемый для доказательства существования неустойчивых (устойчивых влево) интегральных поверхностей, а в нижней строке – оператор, используемый при доказательстве устойчивых интегральных поверхностей. Если оператор T имеет неподвижную точку $h(x,y)$ в H, то поверхность $z=h(x,y)$ является притягивающе-отталкивающим интегральным многообразием. Поэтому для доказательства существования притягивающе-отталкивающего интегрального многообразия системы (2)–(4) и соответствующей функции $a(y)$ достаточно, согласно принципу сжатия, убедиться в том, что оператор T является сжимающим и действует в полном метрическом пространстве H. Операторное уравнение, определяющее склеивающую функцию $a(y)$, следует из условия непрерывности оператора T при $x=0$. Существование решения $a(y)$ этого уравнения вытекает из того, что соответствующий оператор, определенный на элементах пространства F, также удовлетворяет принципу сжатия.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (5)–(8). Тогда найдутся такие константы K, L, q и δ, для которых существуют функции $a(y)\in F$ и $h(x,y)\in H$, где функция $z=h(x,y)$ описывает интегральное многообразие системы (2)–(4).*

Отметим, что интегральное многообразие $z=h(x,y)$ является глобальным, так как определено при всех x и y. На случай локальных многообразий этот результат переносится обычным образом [5].

Доказательство теоремы 1 при $m=0$ можно найти в [10], а при $m\ne 0$ она является следствием аналогичной теоремы для сингулярно возмущенных систем [12].

Теорема 2. *Пусть дополнительно к условиям теоремы 1 функции Y, Z_1 и Z_2 p раз непрерывно дифференцируемы по всем переменным, их частные производные ограничены, а p-е частные производные удовлетворяют условию Липшица. Тогда функции $a(y)$ и $h(x,y)$ p раз непрерывно дифференцируемы.*

Схема доказательства, как и для теоремы 1, состоит в проверке условий принципа сжатия для операторов, определенных в соответствующих пространствах непрерывно дифференцируемых функций.

Сингулярно возмущенные системы. Теоремы 1 и 2 справедливы и для систем с сингулярными возмущениями [12]. При этом, если функции Y, Z_1 и Z_2 имеют достаточное число непрерывных ограниченных производных по всем переменным, функция h, описывающая медленное интегральное многообразие, и соответствующая функция $a(y,\varepsilon)$ могут быть найдены в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε:

$$a(y,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i a^{(i)}(y)+a^{(N+1)}(y,\varepsilon),\quad h(x,y,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i h^{(i)}(x,y)+h^{(N+1)}(x,y,\varepsilon).$$

Коэффициенты $h^{(i)}$ в этом разложении вычисляются обычным образом, а коэффициенты $a^{(i)}$ на каждом шаге подбираются так, чтобы устранялся разрыв функции $h^{(i)}$ при $x=0$ [5, 10].

Следует отметить, что сингулярно возмущенные системы общего вида могут быть приведены к виду, аналогичному (2)–(4), в окрестности первого приближения медленного интегрального многообразия, подобно тому, как это делается в [5].

2. Случай пары чисто мнимых корней. В данном пункте приводится схематичное изложение вопросов существования непрерывных притягивающе-отталкивающих интегральных поверхностей во втором критическом случае.

Регулярный случай. Рассмотрим систему

$$y'=Y(x,y,z),\quad z'=A(x)z+a(y)+Z(x,y,z,a(y)),\quad x\in R,\quad y\in R^n,\quad z\in R^2,$$

$$A(x)=\begin{pmatrix}2x & \nu\\ -\nu & 2x\end{pmatrix},\quad a(y)=\begin{pmatrix}\alpha(y)\\ \beta(y)\end{pmatrix},\quad Z(x,y,z,a(y))=\begin{pmatrix}Z_1(x,y,z,a(y))\\ Z_2(x,y,z,a(y))\end{pmatrix}.$$

Предполагается, что свойства функций Y, Z и a аналогичны (5)–(9). Повторим рассуждения предыдущего пункта с учетом того, что теперь $a(y)$ – двумерный вектор, а оператор T задается на пространстве H формулой

$$Th(x,y)=\begin{cases}-\displaystyle\int_x^{\infty}e^{x^2-s^2}W^{-1}(x)W(s)[Z(\cdot)+a(\varphi(s,x))]\,ds, & x\ge 0,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{x^2-s^2}W^{-1}(x)W(s)[Z(\cdot)+a(\varphi(s,x))]\,ds, & x<0,\end{cases}\qquad W(x)=\begin{pmatrix}\cos\nu x & \sin\nu x\\ -\sin\nu x & \cos\nu x\end{pmatrix}$$

и $Z(\cdot)=Z(s,\varphi(s,x),h(s,\varphi(s,x)),a(\varphi(s,x)))$. Если оператор T имеет неподвижную точку $h(x,y)$ в H, то поверхность $z=h(x,y)$ является притягивающе-отталкивающим интегральным многообразием [10]. Схема доказательства такая же, как и в п. 1 (см. [13]).

Сингулярно возмущенные системы. Отметим, что полученный результат можно распространить на системы с сингулярными возмущениями. При этом для построения асимптотических разложений функции $h(x,y,\varepsilon)$, описывающей медленное интегральное многообразие, используется обычный формализм.

Важно отметить, что в случае затягивания потери устойчивости, рассмотренном в работах [6, 7] ($\dim y=0$), для склеивания притягивающей и отталкивающей частей одномерного медленного интегрального многообразия в R^3 требуется наличие двух дополнительных параметров. Если же $\dim y\ge 1$, то для склеивания соответствующих поверхностей используется пара функций.

Автор выражает глубокую признательность В.А. Соболеву за полезные обсуждения и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. М., 1986. Т. 5. С. 5–218.
2. *Benoit E., Callot J.L., Diener F., Diener M.* // Collect. Math. 1980–1981. V. 31–32. № 1–3. P. 37–119.
3. *Eckhaus W.* // Lect. Notes in Math. 1983. V. 925. P. 449–494.
4. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М., 1995.

5. *Соболев В.А., Щепакина Е.А.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1175–1184.
6. *Шишкова М.А.* // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
7. *Нейштадт А.И.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067; 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
8. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975.
9. *Shchepakina E., Sobolev V.* // Nonlinear Analysis. 2001. V. 44. P. 897–908.
10. *Shchepakina E., Sobolev V.* // Stability and Control: Theory and Applications. 2000. V. 3. № 3. P. 263–274.
11. *Shchepakina E.* // Nonlinear Analysis: Real Word Applications. 2003. V. 4. P. 45–50.
12. *Щепакина Е.А.* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1358–1364.
13. *Щетинина Е.В.* // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1999. Т. 3. № 3. С. 129–134.

Самарский государственный университет

Поступила в редакцию
23.09.2002 г.