В. Г. Болтянский, Необходимые условия экстремума функции, *Дифференц. уравнения*, 1972, том 8, номер 9, 1553–1559

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕНТЯБРЬ 1972 г., ТОМ VIII, № 9

УДК 517.934:517.966

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

В этой заметке на основе теоремы о пересечении, доказанной в [2], устанавливаются некоторые необходимые условия для того, чтобы функция, определенная на подмножестве евклидова пространства, достигала экстремума в заданной точке. Эти необходимые условия близки по своему характеру к известной в математическом программировании теореме Куна—Таккера. Доказываемые теоремы служат в свою очередь инструментом для получения необходимых условий оптимальности в дискретных объектах.

Пусть M — некоторый выпуклый конус с вершиной x_0 в евклидовом пространстве E^n. Через $D(M)$ будет обозначаться *двойственный конус*, т. е. множество всех таких точек $x \in E^n$, что

$$(x - x_0)(y - y_0) \leqslant 0$$

для любой точки $y \in M$. Конусы M и $D(M)$ имеют общую вершину, причем если конус M замкнут, то $D(D(M)) = M$. Условимся говорить, что *направление вектора δz принадлежит конусу M*, если найдется такая точка $x \in M$, что $\delta z = x - x_0$ (где x_0 — вершина конуса M).

Ключом для получения необходимых условий экстремума служит следующая теорема. Заметим, что от аналогичных теорем (содержащихся, например, в работе А. Д. Дубовицкого и А. А. Милютина [1]) доказываемые ниже теоремы отличаются тем, что рассматриваемые конусы (шатры [2]) не предполагаются телесными.

Теорема 1. *Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — некоторые множества в пространстве E^n. Пусть далее $F(x)$ — гладкая функция, определенная на некотором открытом множестве пространства E^n, содержащем множество $\Sigma = \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$. Пусть, наконец, $x_0 \in \Sigma$ и M_i — шатер множества Ω_i в точке x_0, $i = 1, \ldots, l$. Для того чтобы функция F, рассматриваемая на множестве Σ, достигала минимума в точке x_0, необходимо существование такого числа $\psi_0 \leqslant 0$ и таких векторов $a_1, \ldots, a_l$, что направление вектора a_i принадлежит конусу $D(M_i)$, $i = 1, \ldots, l$, и выполнены следующие условия:*

(α) *если $\psi_0 = 0$, то хотя бы один из векторов $a_1, \ldots, a_l$ отличен от нуля;*

(β) $\psi_0 \operatorname{grad} F(x_0) = a_1 + \ldots + a_l$.

В этой теореме (и следующих), если ставится задача о максимуме (а не о минимуме) функции F на множестве Σ, то неравенство $\psi_0 \leqslant 0$ заменяется на $\psi_0 \geqslant 0$.

Доказательство. Если $\operatorname{grad} F(x_0) = 0$, то, полагая $\psi_0 = -1$, $a_1 = \ldots = a_l = 0$, получим величины $\psi_0, a_1, \ldots, a_l$, удовлетворяющие требуемым условиям (независимо от того, достигает ли функция $F(x)$ в точке x_0 минимума или нет). Таким образом, при $\operatorname{grad} F(x_0) = 0$ утверждение теоремы тривиальным образом справедливо. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\operatorname{grad} F(x_0) \neq 0$.

Обозначим через Ω^* множество, содержащее точку x_0 и все точки $x \in E^n$, в которых функция $g(x) = F(x) - F(x_0)$ принимает отрицательные значения.

Далее, через M^* обозначим полупространство, состоящее из всех точек $x \in E^n$, для которых

$$(x - x_0)\,\mathrm{grad}\, g(x_0) \leqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad (x - x_0)\,\mathrm{grad}\, F(x_0) \leqslant 0. \tag{1}$$

Согласно замечанию 1 работы [2], множество M^* является шатром множества Ω^* в точке x_0.

Допустим, что система конусов M^*, $M_1, \ldots, M_l$ не обладает свойством отделимости [3]. Тогда, согласно теореме 3 работы [2] (заметим, что M^* есть полупространство, т. е. M^* не является плоскостью), найдется отличная от x_0 точка $x_1 \in \Omega^* \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$. Так как $x_1 \in \Omega^*$ и $x_1 \neq x_0$, то $g(x_1) < 0$, т. е. $F(x_1) < F(x_0)$. Таким образом, нашли такую точку $x_1 \in \Sigma$, что $F(x_1) < F(x_0)$. Но это противоречит тому, что функция F, рассматриваемая на Σ, достигает в точке x_0 минимума. Полученное противоречие доказывает, что система конусов M^*, $M_1, \ldots, M_l$ обладает свойством отделимости.

Согласно теореме 5 работы [3], существуют такие векторы $a^*, a_1, \ldots, a_l$, направления которых принадлежат соответственно конусам $D(M^*)$, $D(M_1), \ldots, D(M_l)$, что хотя бы один из этих векторов отличен от нуля и

$$a^* + a_1 + \ldots + a_l = 0.$$

Так как M^* — полупространство, определяемое неравенством (1), то $a^* = -\psi_0\,\mathrm{grad}\, F(x_0)$, где $\psi_0 \leqslant 0$. Очевидно, что величины $\psi_0, a_1, \ldots, a_l$ — искомые.

Теорема 2. *Пусть Ω' — множество, определяемое в пространстве E^n уравнениями*

$$F^1(x) = 0, \ \ldots, \ F^p(x) = 0,$$

далее, Ω'' — множество, определяемое ограничениями

$$f^1(x) \leqslant 0, \ \ldots, \ f^q(x) \leqslant 0, \tag{2}$$

и $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — некоторые множества пространства E^n. Пусть, наконец, $F^0(x)$ — функция, определенная на некотором открытом множестве пространства E^n, содержащем множество

$$\Sigma = \Omega' \cap \Omega'' \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l.$$

Все функции $F^0, F^1, \ldots, F^p, f^1, \ldots, f^q$ предполагаются гладкими. Пусть $x_0 \in \Sigma$ и M_i — шатер множества Ω_i в точке x_0, $i = 1, \ldots, l$. Для того чтобы функция $F^0(x)$, рассматриваемая на множестве Σ, достигала минимума в точке x_0, необходимо существование таких чисел $\psi_0 \leqslant 0, \psi_1, \ldots, \psi_p$, таких векторов $a_1, \ldots, a_l$, направления которых принадлежат соответственно конусам $D(M_1), \ldots, D(M_l)$, и таких неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, что выполнены следующие условия:

(α) *если все числа $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ равны нулю, то хотя бы один из векторов $a_1, \ldots, a_l$ отличен от нуля;*

$$(\beta) \quad \sum_{i=0}^{p} \psi_i\,\mathrm{grad}\, F^i(x_0) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j\,\mathrm{grad}\, f^j(x_0) + a_1 + \ldots + a_l;$$

(γ) *для каждого $j = 1, \ldots, q$ справедливо соотношение $\lambda_j f^j(x_0) = 0$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\mathrm{grad}\, F^\alpha(x_0) = 0$ при некотором α, то, полагая $\psi_\alpha = -1$, а все остальные величины ψ_i, λ_j, a_k считая равными нулю, удовлетворим требованиям теоремы (независимо от того, достигает ли функция $F^0(x)$ минимума в точке x_0). Точно так же, если $\mathrm{grad}\, f^\beta(x_0) = 0$ при некотором β, для которого $f^\beta(x_0) = 0$, то удовлетворим требованиям теоремы, положив $\lambda_\beta = 1$, а все остальные величины ψ_i, λ_j, a_k считая равными нулю. Поэтому будем в дальнейшем считать, что $\mathrm{grad}\, F^i(x_0) \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, p$ и, кроме того, $\mathrm{grad}\, f^j(x_0) \neq 0$ при $j \in J$, где J — множество всех тех $j\ (= 1, \ldots, q)$, для которых $f^j(x_0) = 0$.

Обозначим через Ω_i' гиперповерхность, определяемую в E^n уравнением $F^i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$, а через Ω_j'' — множество, определяемое в E^n ограничением $f^j(x) \leqslant 0$ ($j=1, \ldots, q$). Тогда гиперплоскость M_i', определяемая уравнением $(x-x_0)\operatorname{grad} F^i(x_0)=0$, является шатром множества Ω_i' в точке x_0 ($i=1, \ldots, p$), а при $j \in J$ полупространство M_j'', определяемое неравенством $(x-x_0)\operatorname{grad} f^j(x_0) \leqslant 0$, является шатром множества Ω_j'' в точке x_0 (см. теорему 2 работы [2]). Наконец, при $j \notin J$ точка x_0 является внутренней точкой множества Ω_j'', и потому множество $M_j''=E^n$ является шатром множества Ω_j'' в точке x_0.

Так как

$$\Sigma = \Big(\bigcap_{i=1}^{p} \Omega_i'\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{q} \Omega_j''\Big) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{l} \Omega_k\Big),$$

то, применяя к функции $F^0(x)$, рассматриваемой на множестве Σ, теорему 1, найдем, что имеет место следующее.

Существуют такое число $\psi_0 \leqslant 0$ и такие векторы a_i', a_j'', a_k, что направления векторов a_i', a_j'', a_k принадлежат соответственно конусам $D(M_i')$, $D(M_j'')$, $D(M_k)$ и справедливо равенство

$$\psi_0 \operatorname{grad} F^0(x_0) = \sum_{i=1}^{p} a_i' + \sum_{j=1}^{q} a_j'' + \sum_{k=1}^{l} a_k,$$

причем в случае $\psi_0=0$ хотя бы один из векторов a_i', a_j'', a_k отличен от нуля. Остается заметить, что в силу определения множеств M_i' и M_j'' имеем $a_i' = -\psi_i \operatorname{grad} F^i(x_0)$ при $i=1, \ldots, p$, где $\psi_1, \ldots, \psi_p$ — некоторые действительные числа; $a_j''=\lambda_j \operatorname{grad} f^j(x_0)$ при $j \in J$, где все числа λ_j, $j \in J$, неотрицательны; $a_j''=0$ при $j \notin J$, благодаря чему можно считать при $j \notin J$, что $a_j''=\lambda_j \operatorname{grad} f^j(x_0)$, $\lambda_j=0$.

Замечание 1. В теореме 1 *не требуется*, чтобы система конусов $M_1, \ldots, M_l$ не обладала свойством отделимости. Однако в случае, если эта система конусов обладает свойством отделимости, утверждение теоремы 1 становится бессодержательным. В самом деле, пусть система конусов $M_1, \ldots$ $\ldots, M_l$ обладает в E^n свойством отделимости. Тогда в силу теоремы 5 работы [3] существуют такие векторы $a_1, \ldots, a_l$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что направление вектора a_j принадлежит конусу $D(M_j)$, $j=1, \ldots, l$, и имеет место соотношение $a_1+\ldots+a_l=0$. Поэтому при $\psi_0=0$ требования (α), (β) теоремы 1 будут выполнены. Таким образом, формально теорема 1 справедлива всегда, но в действительности она представляет интерес лишь в случае, если система конусов $M_1, \ldots, M_l$ не обладает свойством отделимости. Аналогичное замечание относится и к теореме 2 (поскольку она выведена из теоремы 1): она представляет интерес лишь в случае, если система конусов M_i', M_j'', M_k не обладает свойством отделимости. В частности, в теореме 2 не требуется, чтобы система ограничений (2) была в точке x_0 невырожденной, т. е. чтобы полупространства M_j'', $j \in J$, имели общую внутреннюю точку (или, что то же самое, чтобы существовал вектор a, удовлетворяющий для всех $j \in J$ условию $a \operatorname{grad} f^j(x_0) <$ <0). Однако если это условие не выполнено, то в силу теоремы 8 работы [3] система конусов M_j'', $j \in J$, обладает свойством отделимости, а потому подавно система конусов M_i', M_j'', M_k обладает свойством отделимости, и, следовательно, теорема 2 становится бессодержательной.

Замечание 2. В теореме 2 *не требуется*, чтобы функции $F^0, \ldots$ $\ldots, F^p$ были независимыми, т. е. чтобы ранг функциональной матрицы $(\partial F^i/\partial x^j)$ был равен $p+1$. Однако в случае зависимости функций $F^0, \ldots, F^p$ утверждение этой теоремы становится бессодержательным. В самом деле, если векторы $\operatorname{grad} F^i(x_0)$, $i=0, 1, \ldots, p$, линейно зависимы, то существуют такие числа $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p$, не все равные нулю, что

$$\psi_0 \operatorname{grad} F^0(x_0)+\psi_1 \operatorname{grad} F^1(x_0)+\ldots+\psi_p \operatorname{grad} F^p(x_0)=0.$$

Поменяв, если нужно, знаки всех чисел $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p$ на противоположные, можем считать, что $\psi_0 \leqslant 0$, и потому, полагая все λ_j и a_k равными нулю, удовлетворим всем условиям теоремы 2.

Замечание 3. Согласно теореме 1 работы [2], доказанные выше теоремы 1 и 2 будут, в частности, справедливы, если множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ выпуклы, а $M_1, \ldots, M_l$ — опорные конусы этих множеств в точке x_0.

Теорема 3. *Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$, $\Xi_1, \ldots, \Xi_m$ — некоторые множества в пространстве E^n. Пусть, далее, $F(x)$ — гладкая функция, определенная на некотором открытом множестве пространства E^n, содержащем множество*

$$\Sigma=\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l \cap \Xi_1 \cap \ldots \cap \Xi_m.$$

Пусть, наконец, $x_0 \in \Sigma$ и пусть M_i — шатер множества Ω_i в точке x_0 ($i=1, \ldots, l$), а N_j — шатер множества Ξ_j в точке x_0 ($j=1, \ldots, m$). Предположим, что система конусов $N_1, \ldots, N_m$ (с общей вершиной x_0) не обладает в E^n свойством отделимости. Для того чтобы функция F, рассматриваемая на множестве Σ, достигала минимума в точке x_0, необходимо существование такого числа $\psi_0 \leqslant 0$ и таких векторов $a_1, \ldots, a_l$, что направление вектора a_i принадлежит конусу $D(M_i)$, $i=1, \ldots, l$, и выполнены следующие условия:

(α) *если $\psi_0=0$, то хотя бы один из векторов $a_1, \ldots, a_l$ отличен от нуля;*

(β) *$(\psi_0 \operatorname{grad} F(x_0)-a_1-\ldots-a_l)\,\delta x \leqslant 0$ для любого вектора δx, направление которого принадлежит конусу $N_1 \cap \ldots \cap N_m$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 существует такое число $\psi_0 \leqslant 0$ и такие векторы $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m$, что направление вектора a_i принадлежит конусу $D(M_i)$, $i=1, \ldots, l$, направление вектора b_j принадлежит конусу $D(N_j)$, $j=1, \ldots, m$, и выполнено соотношение

$$\psi_0 \operatorname{grad} F(x_0)=a_1+\ldots+a_l+b_1+\ldots+b_m, \tag{3}$$

причем в случае $\psi_0=0$ хотя бы один из векторов $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m$ отличен от нуля. Если мы предположим, что $\psi_0=0$, $a_1=\ldots=a_l=0$, то получим $b_1+\ldots+b_m=0$, причем среди векторов $b_1, \ldots, b_m$ должны быть отличные от нуля. Но это (в силу теоремы 5 работы [3]) противоречит тому, что система конусов $N_1, \ldots, N_m$ не обладает свойством отделимости. Следовательно, среди величин $\psi_0, a_1, \ldots, a_l$ имеются отличные от нуля, т. е. условие (α) выполнено.

Чтобы проверить выполнение условия (β), положим

$$c=\psi_0 \operatorname{grad} F(x_0)-a_1-\ldots-a_l. \tag{4}$$

Так как $c=b_1+\ldots+b_m$ (см. (3)), то в силу теоремы 2 работы [3] направление вектора c принадлежит конусу $[D(N_1), \ldots, D(N_m)]$, т. е. выпуклой оболочке конусов $D(N_1), \ldots, D(N_m)$. Согласно теореме 4 той же работы, это означает, что направление вектора c принадлежит конусу $D(N_1 \cap \ldots \cap N_m)$, т. е. $c+2n\delta x \leqslant 0$ для любого вектора δx, направление которого принадлежит конусу $N_1 \cap \ldots \cap N_m$. Но это и означает в силу (4), что выполнено условие (β).

Совершенно так же, как из теоремы 1 была получена теорема 2, из теоремы 3 получаем следующее предложение.

Теорема 4. *Пусть Ω' — множество, определяемое в пространстве E^n уравнениями*

$$F^1(x)=0, \ \ldots, \ F^p(x)=0,$$

и Ξ' — множество, определяемое в E^n уравнениями

$$G^1(x) = 0, \ \ldots, \ G^r(x) = 0.$$

Пусть, далее, Ω'' — *множество, определяемое ограничениями*

$$f^1(x) \leqslant 0, \ \ldots, \ f^q(x) \leqslant 0,$$

Ξ'' — *множество, определяемое ограничениями*

$$g^1(x) \leqslant 0, \ \ldots, \ g^s(x) \leqslant 0, \tag{5}$$

и $\Omega_1, \ldots, \Omega_l, \ \Xi_1, \ldots, \Xi_m$ — *некоторые множества пространства* E^n. *Пусть, наконец,* $F^0(x)$ — *функция, определенная на некотором открытом множестве пространства* E^n, *содержащем множество*

$$\Sigma = \Omega' \cap \Omega'' \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l \cap \Xi' \cap \Xi'' \cap \Xi_1 \cap \ldots \cap \Xi_m.$$

Все функции F^i, G^α, f^j, g^β *предполагаются гладкими. Пусть* $x_0 \in \Sigma$ *и пусть* M_i — *шатер множества* Ω_i *в точке* x_0 $(i = 1, \ldots, l)$, N_j — *шатер множества* Ξ_j *в точке* x_0 $(j = 1, \ldots, m)$. *Через* I *обозначим множество тех чисел* $\beta = 1, \ldots, s$, *для которых* $g^\beta(x_0) = 0$. *Будем предполагать, что все векторы* $\operatorname{grad} G^\alpha(x_0)$, $\alpha = 1, \ldots, r$; $\operatorname{grad} g^\beta(x_0)$, $\beta \in I$, *отличны от нуля. Обозначим через* N'_α *касательную гиперплоскость гиперповерхности* $G^\alpha(x) = 0$ *в точке* x_0 $(\alpha = 1, \ldots, r)$, *а через* N''_β — *полупространство, определяемое неравенством* $(x - x_0) \operatorname{grad} g^\beta(x_0) \leqslant 0$ $(\beta \in I)$, *и предположим, что система выпуклых конусов* N'_α, N''_β, N_γ $(\alpha = 1, \ldots, r; \ \beta \in I; \ \gamma = 1, \ldots, m)$ *не обладает свойством отделимости. Для того чтобы функция* $F^0(x)$, *рассматриваемая на множестве* Σ, *достигала минимума в точке* x_0, *необходимо существование таких чисел* $\psi_0 \leqslant 0, \psi_1, \ldots, \psi_p$, *таких неотрицательных чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ *и таких векторов* $a_1, \ldots, a_l$, *направления которых принадлежат соответственно конусам* $D(M_1), \ldots, D(M_l)$, *что выполнены следующие условия:*

(α) *если все числа* $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ *равны нулю, то хотя бы один из векторов* $a_1, \ldots, a_l$ *отличен от нуля;*

$$(\beta) \qquad \left(\sum_{i=0}^{p} \psi_i \operatorname{grad} F^i(x_0) - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \operatorname{grad} f^j(x_0) - a_1 - \ldots - a_l\right) \delta x \leqslant 0$$

для любого вектора δx, *направление которого принадлежит пересечению конусов* N'_α, N''_β, N_γ $(\alpha = 1, \ldots, r; \ \beta \in I; \ \gamma = 1, \ldots, m)$;

(γ) *для каждого* $j = 1, \ldots, q$ *справедливо соотношение* $\lambda_j f^j(x_0) = 0$.

Теорема 4 является наиболее общей из доказанных выше теорем. В ее формулировке p, q, r, s, l, m могут быть любыми неотрицательными целыми числами. Считая некоторые из них равными нулю, мы получим из теоремы 4 ряд частных случаев (из них некоторые были отмечены в литературе).

Замечание 4. В теореме 3 требование о том, что система конусов $N_1, \ldots, N_m$ не обладает свойством отделимости, может быть отброшено, если взамен этого известно, что *конус* $N = N_1 \cap \ldots \cap N_m$ *является шатром множества* $\Xi = \Xi_1 \cap \ldots \cap \Xi_m$ *в точке* x_0. Действительно, в этом случае можно рассмотреть лишь одно множество Ξ и его шатер N, т. е. применить теорему 3 для случая $m = 1$ (когда никаких требований на конус N нет). Аналогичное замечание относится и к теореме 4. Отметим один частный случай теоремы 4, когда указанное обстоятельство имеет место. Пусть гиперповерхностей $G^\alpha(x) = 0$ и множеств Ξ_γ нет совсем (т. е. $r = m = 0$), а каждая из функций $g^1(x), \ldots, g^s(x)$ является гладкой и вогнутой. В этом случае теорема 4 справедлива без всяких дополнительных требований на конусы N''_β. В самом деле, в силу вогнутости функций $g^\beta(x)$ все точки подпространства N''_β, близкие к x_0, содержатся при $\beta \in I$ в множестве, определяемом ограничением $g^\beta(x) \leqslant 0$. Поэтому пересечение $N = \bigcap_{\beta \in I} N''_\beta$ представляет собой выпуклый конус с вершиной x_0, причем близкие к вершине точки этого конуса удовлетворяют всем ограничениям (5), т. е. содержатся в множестве Ξ, определяемом этими ограничениями. Таким образом, N есть шатер множества Ξ в точке x_0 (в качестве отображения ψ, удовлетворяющего сформулированным в определении шатра условиям 1°—3°, можно взять тождественное отображение).

Итак, хотя в общем случае теорема 4 (при $r = m = 0$) требует, чтобы система ограничений (5) была в точке x_0 невырожденной (см. замечание 1), но если все функции $g^\beta(x)$ — вогнутые, то это требование оказывается ненужным.

Пример. Обозначим через Ξ_1 множество, описываемое в пространстве E^n переменных $x^1, \ldots, x^n$ соотношениями $|x^2| \leqslant (x^1)^2$, $x^1 \geqslant 0$, через Ξ_2 — множество, описываемое соотношениями $|x^4| \leqslant (x^3)^2$, $x^3 \geqslant 0$, а через Ω' — гиперповерхность, определяемую уравнением $F^1(x) = x^6 - (x^5)^2 = 0$. Легко видеть, что полуплоскость N_1, определяемая соотношениями $x^2 = 0$, $x^1 \geqslant 0$, является максимальным шатром множества Ξ_1 во всех точках $(n-2)$-мерной плоскости L_1, определяемой уравнениями $x^1 = x^2 = 0$; точно так же полуплоскость N_2, определяемая соотношениями $x^4 = 0$, $x^3 \geqslant 0$, является максимальным шатром множества Ξ_2 во всех точках $(n-2)$-мерной плоскости L_2, определяемой уравнениями $x^3 = x^4 = 0$. Наконец, максимальным шатром гиперповерхности Ω' (в любой ее точке) является гиперплоскость N', касающаяся этой гиперповерхности. Таким образом, в точках каждого из множеств $L_1 \cap \Xi_2 \cap \Omega'$, $\Xi_1 \cap L_2 \cap \Omega'$ два из трех шатров N_1, N_2, N' не являются телесными, а в точках множества $L_1 \cap L_2 \cap \Omega'$ все три шатра не являются телесными, так что в точках этих множеств метод Дубовицкого—Милютина непосредственно неприменим (какова бы ни была функция F^0, минимум которой ищется на множестве $\Omega' \cap \Xi_1 \cap \Xi_2$).

Рассмотрим применение теоремы 4 в этих условиях, причем для примера будем искать на множестве $\Omega' \cap \Xi_1 \cap \Xi_2$ минимум функции

$$F^0(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \frac{19}{36} \sum_{i=1}^{n} x^i.$$

Допустим, что эта функция достигает минимума в точке $x_0 = (a^1, \ldots, a^n) \in \Omega' \cap \Xi_1 \cap \Xi_2$. Через N_1, N_2 мы будем теперь обозначать максимальные шатры множеств Ξ_1, Ξ_2 в точке x_0 (при $x \notin L_i$ эти максимальные шатры описываются теоремой 2 работы [2]). Заметим, что конусы N_1 и N_2, как легко видеть, неотделимы, и это позволяет применить теорему 4. Условие (β) теоремы 4 принимает вид

$$\psi_0 \operatorname{grad} F^0(x_0)\, \delta x + \psi_1 (\delta x^6 - 2a^5 \delta x^5) \leqslant 0 \tag{6}$$

для любого вектора $\delta x = (\delta x^1, \ldots, \delta x^n)$, направление которого принадлежит конусу $N_1 \cap N_2$. Непосредственно проверяется, что при

$$\delta x^1 = -a^1, \quad \delta x^2 = -2a^2, \quad \delta x^3 = -a^3, \quad \delta x^4 = -2a^4 \tag{7}$$

(и при любых $\delta x^5, \ldots, \delta x^n$) направление вектора δx принадлежит конусу $N_1 \cap N_2$. Поэтому при $\psi_0 = 0$, $\psi_1 \neq 0$ получилось бы в силу (6), что $\psi_1 (2\delta x^6 - 2a^5 \delta x^5) \leqslant 0$ при любых δx^5, δx^6, что невозможно. Следовательно, $\psi_0 \neq 0$, т. е. $\psi_0 < 0$, и потому можно считать, что $\psi_0 = -1$. Условие (6) теперь принимает вид

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(2a^i + \frac{19}{36}\right) \delta x^i + \psi_1 (\delta x^6 - 2a^5 \delta x^5) \leqslant 0. \tag{8}$$

Так как это соотношение справедливо, в частности, когда δx^1, δx^2, δx^3, δx^4 принимают значения (7) и $\delta x^5 = \ldots = \delta x^n = 0$, то

$$\left(2a^1+\frac{19}{36}\right)a^1+2\left(2a^2+\frac{19}{36}\right)a^2+\left(2a^3+\frac{19}{36}\right)a^3+$$
$$+2\left(2a^4+\frac{19}{36}\right)a^4\leqslant 0.$$

Записав это соотношение в виде

$$\frac{19}{18}\left((a^1)^2+a^2\right)\frac{19}{18}\left((a^3)^2+a^4\right)+\frac{17}{18}(a^1)^2+\frac{17}{18}(a^3)^2+4(a^2)^2+4(a^4)^2+$$
$$+\frac{19}{36}(a^1+a^3)\leqslant 0$$

и замечая, что все слагаемые слева, кроме последнего, заведомо неотрицательны (первые два слагаемых неотрицательны в силу определения множеств Ξ_1 и Ξ_2), находим $a^1+a^3\leqslant 0$. Отсюда опять же в силу определения множеств Ξ_1, Ξ_2 получаем $a^1=0$, $a^3=0$, и потому $a^2=0$, $a^4=0$. Теперь соотношения (7) принимают вид $\delta x^1=\delta x^2=\delta x^3=\delta x^4=0$, и при этих значениях соотношение (8) принимает вид

$$-\sum_{i=5}^{n}\left(2a^i+\frac{19}{36}\right)\delta x^i+\psi_1(\delta x^6-2a^5\delta x^5)\leqslant 0,$$

причем это соотношение справедливо для любых $\delta x^5, \ldots, \delta x^n$. Следовательно,

$$-\left(2a^5+\frac{19}{36}\right)-2\psi_1 a^5=0,\quad -\left(2a^6+\frac{19}{36}\right)+\psi_1=0,$$
$$-\left(2a^7+\frac{19}{36}\right)=0,\ \ldots,\ -\left(2a^n+\frac{19}{36}\right)=0. \tag{9}$$

Первые два из этих соотношений вместе с соотношением $a^6-(a^5)^2=0$ (справедливым, так как $x_0\in\Omega'$) составляют систему трех уравнений с тремя неизвестными a^5, a^6, ψ_1. Исключая из этой системы a^6 и ψ_1, получаем

$$\left(a^5+\frac{1}{6}\right)\left(4(a^5)^2-\frac{2}{3}a^5+\frac{19}{6}\right)=0.$$

Отсюда находим $a^5=-1/6$ и, следовательно, $a^6=1/36$. Наконец, дальнейшие из соотношений (9) дают значения $a^7=\ldots=a^n=-19/72$.

Итак, минимум функции $F^0(x)$ на множестве $\Omega'\cap\Xi_1\cap\Xi_2$ может достигаться только в точке x_0, имеющей координаты $a^1=a^2=a^3=a^4=0$, $a^5=-1/6$, $a^6=1/36$, $a^7=\ldots=a^n=-19/72$. Значит, в этой точке функция $F^0(x)$ действительно достигает минимума, поскольку множество $\Omega'\cap\Xi_1\cap\Xi_2$ замкнуто, а функция $F^0(x)$ непрерывна и неограниченно возрастает при удалении точки x в бесконечность (по любому направлению).

Литература

1. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 3, 1965.
2. Болтянский В. Г. Изв. АН АрмССР, Математика, 7, № 4, 1972.
3. Болтянский В. Г. Изв. АН АрмССР, Математика, 7, № 5, 1972.

Поступила в редакцию
1 февраля 1972 г.

Математический институт
им. В. А. Стеклова