Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

К. К. Головкин, Пример неединственности ограниченных классических решений уравнений Навье–Стокса со сближением решений на бесконечности,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1969, том 14, 8–23

https://www.mathnet.ru/znsl2304

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
9 декабря 2025 г., 13:27:25

К.К.Головкин

ПРИМЕР НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА НА ПЛОСКОСТИ СО СБЛИЖЕНИЕМ РЕШЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Известно, что стационарная система уравнений Навье-Стокса, рассматриваемая в трехмерном пространстве, на плоскости или в области двух или трех измерений, имеет по крайней мере одно решение при любых массовых силах и граничных значениях вектора скорости. (Поток последнего через каждую компоненту границы предполагается равным нулю). Единственно ли такое решение? Ответ на этот вопрос утвердителен при известном ограничении малости на данные функции массовых сил и скорости на границе, что приводит и к малости числа Рейнольдса самого решения. (см. например, [I]). Без этого предположения, по-видимому, типичной возможностью является неединственность решения. Ряд результатов, свидетельствующих об этом, уже получен (см. работы [2]-[7]). Но ответ может зависеть от топологических и метрических особенностей области, в которой ищется решение, а в случае бесконечной области и от поставленных на бесконечности условий. Кроме того, на ответ может повлиять наличие источников определенного знака, распределенных в движущейся жидкости, или ненулевой поток определенного знака, протекающий через отдельные компоненты границы. Все это необходимо иметь в виду при оценке того, насколько общее значение имеют те или иные из имеющихся примеров неединственности.

В данной работе построен пример двух гладких решений на плоскости, равномерно ограниченных и сближающихся как $\sqrt{r^{-1}}$ при больших значениях расстояния от начала координат. Несколько похожий пример был дан Е.М.Поповым, (см. [2]), однако в этом примере полный поток

через окружность сколь угодно большого радиуса отличен от нуля, и притом с необходимостью положителен, (жидкость утекает на бесконечность). В полученном ниже примере поток равен нулю. Мы воспользуемся некоторыми результатами работы Мешалкина и Я.Д.Синая [8], которые, решая задачу, поставленную А.Н.Колмогоровым, показали неустойчивость (в нестационарной постановке) двумерного периодического течения, описываемого функцией тока $\Psi(x,y) = \lambda \sin y$.

Простой вид функции тока основного течения делает доступным анализ его возмущений. При этом оказывается полезным аппарат цепных дробей, введенный в связи с данной задачей в [8]. В работе [5] построены стационарные, периодические по x и y возмущения того же основного течения и дан пример неединственности в классе периодических решений. Мы же ищем убывающие по $\sqrt{x^2+y^2}$ возмущения и, соответственно, пару сближающихся на бесконечности решений приведенного ниже уравнения (I).

Напомним, что компоненты скорости плоского стационарного течения вязкой жидкости выражаются через функцию тока $\Psi(x,y)$ по формулам $u_x = \Psi_y$, $u_y = -\Psi_x$ и функция $\Psi(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\nu \Delta^2 \Psi = \Psi_y \Delta \Psi_x - \Psi_x \Delta \Psi_y + g. \qquad (I)$$

Если задача (I) имеет два решения, то их полусумма Ψ_1 и полуразность Ψ_2 удовлетворяют уравнению

$$\nu \Delta^2 \Psi_2 = \Psi_{2y} \Delta \Psi_{1x} - \Psi_{2x} \Delta \Psi_{1y} + \Psi_{1y} \Delta \Psi_{2x} - \Psi_{1x} \Delta \Psi_{2y}. \qquad (2)$$

Обратно, если Ψ_2 решает линейное однородное уравнение (2) при некоторой данной функции Ψ_1, то $\Psi \pm = \Psi_1 \pm \Psi_2$ – это два решения задачи (I) с одной и той же функцией g. Положим $\Psi_1 = -\gamma \nu^{-1} \cos y$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\nu \Delta^2 \psi = \frac{\gamma}{\nu} \sin y \left[\Delta \psi_x + \psi_x \right], \qquad (3)$$

где для краткости опущен индекс у ψ_2 .

Если, искать решение (3) в виде

$$\psi(x,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i(\alpha x + ny)}, \qquad (4)$$

то для c_n получим реккурентную систему

$$2\nu^2 (\gamma\alpha)^{-1} (\alpha^2 + n^2)^2 c_n + (\alpha^2 - 1 + (n-1)^2) c_{n-1} - (\alpha^2 - 1 + (n+1)^2) c_{n+1} = 0 . \qquad (5)$$

Как показано в [8], бесконечная система (5) имеет решение, убывающее по номеру в обе стороны, в том и только том случае, если параметры α, $\lambda = \gamma \nu^{-2}$ связаны некоторым уравнением. Введем обозначение

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \frac{(\alpha^2 + n^2)^2}{\alpha (\alpha^2 - 1 + n^2)}$$

и заметим, что $a_n = a_{-n}$. Упомянутое уравнение может быть записано в виде

$$-a_0 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} + \frac{1}{a_{-1} + \frac{1}{a_{-2} + \dots}} . \qquad (6)$$

При выполнении условия (6) система (5) имеет на самом деле единственное с точностью до множителя убывающее в обе стороны по n решение, и порядок убывания оказывается сверхэкспоненциальным.

Обобщим теперь эти результаты, вводя один новый параметр в

формулу (4). Положим

$$\psi(x,y)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i(\alpha x+(n+\tau)y)} \tag{7}$$

и определим новые числа a_n по формуле

$$a_n=\frac{2}{\lambda}\,\frac{(\alpha^2+(n+\tau)^2)^2}{\alpha(\alpha^2-1+(n+\tau)^2)}\,.$$

Теперь уже $a_n \neq a_{-n}$. Очевидным образом видоизменяется система(5):

$$\frac{2}{\alpha\lambda}(\alpha^2+(n+\tau)^2)^2 c_n+(\alpha^2+(n+\tau-1)^2-1)\,c_{n-1}-$$
$$-(\alpha^2-1+(n+\tau+1)^2)\,c_{n+1}=0. \tag{8}$$

Условием разрешимости задачи (8) в классе убывающих в обе стороны последовательностей (причем убывание оказывается сверхэкспоненциальным) является по-прежнему условие (6) при новом определении a_n. Это уравнение связывает три параметра λ, α и τ. Как показано ниже, при некотором λ это уравнение определяет гладкую кривую (образ отрезка [0,I]), целиком лежащую в круге $\alpha^2+\tau^2<1$ и имеющую ненулевую кривизну. Пусть параметрическое уравнение этой кривой есть $\alpha=\alpha(s)$, $\tau=\tau(s)$, $0\leq s\leq 1$, где $\alpha(s)$ и $\tau(s)$ – бесконечно дифференцируемые функции.

Зададим любую гладкую функцию $c_0(s)$, при $0<s<1$, равную нулю в окрестности нуля и единицы. Тогда система (8), в которой $\alpha=\alpha(s)$, $\tau=\tau(s)$, $c_0=c_0(s)$, единственным образом определяет семейство гладких функций $c_n(s)$, обращающихся в нуль на том же множестве, что и $c_0(s)$.

В силу принципа суперпозиции функция

$$\psi(x,y)=\int_0^1\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(s)\,e^{i(\alpha(s)x+(n+\tau(s))y)}\,ds, \tag{9}$$

а также ее вещественная и мнимая части удовлетворяют уравнению (3). Она может быть представлена в виде $\sum_{-\infty}^{\infty} g_n(x,y)$, где

$$g_n(x,y) = \int C_n(s)\, e^{i(\alpha(s)x + (n+\tau(s))y)}\, ds\,, \tag{10}$$

причем ряд $\sum g_n(x,y)$ абсолютно и равномерно сходится и может дифференцироваться почленно сколько угодно раз, ибо $C_n(s)$ чрезвычайно быстро убывают по n . Каждый из интегралов вида (10) может быть записан как интеграл Фурье от некоторой обобщенной функции. зависящей от переменных α, τ ,носителем которой служит кривая

$$\gamma_n : \alpha = \alpha(s), \qquad \tau = n + \tau(s),$$

причем вдоль этой кривой рассматриваемое распределение гладко. Кривые γ_n имеют независящую от n ненулевую кривизну, а вблизи ее концов наше распределение аннулируется.

Как следует из теоремы, доказанной в работе А.А.Червяковой [9], при выполнении указанных условий и при наличии хотя бы первых производных у $C_n(s)$ при больших τ справедлива оценка

$$|g_n(x,y)| \le \frac{A_n}{\sqrt{\tau}}. \tag{11}$$

Здесь A_n пропорциональны нормам функций $C_n(s)$ в $C_1[0,1]$; следовательно, A_n убывают быстрее любой экспоненты. Нас будет интересовать главным образом не сама оценка (11), а аналогичные оценки для производных первого порядка от g_n . Несмотря на то, что при дифференцировании по y функция $C_n(s)$ в интеграле (10) заменяется на $iC_n(s)(n+\tau(s))$, норма в $C_1[0,1]$ этой функции остается быстро убывающей по номеру n , и наряду с (11), мы получаем такие оценки

$$|g_{nx}(x,y)|, \quad |g_{ny}(x,y)| \le \frac{A'_n}{\sqrt{\tau}}, \tag{12}$$

причем ряд $\sum A'_n$ сходится. (См. приложение)

Суммируя по n все подобные неравенства, получаем для производных $\Psi(x,y)$ вида (9) неравенства

$$|\Psi_x(x,y)|, \quad |\Psi_y(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{\tau}}. \tag{13}$$

Уравнение (3) допускает, таким образом, гладкое убывающее как $\tau^{-1/2}$, решение $\Psi(x,y)$. При этом функции

$$\Psi^{\pm}(x,y) = -\frac{\gamma}{\nu}\cos y \pm \operatorname{Re}\Psi(x,y) \tag{14}$$

являются двумя равномерно ограниченными сближающимися при больших τ решениями уравнения (I) с некоторой гладкой ограниченной функцией g. Поля скоростей, отвечающие функциям тока $\Psi^{\pm}$, также сближаются на бесконечности как $\sqrt{\tau^{-1}}$, в силу оценки (13).

Осталось доказать существование кривой, заданной уравнением (6).

Запишем это уравнение в следующем виде

$$\frac{2}{\lambda\alpha}\,\frac{(\alpha^2+\tau^2)^2}{1-\alpha^2-\tau^2} = \varphi(\lambda,\alpha,\tau) + \varphi(\lambda,\alpha,-\tau), \tag{15}$$

где

$$\varphi(\lambda,\alpha,\tau) = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

Цепная дробь $\varphi(\lambda, \alpha, \tau)$ является при всяком $\lambda>0$ равномерным пределом подходящих дробей n-го порядка , если α и τ меняются, например, в пределах $\alpha^2+\tau^2<1$, $\alpha>\frac{3}{4}$. Более того, каждая из подходящих дробей допускает аналитическое продолжение по α и τ на область ω комплексного линейного пространства двух измерений

$$(\operatorname{Re}\alpha)^2+(\operatorname{Re}\tau)^2<\frac{5}{4},$$

$$\operatorname{Re}\alpha>\frac{3}{4}, \tag{16}$$

$$|\operatorname{Im}\alpha|,\ |\operatorname{Im}\tau|<\delta,$$

где δ достаточно мало. Легко проверить, что в новой области изменения комплексных параметров α и τ сходимость подходящих дробей к своему пределу остается равномерной. По теореме Вейерштрасса для функций нескольких комплексных переменных, гласящей, что равномерный предел последовательности голоморфных функций голоморфен, $\varphi(\lambda,\alpha,\tau)$ является голоморфной функцией от α , τ в области, заданной неравенствами (16). (По поводу теоремы Вейерштрасса см., например, [10], гл. I.).

Умножив уравнение (15) на $\frac{\lambda\alpha}{2}$, получим

$$\frac{(\alpha^2+\tau^2)^2}{1-\alpha^2-\tau^2}=\psi(\lambda,\alpha,\tau)+\psi(\lambda,\alpha,-\tau), \tag{17}$$

где

$$\psi(\lambda,\alpha,\tau)=\frac{\lambda\alpha}{2}\varphi(\lambda,\alpha,\tau)=\frac{1}{b_1+\frac{1}{b_2+\dots}},$$

а величины b_n определяются следующим образом

$$b_n = \left(\frac{2}{\lambda\alpha}\right)^2 \frac{(\alpha^2 + (n+\tau)^2)^2}{\alpha^2 + (n+\tau)^2 - 1} \qquad (\text{нечетное } n),$$

$$b_n = \frac{(\alpha^2 + (n+\tau)^2)^2}{\alpha^2 + (n+\tau)^2 - 1}. \qquad (\text{четное } n).$$

Заметим, что $\psi(\lambda,\alpha,\tau)$ монотонно возрастает по λ, поскольку цепная дробь с положительными членами монотонно возрастает по членам с четным номером и убывает по членам с номером нечетным. При любом четном n $\psi(\lambda,\alpha,\tau)$ превосходит подходящую дробь n-го порядка $\psi_n(\lambda,\alpha,\tau)$. Имеем

$$\psi(\lambda,\alpha,\tau) \geqslant \psi_n(\lambda,\alpha,\tau) > \frac{1}{b_1 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + \frac{1}{b_n}} =$$

$$= \frac{b_n}{b_1 b_n + b_3 b_n + \cdots + b_{n-1} b_n + 1}.$$

Полагая здесь $n \sim \sqrt{\lambda}$, получим при больших λ равномерную по вещественным α и τ из области ω оценку

$$\psi(\lambda,\alpha,\tau) > C\sqrt{\lambda}.$$

Ясно поэтому, что для любой точки α,τ из указанной области уравнение

$$\psi(\lambda,\alpha,\tau) + \psi(\lambda,\alpha,-\tau) = y$$

имеет решение при $y \geqslant N$, где N не зависит от α, τ. В частности, если $\tau = 0$, $\alpha = 1 - \varepsilon$ и ε достаточно мало, то существует единственный корень λ_0 уравнения (I7), левая часть которого обращается в ∞ при $\alpha = 1$, $\tau = 0$. Фиксируем параметр λ,

полагая $\lambda = \lambda_0$, а вместе с тем и γ в уравнении (3). (Напомним, что $\lambda = \gamma v^{-2}$). На $\varepsilon > 0$ ниже будут налататься некоторые ограничения сверху, которые все считаются выполненными. Кривую в вещественный плоскости α, τ , вдоль которой выполняется уравнение (I7), можно получить как решение $\alpha = \alpha(\tau)$ дифференциального уравнения

$$d\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} d\tau = 0, \tag{I8}$$

$$\mathcal{F}(\alpha, \tau) = \frac{(\alpha^2 + \tau^2)^2}{1 - \alpha^2 - \tau^2} - \psi(\lambda_0, \alpha, \tau) - \psi(\lambda_0, \alpha, -\tau),$$

при дополнительном условии

$$\alpha(0) = 1 - \varepsilon. \tag{I9}$$

Докажем существование интересующей нас интегральной кривой.

Рассмотрим область ω' в вещественной плоскости α, τ , определяемую неравенствами

$$\alpha^2 + \tau^2 < 1,$$

$$\alpha > \frac{7}{8}.$$

Очевидно, что $\omega \subset \omega$, и на замыкании ω' ограничены производные от $\psi(\lambda_0, \alpha, \tau)$ и $\psi(\lambda_0, \alpha, -\tau)$. Ввиду этого, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} > 0$ при

$$\alpha^2 + \tau^2 < 1, \qquad \alpha > 1 - 2\varepsilon, \tag{20}$$

если ε достаточно мало, ибо при α, близких к единице, первое слагаемое в выражении $\mathcal{F}(\alpha,\tau)$ и его производные велики. Уравнение (I8) в области ω'', задаваемой неравенствами (20), можно переписать в виде

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial\mathcal{F}/\partial\tau}{\partial\mathcal{F}/\partial\alpha}, \tag{21}$$

причем правая часть в (2I) является аналитической функцией от α,τ в ω''. Уравнение (2I) при начальном условии (I9) имеет решение - гладкую кривую $\alpha = \alpha(\tau)$, продолжаемую в обе стороны по τ до пересечения с границей ω'' (см., напр., курс В.В.Степанова [II]). Кривизна этой кривой не всюду равна нулю. Действительно, при $\tau=0$ $\partial\mathcal{F}/\partial\tau = 0$ и, следовательно, $d\alpha/d\tau=0$. Если бы кривизна равнялась нулю вдоль всей кривой $\alpha(\tau)$, то последняя представляла бы из себя просто прямую $\alpha = 1-\varepsilon$. Но это противоречит уравнению (2I), правая часть которого вблизи окружности $\alpha^2+\tau^2=1$ отлична от нуля. Итак, на интегральной кривой существуют точки, а из соображений непрерывности и целые промежутки, на которых кривизна не обращается в нуль. Параметризуя любой из этих премежутков таким образом, чтобы он представлялся в виде $\alpha=\alpha(s)$, $\tau=\tau(s)$, где s пробегает [0,I], получим кривую с отличной от нуля кривизной, вдоль которой уравнения (I7) и (6) выполнены. Это оправдывает сделанное выше заключение о существовании двух сближающихся на бесконечности как $r^{-\frac{1}{2}}$ полей скорости, удовлетворяющих одному и тому же уравнению. Итак, показано, что система Навье-Стокса на плоскости (равносильная уравнению (I)),

$$\begin{cases} \Delta\vec{u} + \operatorname{grad} p + u_k \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial x_k} = \vec{f}, \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

при некоторой массовой силе $\vec{f}$ имеет по крайней мере два равномерно ограниченных классических решения $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, таких, что

оба удовлетворяют на бесконечности условию вида

$$|\vec{u}^{(i)}(x) - \vec{v}(x)| \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{23}$$

где $\vec{v}(x)$ – некоторое гладкое соленоидальное поле. Вопрос о том, возможна ли неединственность решения задачи (22)-(23) в более частной ситуации, когда $\vec{v}(x) \equiv 0$, пока еще не разрешен.

Приложение. Дифференцирование цепных дробей.

В этом пункте мы получим формулу для производной от цепной дроби вида

$$\varphi(\alpha) = \cfrac{1}{b_1(\alpha) + \cfrac{1}{b_2(\alpha) + \dots}} \tag{I}$$

в предположении, что $b_i(\alpha)$ – гладкие положительные функции α, и воспользуемся полученной формулой для того, чтобы обосновать использованную выше сходимость рядов $\sum A_n$ и $\sum A'_n$. Для определенности рассмотрим первый из этих рядов, или, что то же, ряд $\sum \| C_n(S) \|_{C[0,1]}$, ибо, как мы отмечали, A_n пропорциональны нормам функций $C_n(S)$ в $C[0,1]$. Следуя работе [5], решение $C_n(S)$ системы (5) при выполнении условия (6) можно представить в таком виде

$$C_0 = C_0(S),$$

$$C_n(S) = \rho_1(S) \dots \rho_n(S) C_0(S) \quad (n>0),$$

$$C_n(S) = (\rho_0(S)\rho_{-1}(S) \dots \rho_{n+1}(S))^{-1} C_0(S) \quad (n<0),$$

причем

$$\rho_k(s) = -\cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1} + \dots}} \qquad (k>0),$$

$$\rho_k(s) = a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \cfrac{1}{a_{k-3} + \dots}} \qquad (k<0),$$

а в выражения для a_k следует подставить $\alpha = \alpha(s)$, $\tau = \tau(s)$. Очевидно, имеем

$$|\rho_k| \leq \frac{1}{|a_k|} \qquad (k>0),$$

$$|\rho_k| \leq a_{k-1} \qquad (k<0),$$

$$C_1 k^2 \leq |a_k(s)| \leq C k^2$$

и в последней оценке C, C_1 не зависят ни от s, ни от k. Из приведенных формул сразу видно, что максимумы модулей производных $C_n(s)$ убывают быстрее любой экспоненты по номеру n, обеспечивая сходимость ряда $\sum A_n$, если производные от $\rho_k(s)$ допускают хотя бы следующую оценку

$$|\rho_k'(s)| \leq C|k|^m \qquad (m<\infty). \tag{2}$$

Рассмотрим цепную дробь вида (I) и все подходящие дроби четного

порядка $\varphi_{2j}(\alpha)$, получающиеся из $\varphi(\alpha)$ путем удержания конечного (четного) числа членов b_j. Справедлива следующая, легко проверяемая по индукции формула

$$\frac{d\varphi_{2j}}{d\alpha} = \sum_{1\le k\le j} (b_1 b_2' + 1)^{-2} (b_3 b_4' + 1)^{2} \dots (b_{2k-1} b_{2k}' + 1)^{-2} \times$$

$$\times \left(\frac{d b_{2k}}{d\alpha} - b_{2k}'^{2} \frac{d b_{2k-1}}{d\alpha} \right), \qquad (3)$$

$$b_{2k}' = b_{2k} + \cfrac{1}{b_{2k+1} + \cfrac{1}{b_{2k+2}} + \dots + \cfrac{1}{b_{2j}}}.$$

Величины b_{2k}' в последней формуле зависят, таким образом, от двух индексов k и j. В нижеследующей формуле мы перейдем к пределу по j при $j \to \infty$, а через b_{2k}' обозначим пределы соответствующих выражений. Предельный переход в формуле (3) дает

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_1 b_2' + 1)^{-2} (b_3 b_4' + 1)^{-2} \dots (b_{2k-1} b_{2k}' + 1)^{-2} \times$$

$$\times \left(\frac{db_{2k}}{d\alpha} - b'^{2}_{2k} \frac{db_{2k-1}}{d\alpha} \right). \tag{4}$$

Для законности применения формулы (4) достаточно, чтобы ряд сходился абсолютно и равномерно на рассматриваемом промежутке изменения α. Мы воспользуемся (и это оправдано) формулой (4) для того, чтобы оценить величины $|\rho'_k(s)|$. Величины a_k зависят от s через α и τ, а $\alpha(s)$, $\tau(s)$ – гладкие функции s. Ввиду этого, пользуясь явным видом a_k, получаем

$$\left| \frac{d}{ds} a_k(s) \right| \leq C k^2. \qquad (0 \leq s \leq 1)$$

Рассмотрим, например, производную от $\rho_k(s)$ при $k > 0$ и докажем для нее оценку (2). По формуле (4) имеем

$$-\frac{d\rho_k}{ds} = \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k+1} a'_{k+2} + 1)^{-2} \ldots (a_{k+2l-1} a'_{k+2l} + 1)^{-2} \times$$

$$\times \left(\frac{da_{k+2l}}{ds} - a'^{2}_{k+2l} \frac{da_{k+2l-1}}{ds} \right), \tag{5}$$

причем

$$a'_{k+2l} = a_{k+2l} + \frac{1}{a_{k+2l+1} + \frac{1}{a_{k+2l+2} + \ldots}}.$$

Как легко видеть, при наличии оценок $|a_k(s)| > Ck^2$, $\left|\frac{d}{ds} a_k(s)\right| < Ck^2$, установленных выше, ряд в формуле (5) чрезвычайно быстро сходится благодаря множителям типа $(a_{k+1} a'_{k+2} + 1)^{-2}$. Производные $\frac{d\varphi_k}{ds}$ оказываются равномерно ограниченными по s и по k при $k>0$. Аналогично рассматривается случай $k<0$, в котором имеет место квадратичный рост интересующих нас величин по k.

Таким образом, формула (2) имеет место. Вместе с тем, верен вывод о том, что ряд $\sum A_n$ сходится. Проверка сходимости ряда $\sum A'_n$ теперь не составляет труда.

Литература

1. О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости М., Физматгиз, 1961.
2. О.А.Ладыженская. О разрешимости "в целом" краевой задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений и уравнений Навье-Стокса. Тр. IУ-матем.съезда, 1963, т.I, 134-157.
3. К.К.Головкин. О неединственности решений некоторых краевых задач для уравнений гидромеханики. Ж.В.М. и М.Ф., 1964, 4, № 4, 773-775.
4. К.К.Головкин. Примеры неединственности и малой устойчивости решений уравнений гидромеханики. Ж.В.М. и М.Ф., 1965, 5, № 4, 667-679.
5. В.И.Юдович. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения вязкой несжимаемой жидкости.ПММ, 29, в.3, 1965, 453-467.
6. В.И.Юдович. О бифуркации вращательных течений жидкости. ДАН СССР, 1966, 169, № 2, 306-309.
7. В.И.Юдович. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения в замкнутом сосуде. Матем. сб., 1967, 74, № 4, 565-579.
8. Л.Д.Мешалкин, Я.Г.Синай. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой жидкости. П.М.М., 1961, XXУ, 6, 1140-1143.
9. А.А.Червякова. О порядке уоывания на бесконечности функций, преобразование Фурье которой локазиловано на кривой, Зап.науч.сем. ЛОМИ, 1968, т.II.
10. М.Эрве. Функции многих комплексных переменных. Москва, 1965.
11. В.В.Степанов. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 1950 г.