И. И. Аргатов, Асимптотика приведенной логарифмической емкости, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2005, том 45, номер 1, 126–144

https://www.mathnet.ru/zvmmf722

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2005, том 45, № 1, с. 126–144

УДК 519.634

АСИМПТОТИКА ПРИВЕДЕННОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ[1)]

© 2005 г. И. И. Аргатов

(199026 С.-Петербург, Косая линия, 15-а, ГМА им. адм. С.О. Макарова)
e-mail: argatov@home.ru

Поступила в редакцию 11.02.2003 г.

Рассматривается однородная задача Дирихле для оператора Лапласа в области, представляющей собой слой с отверстием G; на плоскостях слоя ставятся условия периодичности, решение разыскивается в классе логарифмически растущих функций на бесконечности. Приведенная логарифмическая емкость замкнутой области $\overline{G}$ определяется как обобщение логарифмической емкости (внешнего конформного радиуса) замкнутой плоской области. Формальная асимптотика построена в следующих случаях формы области G: область, близкая к цилиндрической, тонкий цилиндр малой высоты, область малого диаметра, узкий цилиндр малой толщины. Библ. 20.

Ключевые слова: логарифмическая емкость, задача Дирихле для оператора Лапласа, асимптотическое поведение решения.

1. ПРИВЕДЕННАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ И ЕЕ СВОЙСТВА

1.1. Приведенная логарифмическая емкость

Обозначим через $\omega(z)$ однопараметрическое семейство односвязных областей на плоскости, имеющих гладкие границы $\partial\omega(z)$. Зависимость от переменной z будем предполагать гладкой и периодической с периодом $2l$. Пусть еще

$$Q = \{\mathbf{x} = (\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < l, \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{\omega(z)}\}. \tag{1.1}$$

Область Q представляет собой слой толщины $2l$ с отверстием

$$G = \{\mathbf{x} : |z| < l, \mathbf{y} \in \omega(z)\}.$$

Боковую поверхность области G обозначим через g, т.е. положим $g = \partial G \cap \overline{Q}$.

В области Q рассмотрим задачу

$$\Delta_x w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q, \tag{1.2}$$

$$w(\mathbf{y}, -l) = w(\mathbf{y}, l), \quad \frac{\partial w}{\partial z}(\mathbf{y}, -l) = \frac{\partial w}{\partial z}(\mathbf{y}, l), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{\omega(l)}, \tag{1.3}$$

$$w(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in g. \tag{1.4}$$

Разрешимость задачи (1.2)–(1.4) была исследована в [1]. В частности, справедлива

Теорема 1 (см. [1]). (i) *Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ – гладкая функция, периодическая по z с периодом $2l$. Тогда существует единственное ограниченное решение $w(\mathbf{x})$ задачи* (1.2)–(1.4). *Это решение гладко зависит от переменной $\mathbf{x} \in \overline{Q}$ и допускает асимптотическое разложение*

$$sw(\mathbf{x}) = c(\varphi) + Q(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad |\mathbf{y}| = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \longrightarrow \infty, \tag{1.5}$$

которое можно почленно дифференцировать.

(ii) *Однородная задача* (1.2)–(1.4) *имеет решение $e(\mathbf{x})$ с асимптотикой*

$$e(\mathbf{x}) = -\ln|\mathbf{y}| + \kappa + O(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty. \tag{1.6}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Франко-русского центра по прикладной математике и информатике им. А.М. Ляпунова (проект № 00-01).

Величина $c(\varphi)$ в разложении (1.5) вычисляется по формуле

$$c(\varphi) = -\frac{1}{4\pi l}\iint_g \varphi(\mathbf{x})\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x})d\sigma_x, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{n}_x$ – внешняя (по отношению к области G) нормаль к поверхности g, $d\sigma_x$ – элемент площади поверхности g.

Асимптотическая формула (1.6) подобна разложению

$$E(\mathbf{y}) = -\ln|\mathbf{y}| + \ln\bar{r} + O(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty, \tag{1.8}$$

решения $E(\mathbf{y})$ однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности ограниченной области ω на плоскости. Величина $\bar{r}$ называется *логарифмической емкостью* или внешним конформным радиусом замкнутой области $\bar{\omega}$ (см., например, [2], [3]). По аналогии, в [1] величина

$$c_{\log}(\bar{G}) = \exp(\kappa) \tag{1.9}$$

названа *приведенной логарифмической емкостью* замкнутой области $\bar{G}$.

Отметим, что справедливы равенства, следующие из [1]:

$$-\frac{1}{4\pi l}\iint_g \left\{\begin{matrix} 1 \\ \ln|\mathbf{y}| \end{matrix}\right\}\frac{\partial e}{\partial n_x}(\mathbf{x})d\sigma_x = \left\{\begin{matrix} 1 \\ \kappa \end{matrix}\right\}. \tag{1.10}$$

(Нижняя формула (1.10) верна в предположении, что область $\omega(z)$ содержит начало координат при всех $x \in [-l, l]$.)

Формулы (1.10) аналогичны известным соотношениям для функции $E(\mathbf{y})$. Покажем, что приведенная логарифмическая емкость наследует также и некоторые свойства логарифмической емкости.

1.2. Монотонность приведенной логарифмической емкости

Очевидно

Предложение 1. *Величина $c_{\log}(\bar{G})$ не изменяется при поступательном переносе осей координат и повороте их вокруг оси Oz.*

Заметим, что величину $c_{\log}(\bar{G})$ по аналогии с внешним конформным радиусом также уместно назвать *приведенным внешним гармоническим радиусом*. Следующие два утверждения распространяют известные свойства внешнего конформного радиуса (см., например, [2, задачи 121 и 123, отд. IV]) на приведенную логарифмическую емкость.

Предложение 2. *Пусть G_1 и G_2 суть две цилиндрические области высоты $2l$. Предположим, что $G_1 \subset G_2$, причем $\mathrm{mes}_3(G_2\backslash G_1) \neq 0$. Тогда*

$$c_{\log}(\bar{G}_1) < c_{\log}(\bar{G}_2). \tag{1.11}$$

Доказательство. Имеющее логарифмический рост на бесконечности (см. (1.6)) решение однородной задачи (1.2)–(1.4), отвечающее цилиндру G_i, обозначим через $e_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$. В силу принципа максимума для гармонических функций (см., например, [4]) верны неравенства

$$e_1(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in Q_1, \quad \frac{\partial e_2}{\partial n_x}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in g_2. \tag{1.12}$$

Рассмотрим функцию $w(\mathbf{x}) = e_2(\mathbf{x}) - e_1(\mathbf{x})$, гармоническую в области Q_2 и имеющую следующее разложение на бесконечности:

$$w(\mathbf{x}) = \kappa_2 - \kappa_1 + O(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty.$$

Согласно формуле (1.7) имеем

$$\kappa_2 - \kappa_1 = -\frac{1}{4\pi l}\iint\limits_{g_2} w(\mathbf{x})\frac{\partial e_2}{\partial n_x}(\mathbf{x})d\sigma_x. \tag{1.13}$$

Поскольку $w(\mathbf{x}) = -e_1(\mathbf{x})$ на поверхности g_2, из соотношения (1.13) при учете неравенств (1.12) вытекает требуемое неравенство (1.11).

Следствие 1. Пусть r (соответственно, R) – радиус наибольшего (соответственно, наименьшего) замкнутого кругового цилиндра высоты $2l$, содержащегося в $\overline{G}$ (соответственно, содержащего $\overline{G}$). Тогда

$$r \le c_{\log}(\overline{G}) \le R,$$

причем знак равенства имеет место только тогда, когда $\overline{G}$ – круговой цилиндр.

2. ПРИВЕДЕННАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ ТЕЛА С ПОЧТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

2.1. Формулы типа Рэлея для первой и второй вариации

Пусть боковая поверхность g_ε тела G_ε в цилиндрических координатах r, φ, z задается уравнением

$$r = r_0(1 + \varepsilon F(\varphi, z)), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad |z| \le l, \tag{2.1}$$

где функция $F(\varphi, z)$ представляется двойным рядом Фурье:

$$F(\varphi, z) = a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty}[a_{m0}\cos(m\varphi) + c_{m0}\sin(m\varphi)] + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{0k}\cos\frac{\pi k z}{l} + b_{0k}\sin\frac{\pi k z}{l}\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{mk}\cos(m\varphi)\cos\frac{\pi k z}{l} + b_{mk}\cos(m\varphi)\sin\frac{\pi k z}{l} + c_{mk}\sin(m\varphi)\cos\frac{\pi k z}{l} + d_{mk}\sin(m\varphi)\sin\frac{\pi k z}{l}\right).$$

Функцию $e(\mathbf{x})$ будем искать в форме разложения (см. среди прочих [5, § 2.3]):

$$e(\mathbf{x}) = e_0(\mathbf{x}) + \varepsilon e_1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 e_2(\mathbf{x}) + \dots. \tag{2.2}$$

Подставим разложение (2.2) в однородное краевое условие (1.4), заданное на поверхности (2.1), и воспользуемся разложением в ряд Тейлора по степеням переменной $r - r_0$, после чего, приравняв нулю члены при одинаковых степенях параметра ε, выведем граничные условия, которым должны удовлетворять члены ряда (2.2):

$$e_0(r_0, \varphi, z) = 0, \quad e_1(r_0, \varphi, z) = -\frac{\partial e_0}{\partial r}(r_0, \varphi, z)r_0F(\varphi, z),$$

$$e_2(r_0, \varphi, z) = -\frac{\partial e_1}{\partial r}(r_0, \varphi, z)r_0F(\varphi, z) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_0}{\partial r^2}(r_0, \varphi, z)r_0^2F(\varphi, z)^2.$$

Очевидно, что $e_0(r_0, \varphi, z) = -\ln(r/r_0)$. Тем самым будем иметь

$$e_1(r_0, \varphi, z) = F(\varphi, z), \tag{2.3}$$

$$e_2(r_0, \varphi, z) = -\frac{\partial e_1}{\partial r}(r_0, \varphi, z)r_0F(\varphi, z) - \frac{1}{2}F(\varphi, z)^2. \tag{2.4}$$

Методом Фурье находим следующее ограниченное при $r \longrightarrow \infty$ решение задачи (1.2), (1.3) в виде (см., например, [6]):

$$
\begin{aligned}
e_s(r, \varphi, z) = {} & A_{00}^s + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r^m}[A_{m0}^s \cos(m\varphi) + C_{m0}^s \sin(m\varphi)] + \sum_{k=1}^{\infty} K_0\left(\pi k \frac{r}{l}\right)\left(A_{0k}^s \cos\frac{\pi k z}{l} + B_{0k}^s \sin\frac{\pi k z}{l}\right) + \\
& + \sum_{m,k=1}^{\infty} K_m\left(\pi k \frac{r}{l}\right)\left[A_{mk}^s \cos(m\varphi)\cos\frac{\pi k z}{l} + B_{mk}^s \cos(m\varphi)\sin\frac{\pi k z}{l} + \right. \\
& \left. + C_{mk}^s \sin(m\varphi)\cos\frac{\pi k z}{l} + D_{mk}^s \sin(m\varphi)\sin\frac{\pi k z}{l}\right],
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

где K_m – модифицированная функция Бесселя.

Коэффициенты ряда (2.5) при $s = 1$ определяются из граничного условия (2.3):

$$
\begin{gathered}
A_{00}^1 = a_{00}, \quad \begin{Bmatrix} A_{m0}^1 \\ C_{m0}^1 \end{Bmatrix} = r_0^m \begin{Bmatrix} a_{m0} \\ c_{m0} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} A_{0k}^1 \\ B_{0k}^1 \end{Bmatrix} = K_0\left(\pi k \frac{r_0}{l}\right)\begin{Bmatrix} a_{0k} \\ b_{0k} \end{Bmatrix}, \\
\{A_{mk}^1, B_{mk}^1, C_{mk}^1, D_{mk}^1\} = K_m\left(\pi k \frac{r_0}{l}\right)\{a_{mk}, b_{mk}, c_{mk}, d_{mk}\}.
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Дифференцируя разложение (2.5), находим

$$
\begin{aligned}
r_0 \frac{\partial e_1}{\partial r}(r_0, \varphi, z) = {} & -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{r_0^m}[A_{m0}^1 \cos(m\varphi) + C_{m0}^1 \sin(m\varphi)] - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k r_0}{l} K_1\left(\pi k \frac{r_0}{l}\right)\left(A_{0k}^1 \cos\frac{\pi k z}{l} + B_{0k}^1 \sin\frac{\pi k z}{l}\right) + \\
& + \sum_{m,k=1}^{\infty} \frac{\pi k r_0}{l} K_m'\left(\pi k \frac{r}{l}\right)\left[A_{mk}^1 \cos(m\varphi)\cos\frac{\pi k z}{l} + B_{mk}^1 \cos(m\varphi)\sin\frac{\pi k z}{l} + \right. \\
& \left. + C_{mk}^1 \sin(m\varphi)\cos\frac{\pi k z}{l} + D_{mk}^1 \sin(m\varphi)\sin\frac{\pi k z}{l}\right].
\end{aligned}
$$

Подстановка данного выражения в граничное условие (2.4) позволяет определить функцию $e_2(r, \varphi, z)$ в форме ряда (2.5). В частности, находим

$$
\begin{aligned}
A_{00}^2 = {} & -\frac{a_{00}^2}{2} + \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)(a_{m0}^2 + c_{m0}^2) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \Xi_0\left(\pi k \frac{r_0}{l}\right)(a_{0k}^2 + b_{0k}^2) + \\
& + \frac{1}{8}\sum_{m,k=1}^{\infty} \Xi_m\left(\pi k \frac{r_0}{l}\right)(a_{mk}^2 + b_{mk}^2 + c_{mk}^2 + d_{mk}^2),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где введено обозначение

$$
\Xi_m(x) = 2xK_m(x)^{-1}K_{m-1}(x) + 2m - 1.
$$

Определим теперь коэффициенты в разложении

$$
c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon) = r_0(1 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \ldots). \tag{2.8}
$$

Поскольку $\ln c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon) = \ln r_0 + \varepsilon A_{00}^1 + \varepsilon^2 A_{00}^2 + \ldots$, получаем $R_1 = A_{00}^1$ и $R_2 = A_{00}^2 + 2^{-1}(A_{00}^1)^2$. Таким образом, ввиду выражений (2.6) и (2.7) будем иметь $R_1 = a_{00}$ и

$$\begin{aligned} 4R_2 = &\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)(a_{m0}^2 + c_{m0}^2) + \sum_{k=1}^{\infty}\Xi_0\left(\pi k\frac{r_0}{l}\right)(a_{0k}^2 + b_{0k}^2) + \\ &+\frac{1}{2}\sum_{m,k=1}^{\infty}\Xi_m\left(\pi k\frac{r_0}{l}\right)(a_{mk}^2 + b_{mk}^2 + c_{mk}^2 + d_{mk}^2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Заметим (см. [2, § 1.32]), что отличительная черта метода Рэлея состоит в разложении вариации круглого края в ряд Фурье и в выражении первой и второй вариаций величины, зависящей от края, в терминах коэффициентов Фурье.

2.2. Об оценке приведенной логарифмической емкости

Следуя [2], по аналогии с внешним конформным радиусом $\bar{r}$ замкнутой области $\bar{\omega}$, для которого справедливо неравенство

$$\sqrt{\pi^{-1}A} \le \bar{r} \le (2\pi)^{-1}L,$$

где A и L – площадь и периметр фигуры ω, для логарифмической емкости замкнутой области $\overline{G}$ высоты $2l$ можно предложить следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{V(G)}{2\pi l}} \overset{?}{\le} c_{\log}(\overline{G}) \overset{?}{\le} \frac{S(g)}{4\pi l}. \tag{2.10}$$

Здесь $V(G)$ и $S(g)$ суть объем области G и площадь ее боковой поверхности g.

Необходимое условие (см. [2, § 1.35]) справедливости двойного неравенства (2.10) для всех почти цилиндрических областей заключается в положительной определенности или полуопределенности квадратичных форм, отвечающих вариациям разностей $c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon) - \sqrt{(2\pi l)^{-1}V(G_\varepsilon)}$ и $(4\pi l)^{-1}S(g_\varepsilon) - c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon)$.

С точностью до членов $O(\varepsilon^3)$ имеем

$$\sqrt{\frac{V(G)}{2\pi l r_0^2}} \simeq 1 + \varepsilon a_{00} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(a_{m0}^2 + c_{m0}^2) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{0k}^2 + b_{0k}^2) + \frac{1}{2}\sum_{m,k=1}^{\infty}(a_{mk}^2 + b_{mk}^2 + c_{mk}^2 + d_{mk}^2)\right],$$

$$\frac{S(g_\varepsilon)}{4\pi l r_0} \simeq 1 + \varepsilon a_{00} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\sum_{m=1}^{\infty}m^2(a_{m0}^2 + c_{m0}^2) + \sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_{0k}^2 + b_{0k}^2) + \frac{1}{2}\sum_{m,k=1}^{\infty}(m^2+k^2)(a_{mk}^2 + b_{mk}^2 + c_{mk}^2 + d_{mk}^2)\right].$$

Поэтому проверка указанного условия сводится к проверке двойного неравенства

$$1 \le \Xi_m\left(\pi k\frac{r_0}{l}\right) \overset{?}{\le} m^2 + k^2, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.11}$$

Левое неравенство (2.11) очевидно в силу положительности модифицированной функции Бесселя $K_m(x)$. Однако правое неравенство (2.11), вообще говоря, неверно. Так как функция $K_m(x)$ является возрастающей функций значка m (см., например, [7, гл. 7, § 8.3]), это неравенство выполняется при $2\pi r_0 \le l$. Используя асимптотическую формулу (см. [7, гл. 7, § 8.1])

$$K_m(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}e^{-x}(A_0(m) + O(x^{-1})), \quad x \longrightarrow \infty,$$

нетрудно показать, что правое неравенство (2.11) нарушается при $(\pi r_0/l) \gg 1$ и фиксированных значениях индексов m и k.

2.3. Первая и вторая вариации приведенной логарифмической емкости тела с почти цилиндрической поверхностью

Пусть тело G_ε является возмущением цилиндра G_0 высоты $2l$ с поперечным сечением в форме области ω. В окрестности границы $\partial\omega$ введем локальные координаты s и n, где s – длина дуги контура $\partial\omega$, n – расстояние вдоль внешней нормали. Будем считать, что боковая поверхность g_ε тела G_ε в обобщенных цилиндрических координатах n, s, z задается уравнением

$$n = \varepsilon F(s, z), \quad s \in [0, L), \quad |z| \le l. \tag{2.12}$$

Функция $F(s, z)$ предполагается гладкой и периодической по переменной s с периодом L, где L – периметр фигуры ω, и с периодом $2l$ по переменной z.

Определим коэффициенты в разложении

$$\kappa_\varepsilon = \ln\bar{r} + \varepsilon\kappa_1 + \varepsilon^2\kappa_2 + \ldots, \tag{2.13}$$

где $\bar{r}$ – внешний конформный радиус замкнутой области $\overline{\omega}$.

Так, для членов ряда (2.2) имеем следующее граничное условие:

$$e_0(0, s, z) = 0, \quad e_1(0, s, z) = -\frac{\partial e_0}{\partial n}(0, s, z)F(s, z), \tag{2.14}$$

$$e_2(0, s, z) = -\frac{\partial e_1}{\partial n}(0, s, z)F(s, z) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_0}{\partial n^2}(0, s, z)F(s, z)^2. \tag{2.15}$$

В качестве невозмущенного решения $e_0(\mathbf{x})$ выступает решение $E(\mathbf{y})$ плоской однородной задачи Дирихле во внешности области ω, удовлетворяющее асимптотическому условию (1.8).

Применяя формулу (1.7), находим

$$\kappa_1 = \frac{1}{4\pi l}\int_{\partial\omega}\frac{\partial E}{\partial n}(0, s)^2\int_{-l}^{l}F(s, z)dzds. \tag{2.16}$$

Далее, в силу уравнения Лапласа выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial n^2}(0, s, z) = -k(s)\frac{\partial e_0}{\partial n}(0, s, z), \tag{2.17}$$

где $k(s)$ – кривизна контура $\partial\omega$. Подставляя правую часть граничного условия (2.15) при учете соотношения (2.17) в формулу (1.7), выводим

$$\kappa_2 = \frac{1}{4\pi l}\int_{\partial\omega}\int_{-l}^{l}\frac{\partial e_1}{\partial n}(0, s, z)F(s, z)\frac{\partial e_0}{\partial n}(0, s, z)dzds - \frac{1}{8\pi l}\int_{\partial\omega}\int_{-l}^{l}k(s)\frac{\partial E}{\partial n}(0, s)^2F(s, z)^2dzds.$$

Теперь, принимая во внимание граничное условие (2.14) для функции $e_1(\mathbf{x})$, первый интеграл в предыдущем равенстве преобразуем при помощи формулы Грина. Обозначая через Q_0 слой толщины $2l$ с отверстием $\overline{G}_0$, получаем

$$\kappa_2 = \frac{1}{4\pi l}\iiint_{Q_0}|\nabla_x e_1(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \frac{1}{8\pi l}\int_{\partial\omega}k(s)\frac{\partial E}{\partial n}(0, s)^2\int_{-l}^{l}F(s, z)^2dzds. \tag{2.18}$$

Наконец, коэффициенты в разложении

$$c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon) = \bar{r}(1 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \ldots) \tag{2.19}$$

выражаются через коэффициенты в разложении (2.13) по формулам

$$R_1 = \kappa_1, \quad R_2 = 2^{-1}\kappa_1^2 + \kappa_2. \tag{2.20}$$

Формулы (2.16) и (2.18) позволяют рассчитать первую и вторую безразмерные вариации (2.20) приведенной логарифмической емкости (2.19) тела с почти цилиндрической поверхностью в общем случае (2.12).

3. АСИМПТОТИКА ПРИВЕДЕННОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ ТОНКОГО ЦИЛИНДРА

3.1. Постановка задачи и конструкция асимптотики

Пусть тело G_ε представляет собой тонкую область толщиной $2\varepsilon l$ и является возмущением цилиндра $\omega \times [-\varepsilon l, \varepsilon l]$. Будем считать, что боковая поверхность g_ε тела G_ε в обобщенных цилиндрических координатах n, s, z задается уравнением

$$n = \varepsilon F\left(s, \frac{\pi z}{\varepsilon l}\right), \quad s \in [0, L), \quad |z| \le \varepsilon l. \tag{3.1}$$

Здесь s – длина дуги контура $\partial\omega$, n – расстояние вдоль внешней нормали; функция $F(s, \zeta)$ предполагается гладкой и периодической по переменной s с периодом L, где L – периметр фигуры ω, и с периодом 2π по переменной ζ. Не умаляя общности, можно считать, что значения функции $F(s, \zeta)$ неотрицательны.

Следуя известному алгорифму построения асимптотики решения краевых задач в тонких областях (см. [8]–[10] и др.), введем "растянутую" переменную

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\pi z}{l}, \tag{3.2}$$

сделав растяжение области Q_ε вдоль оси z в $\pi/(\varepsilon l)$ раз. Решение однородной задачи (1.2)–(1.4) в области Q_ε, удовлетворяющее условию на бесконечности (1.6), будем искать в виде разложения

$$v_0(\mathbf{y}, \zeta) + \varepsilon v_1(\mathbf{y}, \zeta) + \varepsilon^2 v_2(\mathbf{y}, \zeta) + \ldots. \tag{3.3}$$

Для членов ряда (3.3) имеем следующую рекуррентную систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial\zeta^2}(\mathbf{y}, \zeta) = 0, \quad k = 0, 1, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial\zeta^2}(\mathbf{y}, \zeta) = -\Delta_y v_{k-2}(\mathbf{y}, \zeta), \quad |\zeta| < \pi, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{3.5}$$

с условиями согласования

$$v_k(\mathbf{y}, \pi) = v_k(\mathbf{y}, -\pi), \quad \frac{\partial v_k}{\partial\zeta}(\mathbf{y}, \pi) = \frac{\partial v_k}{\partial\zeta}(\mathbf{y}, -\pi), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, что общим решением уравнения (3.4), удовлетворяющим условиям периодичности (3.6), является независимая от переменной ζ произвольная функция "медленных" переменных y_1 и y_2. Далее рассмотрим уравнение (3.5) при $k = 2$, т.е.

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial\zeta^2}(\mathbf{y}, \zeta) = -\Delta_y v_0(y), \quad |\zeta| < \pi.$$

Его общее решение, очевидно, таково:

$$v_2(\mathbf{y}, \zeta) = -\frac{\zeta^2}{2}\Delta_y v_0(\mathbf{y}) + C_1(\mathbf{y})\zeta + C_2(\mathbf{y}).$$

Удовлетворяя условиям периодичности (3.6), получаем $C_1(\mathbf{y}) = 0$, $\Delta_y v_0(\mathbf{y}) = 0$, и тем самым, функция v_2 не зависит от переменной ζ. Продолжая указанную процедуру, находим, что все члены ряда (3.3) не зависят от "быстрой" переменной ζ и удовлетворяют уравнению

$$\Delta_y v_k(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2\backslash\bar{\omega}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.7}$$

При этом на бесконечности должны выполняться следующие соотношения:

$$v_0(\mathbf{y}) = -\ln|\mathbf{y}| + O(1), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty, \tag{3.8}$$

$$v_k(\mathbf{y}) = O(1), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{3.9}$$

В окрестности поверхности g_ε, на которой надо соблюсти однородное условие Дирихле (1.4), возникает явление пограничного слоя. Для его описания, во-первых, оператор Лапласа переписываем в локальных координатах:

$$\Delta_x = [1 + nk(s)]^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial s}[1 + nk(s)]^{-1}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}[1 + nk(s)]\frac{\partial}{\partial n}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где $k(s)$ – кривизна контура $\partial\omega$ в точке s. Во-вторых, в полученном выражении вводим растянутые переменные

$$(\eta_1, \eta_2) = \frac{\pi}{\varepsilon l}(n, z), \tag{3.10}$$

оставляя масштаб для координаты s неизменным. В-третьих, разлагаем данный дифференциальный оператор в формальный ряд по степеням параметра ε, т.е.

$$\Delta_x \sim \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 l^2}\Delta_\eta + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n L_n\left(s, \eta_1; \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \eta_1}\right).$$

Здесь L_n – дифференциальный оператор второго или первого порядка, коэффициенты которого зависят полиномиально от η_1 и гладко от s в предположении, что кривая $\partial\omega$ гладкая (класса C^∞). Соответственно, при переходе к координатам (s, η) слой Q_ε в пределе при $\varepsilon \longrightarrow 0$ трансформируется в прямое произведение $\partial\omega \times \Pi(s)$, где $\Pi(s)$ – полуполоса:

$$\Pi(s) = \left\{\eta \in \mathbb{R}^2 : \eta_1 > \frac{\pi}{l}F(s, \eta_2), |\eta_2| < \pi\right\}.$$

Наконец, переходя к построению пограничного слоя, отмечаем, что краевые условия на контуре $\partial\omega$ для членов ряда, т.е.

$$e(\mathbf{x}) \sim v_0(\mathbf{y}) + \varepsilon v_1(\mathbf{y}) + \varepsilon^2 v_2(\mathbf{y}) + \dots, \tag{3.11}$$

будут поставлены, исходя из требования экспоненциального убывания пограничного слоя при удалении от поверхности g_ε.

3.2. Пограничный слой

Применяя метод составных асимптотических разложений, решение рассматриваемой задачи в окрестности поверхности g_ε представляем в виде

$$e(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{y}) + w_0(s, \eta) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k[v_k(\mathbf{y}) + w_k(s, \eta)]. \tag{3.12}$$

Функции $w_k(s, \eta)$ в полуполосе $\Pi(s)$ удовлетворяют рекуррентной системе уравнений

$$-\Delta_\eta w_k(s, \eta) = \sum_{n=1}^{k} L_n\left(s, \eta_1; \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)w_{k-n}(s, \eta), \quad k = 0, 1, \dots. \tag{3.13}$$

(Если верхний предел суммирования меньше нижнего, то сумма подразумевается равной нулю.)

Следствия условий согласования (1.3)

$$w_k(s, \eta_1, \pi) = w_k(s, \eta_1, -\pi), \quad \frac{\partial w_k}{\partial \eta_2}(s, \eta_1, \pi) = \frac{\partial w_k}{\partial \eta_2}(s, \eta_1, -\pi), \quad k = 0, 1, \dots. \tag{3.14}$$

На торце $\Gamma(s) = \{\eta : \eta_1 = \pi l^{-1}F(s, \eta_2), |\eta_2| \le \pi\}$ полуполосы $\Pi(s)$ левая часть равенства (3.12) должна обращаться в нуль. Для вывода краевых условий, которым должны удовлетворять функции $w_k(s, \eta)$ на $\Gamma(s)$, рассмотрим разложение

$$v_k(\mathbf{y}) = v_k^0(s) + v_k^1(s)n + v_k^2(s)\frac{n^2}{2} + \ldots, \tag{3.15}$$

где, в частности,

$$v_k^0(s) = v_k(\mathbf{y}), \quad v_k^1(s) = \frac{\partial v_k}{\partial n}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial\omega. \tag{3.16}$$

В разложении (3.15) перейдем, согласно (3.10), к растянутой переменной, полагая $n = \varepsilon\pi^{-1}l\eta_1$. Полученное разложение в ряд (3.12) подставляем в однородное краевое условие (1.4) и приравниваем нулю члены при последовательных степенях параметра ε. Таким образом приходим к следующим краевым условиям ($k = 0, 1, \ldots$):

$$w_k(s, \eta) = -v_k^0(s) - \sum_{n=1}^{k} v_{k-n}^n(s)\frac{1}{n!}\left(\frac{l\eta_1}{\pi}\right)^n, \quad \eta \in \Gamma(s). \tag{3.17}$$

Напомним, что функция $v_0^0(s)$, входящая в первое соотношение (3.17), т.е. при $k = 0$, еще не определена.

При построении пограничного слоя существенным оказывается его экспоненциальное убывание при $\eta_1 \longrightarrow \infty$. Условие убывания в рассматриваемой задаче для пограничного слоя, составляемое соотношениями (3.13), (3.14) и (3.17), следуя [10], легко отыскать при помощи метода из [11].

Обозначим через $Y(s, \eta)$ гармоническую в полуполосе $\Pi(s)$ функцию, удовлетворяющую условиям периодичности (3.14) и однородному условию Дирихле (3.17) и растущую на бесконечности, как η_1. Справедливо асимптотическое разложение

$$Y(s, \eta) = \eta_1 + c_F(s) + O(\exp(-\eta_1)), \quad \eta_1 \longrightarrow +\infty. \tag{3.18}$$

Подставим функции $Y(s, \eta)$ и $w_k(s, \eta)$ в формулу Грина для области $\Pi(s)$. Принимая во внимание уравнение (3.13), условие периодичности (3.14) и краевое условие (3.17), получаем условие экспоненциального убывания функции $w_k(s, \eta)$ при $\eta_1 \longrightarrow +\infty$ в виде

$$\begin{aligned} v_k^0(s) = {} & \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{k}\int\!\!\int_{\Pi(s)} Y(s, \eta)L_n\left(s, \eta_1; \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)w_{k-n}(s, \eta)d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{k} v_{k-n}^n(s)\int_{\Gamma(s)} \frac{1}{n!}\left(\frac{l\eta_1}{\pi}\right)^n\frac{\partial Y}{\partial \nu}(s, \eta)ds_\eta. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь $\partial/\partial\nu$ – производная вдоль внешней (по отношению к области $\Pi(s)$) нормали к дуге $\Gamma(s)$, ds_η – элемент длины дуги $\Gamma(s)$.

Равенство (3.19) следует рассматривать как краевое условие для членов разложения (3.11). В частности, имеем

$$v_0(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \partial\omega. \tag{3.20}$$

Таким образом, функции $v_k(\mathbf{y})$ и $w_k(s, \eta)$ определяются последовательно, начиная с функции $v_0(\mathbf{y})$.

3.3. Асимптотика приведенной логарифмической емкости

Нетрудно видеть, что решение задачи (3.6)–(3.8), (3.20) имеет вид

$$v_0(\mathbf{y}) = E(\mathbf{y}), \tag{3.21}$$

где для функции $E(\mathbf{y})$ верна асимптотическая формула (1.8). Соответственно, для величины κ_ε в асимптотической формуле (1.6) получаем разложение

$$\kappa_\varepsilon = \ln \bar{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\infty), \tag{3.22}$$

где (аналог формулы (1.7))

$$v_k(\infty) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\omega} v_k(\mathbf{y})\frac{\partial E}{\partial n}(\mathbf{y})ds_y. \tag{3.23}$$

Найдем первый член ряда (3.22). Согласно (3.21) и (3.19) получаем

$$v_1^0(s) = \frac{1}{2\pi}v_0^1(s)\int_{\Gamma(s)} \frac{l\eta_1}{\pi}\frac{\partial Y}{\partial\nu}(s,\eta)ds_\eta, \tag{3.24}$$

где ввиду обозначений (3.16) имеем

$$v_0^1(s) = \frac{\partial E}{\partial n}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}\in\partial\omega. \tag{3.25}$$

Чтобы вычислить интеграл (3.24), подставим в формулу Грина для области $\Pi(s)$ функции $Y(s,\eta)$ и $\tilde{Y}(s,\eta) = Y(s,\eta) - \eta_1$. Принимая во внимание краевое условие $\tilde{Y}(s,\eta) = -\eta_1$ на $\Gamma(s)$ и асимптотику (3.18), выводим

$$2\pi c_F(s) = \int_{\Gamma(s)} \eta_1\frac{\partial Y}{\partial\nu}(s,\eta)ds_\eta. \tag{3.26}$$

Подставляя теперь выражения (3.25) и (3.26) в (3.24), находим

$$v_1^0(s) = c_F(s)\frac{l}{\pi}\frac{\partial E}{\partial n}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}\in\partial\omega. \tag{3.27}$$

Соответственно, подстановка выражения (3.27) в формулу (3.23) дает

$$v_1(\infty) = -\frac{l}{2\pi^2}\int_{\partial\omega} c_F(s)\frac{\partial E}{\partial n}(\mathbf{y})^2 ds_y. \tag{3.28}$$

Заметим, что при этом получается

$$w_1(s,\eta) = \frac{l}{\pi}\frac{\partial E}{\partial n}(0,s)[\tilde{Y}(s,\eta) - c_F(s)].$$

Таким образом, для приведенной логарифмической емкости тонкого цилиндра $\overline{G}_\varepsilon$ на основании соотношений (3.22), (3.28) и (1.9) получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\frac{c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon)}{\bar{r}} = 1 - \frac{\varepsilon l}{2\pi^2}\int_{\partial\omega} c_F(s)\frac{\partial E}{\partial n}(\mathbf{y})^2 ds_y + O(\varepsilon^2), \tag{3.29}$$

где $\bar{r}$ – внешний конформный радиус замкнутой области $\bar{\omega}$.

Наконец, заметим, что поскольку на дуге $\Gamma(s)$ имеет место неравенство $\eta_1 \ge 0$, а, согласно принципу максимума, $\partial_\nu Y(s,\eta) < 0$, то из представления (3.26) вытекает неравенство $c_F(s \le 0)$, причем знак равенства достигается только в случае $F(s,\zeta) = 0$ при $|\zeta| \le \pi$. (Этим объясняется знак минус в формуле (3.29).)

4. АСИМПТОТИКА ПРИВЕДЕННОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ ТЕЛА МАЛОГО ДИАМЕТРА

4.1. Постановка задачи

Пусть G – область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей g, содержащаяся в шаре $\mathbb{B}_l(O)$ с центром в начале координат и радиусом l. Введем множества

$$G_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon^{-1}\mathbf{x} \in G\}, \quad Q_\varepsilon = (\mathbb{R}^2 \times (-l, l)) \backslash \overline{G}_\varepsilon,$$

зависящие от малого параметра ε. Как и прежде, область Q_ε представляет собой слой толщины $2l$ с отверстием G_ε.

В сингулярно возмущенной области Q_ε рассмотрим задачу

$$\Delta_x e(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q_\varepsilon, \quad e(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in g_\varepsilon = \partial G_\varepsilon, \tag{4.1}$$

$$e(\varepsilon; \mathbf{y}, -l) = e(\varepsilon; \mathbf{y}, -l), \quad \frac{\partial e}{\partial z}(\varepsilon; \mathbf{y}, -l) = \frac{\partial e}{\partial z}(\varepsilon; \mathbf{y}, l), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \tag{4.2}$$

$$e(\varepsilon; \mathbf{x}) = -\ln|\mathbf{y}| + O(1), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty. \tag{4.3}$$

Подчеркнем, что, в отличие от ранее изученных случаев, в которых при $\varepsilon \longrightarrow 0$ выполнялось предельное соотношение $e(\varepsilon; \mathbf{x}) \longrightarrow E(\mathbf{y})$ для фиксированного значения переменной $\mathbf{y}$, в рассматриваемой сингулярно возмущенной задаче подобный предельный переход невозможен.

Исследуем поведение решения задачи (4.1)–(4.3) при $\varepsilon \longrightarrow 0$ и, в частности, найдем асимптотику величины $\kappa(\varepsilon)$ из асимптотической формулы

$$e(\varepsilon; \mathbf{x}) = -\ln|\mathbf{y}| + \kappa(\varepsilon) + O(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty. \tag{4.4}$$

Заметим, что величина $\kappa(\varepsilon)$ и приведенная логарифмическая емкость

$$c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon) = \exp[\kappa(\varepsilon)] \tag{4.5}$$

обладают установленным выше свойством монотонности.

4.2. Задача для пограничного слоя. Главный член внутреннего разложения

Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [5], [12], [13] и др.) и решение задачи (4.1)–(4.3) будем разыскивать в форме двух асимптотических разложений по степеням параметра ε: внутреннего и внешнего разложений, справедливых вблизи и вдали от множества G_ε соответственно.

В окрестности поверхности g_ε введем растянутые координаты

$$\xi = \varepsilon^{-1}\mathbf{x}. \tag{4.6}$$

Осуществляя в соотношениях (4.1) и (4.2) замену координат (4.6) и переходя к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$, приходим к задаче для пограничного слоя

$$\Delta_\xi w(\varepsilon; \xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{G}, \quad w(\varepsilon; \xi) = 0, \quad \xi \in g. \tag{4.7}$$

Соотношения (4.7) замыкаются асимптотическим условием на бесконечности, получаемым в результате сращивания с внешним асимптотическим разложением.

Обозначим через $Y_{n,k}(\theta, \varphi)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, сферические функции порядка n вида

$$P_n(\cos\theta), \quad P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi), \quad P_n^m(\cos\theta)\sin(m\varphi), \quad m = [(k+1)/2].$$

Пусть еще $U^{(n,k)}(\xi) = |\xi|^n Y_{n,k}(\theta, \varphi)$ – однородный гармонический полином степени n. Положим

$$\Phi^{(n,k)}(\xi) = N_{n,k}|\xi|^{-n-1} Y_{n,k}(\theta, \varphi). \tag{4.8}$$

Следуя [14], степенные решения $\Phi^{(n,k)}(\xi)$ уравнения Лапласа нормируем так:

$$q(U^{(n,k)}, \Phi^{(m,l)}) = \delta_{n,m}\delta_{k,l}. \tag{4.9}$$

Здесь $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера, $q(u, v)$ – билинейная антисимметричная форма ($\partial/\partial n_\xi$ – производная вдоль внешней по отношению к области G нормали к поверхности g), причем

$$q(u, v) = \iint\limits_g \left(v(\xi)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial v}{\partial n_\xi}(\xi)\right) d\sigma_\xi.$$

Используя свойство ортогональности сферических функций (см., например, [15, § 133]), легко показать, что нормирующий множитель в выражении (4.8) равен

$$N_{n,k} = \frac{2n+1}{2\delta_k\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad m = \left[\frac{k+1}{2}\right],$$

где $\delta_k = 2$ при $k = 0$, $\delta_k = 1$ при $k = 1, 2, \ldots, 2n$.

Следуя [14], введем растущие на бесконечности решения $\eta^{(n,k)}(\xi)$ задачи (4.7), подчиненные асимптотическому условию

$$\eta^{(n,k)}(\xi) = U^{(n,k)}(\xi) + o(1), \quad |\xi| \longrightarrow \infty. \tag{4.10}$$

Через $M(\overline{G})$ обозначим (см. [14]) так называемую $(N^2 \times N^2)$-матрицу поляризации замкнутой области $\overline{G}$, составляемую из коэффициентов в асимптотике

$$\eta^{(n,k)}(\xi) - U^{(n,k)}(\xi) = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2m} M_{m,l}^{n,k}\Phi^{(m,l)}(\xi) + O(|\xi|^{-N-1}). \tag{4.11}$$

Известно [14], что матрица $M(\overline{G})$ отрицательно определена. В частности,

$$M_{0,0}^{0,0} = -4\pi\operatorname{cap}(\overline{G}), \tag{4.12}$$

где $\operatorname{cap}(\overline{G})$ – гармоническая емкость компакта $\overline{G}$. Известно также (см. [2, приложение G1]), что за счет выбора начала координат (при параллельном переносе осей координат) можно добиться следующей асимптотики:

$$\eta^{(0,0)}(\xi) = 1 - \operatorname{cap}(\overline{G})|\xi|^{-1} + O(|\xi|^{-3}), \quad |\xi| \longrightarrow \infty. \tag{4.13}$$

Согласно верхней формуле (1.10), для решения задачи (4.1)–(4.3) должно выполняться равенство

$$-\frac{\varepsilon}{4\pi l}\iint\limits_g \frac{\partial e}{\partial n_\xi}(\varepsilon; \varepsilon\xi)d\sigma_\xi = 1.$$

Значит, для внутреннего асимптотического представления $w(\varepsilon; \xi)$ функции $e(\varepsilon; \mathbf{x})$ надо соблюсти следующее равенство:

$$-\iint\limits_g \frac{\partial w}{\partial n_\xi}(\varepsilon; \xi)d\sigma_\xi = \frac{4\pi l}{\varepsilon}. \tag{4.14}$$

Ввиду нормировки (4.9) имеем

$$-\iint\limits_g \frac{\partial \eta^{(n,k)}}{\partial n_\xi}(\xi)d\sigma_\xi = M_{0,0}^{n,k}. \tag{4.15}$$

Итак, в качестве главного члена внутреннего асимптотического разложения решения задачи (4.1)–(4.3), т.е.

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^{-1}w^{-1}(\xi) + w^0(\xi) + \varepsilon w^1(\xi) + \varepsilon^2 w^2(\xi) + \ldots, \tag{4.16}$$

назначим функцию

$$w^{-1}(\xi) = 4\pi l(M_{0,0}^{0,0})^{-1}\eta^{(0,0)}(\xi). \tag{4.17}$$

Очевидно (см. (4.15)), что функция $\varepsilon^{-1}w^{-1}(\xi)$ удовлетворяет условию (4.14) полностью. Заметим, что условие (4.14), на основании которого предложено выражение (4.17), является следствием условия на бесконечности (4.3), не участвовавшего при формировании задачи для пограничного слоя (4.7).

4.3. Главные члены внешнего асимптотического разложения

При $\varepsilon \longrightarrow 0$ область G_ε стягивается в точку O и краевое условие (4.1) исчезает. Поэтому члены внешнего асимптотического представления

$$v(\varepsilon;\, \mathbf{x}) = \varepsilon^{-1}v^{-1} + v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 v^2(\mathbf{x}) + \ldots \tag{4.18}$$

должны быть функциями, гармоническими в слое $\mathbb{R}^2 \times (-l, l)$, за исключением точки O, удовлетворять условиям периодичности (4.2) и следующим условиям на бесконечности:

$$v^0(\mathbf{x}) = -\ln|\mathbf{y}| + O(1), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty, \tag{4.19}$$

$$v^q(\mathbf{x}) = O(1), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty, \quad q = -1, 1, 2, \ldots. \tag{4.20}$$

Согласно методу сращиваемых разложений, функции $v^q(\mathbf{x})$, $q = 0, 1, \ldots$, должны обладать особенностями в точке O, характер которых определяется в процессе сращивания внешнего разложения (4.18) с внутренним асимптотическим разложением (4.16).

Так, на основании формулы (4.11) при учете (4.13) при $|\xi| \longrightarrow \infty$ имеем следующее разложение:

$$\eta^{(0,0)}(\xi) = 1 + M_{0,0}^{0,0}\Phi^{(0,0)}(\xi) + \sum_{m=2}^{N-1}\sum_{l=0}^{2m} M_{m,l}^{0,0}\Phi^{(m,l)}(\xi) + O(|\xi|^{-N-1}). \tag{4.21}$$

Производя в формуле (4.21) замену координат (4.13), ввиду равенства $\Phi^{(m,l)}(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}) = \varepsilon^{m+1}\Phi^{(m,l)}(\mathbf{x})$ (см. (4.8)) получаем

$$\varepsilon^{-1}w^{-1}(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}) = \frac{4\pi l}{\varepsilon M_{0,0}^{0,0}} + 4\pi l\Phi^{(0,0)}(\mathbf{x}) + \frac{4\pi l}{\varepsilon M_{0,0}^{0,0}}\sum_{m=2}^{N-1}\varepsilon^m\sum_{l=0}^{2m} M_{m,l}^{0,0}\Phi^{(m,l)}(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^N|\mathbf{x}|^{-N-1}). \tag{4.22}$$

На основании разложения (4.22) положим

$$v^{-1} = -l\operatorname{cap}(\bar{G})^{-1}, \tag{4.23}$$

а от функции $v^0(\mathbf{x})$ в окрестности точки O потребуем следующего поведения:

$$v^0(\mathbf{x}) = 4\pi l\Phi^{(0,0)}(\mathbf{x}) + O(1), \quad |\mathbf{x}| \longrightarrow 0. \tag{4.24}$$

Второй член внешнего асимптотического разложения (4.18) назначим в виде

$$v^0(\mathbf{x}) = 4\pi l G^{(0,0)}(\mathbf{x}) + A_0, \tag{4.25}$$

где A_0 – постоянная,

$$G^{(0,0)}(\mathbf{x}) = \Phi^{(0,0)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}'\,[\Phi^{(0,0)}(\mathbf{y}, z - 2jl) - \Phi^{(0,0)}(0, 2jl)]. \tag{4.26}$$

(Штрих у знака суммы в выражении (4.26) означает, что $j \neq 0$.)

Нетрудно видеть, что функция (4.25) удовлетворяет асимптотическому условию (4.24) и условиям периодичности (4.2). Проверим, что она удовлетворяет и асимптотическому условию на бесконечности (4.19).

Обозначим для краткости $f(|j|, \mathbf{x}) = 2l[|\mathbf{y}|^2 + (z - 2jl)^2]^{-1/2}$. При $|z| \le l$, очевидно, $f(|j|, \mathbf{x}) > f(|j| + 1, \mathbf{x})$. Значит, верна оценка

$$\int_1^n f(t, \mathbf{x})dt + f(n, \mathbf{x}) < \sum_{j=1}^{n} f(j, \mathbf{x}) < \int_1^n f(t, \mathbf{x})dt + f(1, \mathbf{x}).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} f(j, \mathbf{x}) = \int_{1}^{n} f(t, \mathbf{x})dt + R_n(\mathbf{x}), \tag{4.27}$$

где остаток $R_n(\mathbf{x}) \in (f(n, \mathbf{x}), f(1, \mathbf{x}))$.

Воспользуемся известным разложением (см., например, [7, гл. 8, § 3])

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} + \mathrm{C} + O(n^{-1}), \quad n \longrightarrow \infty, \tag{4.28}$$

где $\mathrm{C} = 0.577\ldots$ – постоянная Эйлера.

Комбинируя соотношения (4.27) и (4.26) и переходя к пределу при $n \longrightarrow \infty$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} f(j, \mathbf{x}) - \frac{1}{j} = \int_{1}^{\infty}\left(f(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{t}\right)dt - \mathrm{C} + O(f(1, \mathbf{x})).$$

Таким образом, для функции (4.26) находим следующее асимптотическое представление:

$$4\pi l G^{(0,0)}(\mathbf{x}) = -\ln\frac{|\mathbf{y}|}{4l} - \mathrm{C} + O(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty. \tag{4.29}$$

Постоянная A_0, т.е. весь произвол, допущенный в конструкции (4.25) второго члена внешнего разложения, определяется при построении второго члена внутреннего разложения.

4.4. Построение старших членов асимптотики

Условие сращивания

$$\varepsilon^{-1}v^{-1} + v^0(\mathbf{x}) - [\varepsilon^{-1}w^{-1}(\xi) + w^0(\xi)] = O(\varepsilon^{1/2}).$$

В зоне сращивания $\{\mathbf{x} : \sqrt{\varepsilon} \le |\mathbf{x}|/l \le 2\sqrt{\varepsilon}\}$ будет соблюдено, если потребовать, чтобы

$$w^0(\xi) = A_0 + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \longrightarrow \infty. \tag{4.30}$$

Отсюда вытекает представление $w^0(\xi) = A_0\eta^{(0,0)}(\xi)$.

С другой стороны, подставляя разложение (4.16) в формулу (4.14) и интегрируя почленно, получаем

$$\iint_{g} \frac{\partial w^p}{\partial n_\xi}(\xi)d\sigma_\xi = 0, \quad p = 0, 1, \ldots. \tag{4.31}$$

При учете формулы (4.15) условие (4.31) для функции $w^0(\xi)$ приобретает вид $A_0 M_{0,0}^{0,0} = 0$, откуда находим A_0 и $w^0(\xi) \equiv 0$.

Далее, благодаря специальному выбору начала координат относительно области G, при котором справедлива уточненная асимптотика (4.13), в разложении (4.22) отсутствует член порядка ε. Поэтому функция $v^1(\mathbf{x})$ не имеет особенности в точке O, т.е. $v^1(\mathbf{x}) = A_1$, где A_1 – постоянная.

Чтобы для функции $w^1(\xi)$ вывести аналогичное (4.30) асимптотическое условие на бесконечности, замыкающее соотношения (4.7), рассмотрим разложение

$$G^{(0,0)}(\mathbf{x}) = \Phi^{(0,0)}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n} g_{n,k}^{0,0} U^{(n,k)}(\mathbf{x}). \tag{4.32}$$

Поскольку функция $\Phi^{(0,0)}(\mathbf{x})$ четная и налицо симметрия в расположении особенностей ряда, фигурирующего в формуле (4.26), в разложении (4.32) отличны от нуля только коэффициенты

$g_{n,0}^{0,0} = 0$ при четном значении индекса n:

$$G^{(0,0)}(\mathbf{x}) = \Phi^{(0,0)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{2i,0}^{0,0} U^{(2i,0)}(\mathbf{x}). \tag{4.33}$$

Используя разложение (4.33), находим

$$v^0(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-1} 4\pi l \Phi^{(0,0)}(\xi) + \varepsilon^2 4\pi l g_{2,0}^{0,0} U^{(2,0)}(\xi) + O(\varepsilon^4 |\xi|^4), \tag{4.34}$$

где

$$4\pi l g_{2,0}^{0,0} = \frac{1}{4l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3}. \tag{4.35}$$

Из асимптотического представления (4.34) вытекает, что функция $w^1(\xi)$ должна удовлетворять асимптотическому условию вида (4.30) с постоянной A_1, и, как следствие этого, получаем вновь $A_1 = 0$ и $w^1(\xi) \equiv 0$.

Члены внешнего и внутреннего разложений определяются последовательно, друг за другом. Член $O(\varepsilon^2)$ в асимптотическом разложении (4.22) функции $\varepsilon w^{-1}(\xi)$ диктует постановку следующего асимптотического условия:

$$v^2(\mathbf{x}) = \frac{4\pi l}{M_{0,0}^{0,0}} \sum_{l=0}^{4} M_{2,l}^{0,0} \Phi^{(2,l)}(\mathbf{x}) + O(1), \quad |\mathbf{x}| \longrightarrow 0. \tag{4.36}$$

Отметим, что метод сращиваемых разложений допускает в асимптотическом условии (4.36) присутствие сингулярных членов меньшего порядка, т.е. $O(|\mathbf{x}|^{-2})$ и $O(|\mathbf{x}|^{-1})$. Названные сингулярные члены отсутствуют по причине того, что $w^q(\xi) \equiv 0$ при $q = 0, 1$. Таким образом, получаем

$$v^2(\mathbf{x}) = v^{-1} \sum_{l=0}^{4} M_{2,l}^{0,0} G^{(2,l)}(\mathbf{x}) + A_2, \tag{4.37}$$

где использовано обозначение (4.23) и следующее:

$$G^{(m,l)}(\mathbf{x}) = \Phi^{(m,l)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}' \Phi^{(m,l)}(\mathbf{y}, z - 2jl), \qquad m = 1, 2, \ldots, \qquad l = 0, 1, \ldots, 2m. \tag{4.38}$$

Постоянная A_2, как и прежде, определяется на следующем шаге процесса построения асимптотики, а именно при построении функции $w^2(\xi)$. На основании соотношений (4.34) и (4.37) будем иметь

$$w^2(\xi) = 4\pi l g_{2,0}^{0,0} U^{(2,0)}(\xi) + A_2' + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \longrightarrow \infty, \tag{4.39}$$

где

$$A_2' = A_2 + v^{-1} \sum_{l=0}^{4} M_{2,l}^{0,0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}' \Phi^{(2,l)}(0, -2jl).$$

Решение задачи (4.7), (4.39) представим в форме

$$w^2(\xi) = 4\pi l g_{2,0}^{0,0} \eta^{(2,0)}(\xi) + A_2' \eta^{(0,0)}(\xi). \tag{4.40}$$

Подставляя выражение (4.40) в уравнение (4.31), служащее для определения постоянной A_2, при учете равенства (4.15) находим

$$A_2 = -\frac{4\pi l g_{2,0}^{0,0} M_{0,0}^{0,0}}{M_{0,0}^{0,0}} - \frac{4\pi l}{M_{0,0}^{0,0}} \sum_{l=0}^{4} M_{2,l}^{0,0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}' \Phi^{(2,l)}(0, -2jl). \tag{4.41}$$

Процесс построения членов внешнего (4.18) и внутреннего (4.16) асимптотических разложений исходной задачи (4.1)–(4.3) продолжается по схеме, очерченной на примере функций $v^2(\mathbf{x})$ и $w^2(\xi)$.

4.5. Асимптотика приведенной логарифмической емкости

Члены внешнего разложения (4.18) с номерами $q = 2, 3, \ldots$ представляют собой сумму постоянной A_q и линейной комбинации сингулярных решений (4.38). Разумеется, в формировании асимптотики на бесконечности (при $|\mathbf{y}| \longrightarrow \infty$) для функции $e(\varepsilon; \mathbf{x})$ принимают участие только члены внешнего разложения.

Поскольку $G^{(m,\,l)}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{y}|^{-m+1})$ при $|\mathbf{y}| \longrightarrow \infty$ для $m = 1, 2, \ldots$, для постоянной в асимптотике (4.4) получаем разложение

$$\kappa(\varepsilon) = -\frac{l}{\varepsilon \operatorname{cap}(\overline{G})} + \ln 4l - \mathrm{C} + \varepsilon^2 A_2 + \ldots.$$

Тем самым для приведенной логарифмической емкости (4.5) находим асимптотическую формулу

$$c_{\log}(\overline{G}_\varepsilon) = 4l\exp\left(-\frac{l}{\varepsilon \operatorname{cap}(\overline{G})} - \mathrm{C}\right)[1 + \varepsilon^2 A_2 + O(\varepsilon^3)], \tag{4.42}$$

где коэффициент A_2 определен формулой (4.41).

Заметим, что если область G представляет собой шар радиуса R с центром в начале координат, то $M_{n,k}^{n,k} = -N_{n,k}^{-1} R^{2n+1}$, а все остальные коэффициенты матрицы $M(\overline{G})$ равны нулю. Поэтому в (4.42) имеем $A_2 = 0$ и погрешность оценивается величиной $O(\varepsilon^4)$.

5. АСИМПТОТИКА ПРИВЕДЕННОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ УЗКОГО ЦИЛИНДРА

5.1. Постановка задачи и конструкция асимптотики

Как и в разд. 1, через $\omega(z)$ будем обозначать однопараметрическое семейство областей на плоскости, периодически (с периодом $2l$) зависящих от переменной z. Определим узкий цилиндр G_ε с переменным сечением $\omega_\varepsilon(z) = \{\mathbf{y} : \varepsilon^{-1}\mathbf{y} \in \omega(z)\}$ и боковой поверхностью $g_\varepsilon = \{\mathbf{x} : |z| < l, \mathbf{y} \in \partial\omega_\varepsilon(z)\}$.

В сингулярно возмущенной области Q_ε, представляющей собой слой толщины $2l$ с отверстием G_ε, рассмотрим однородную задачу (1.2)–(1.4) с асимптотическим условием на бесконечности (1.6) и изучим асимптотику ее решения при $\varepsilon \longrightarrow 0$ с целью отыскания асимптотики величины $\kappa(\varepsilon)$ из асимптотической формулы (1.6) и приведенной логарифмической емкости (1.9) замкнутой области $\overline{G}_\varepsilon$.

Воспользуемся методом из [16]–[18], [1] и на некотором удалении от поверхности g_ε искомое решение $e(\varepsilon, \mathbf{x})$ представим в виде

$$v(\gamma, \mathbf{x}) = V(\gamma, \mathbf{x}) + A_\varepsilon, \tag{5.1}$$

$$V(\gamma, \mathbf{x}) = \int_{-l}^{l} G(s, \mathbf{x})\gamma(s)ds. \tag{5.2}$$

Здесь $G(s, \mathbf{x})$ – функция Грина для периодической задачи в слое с полюсом в точке $(0, s)$, определяемая формулой

$$G(s, \mathbf{x}) = \Phi^{(0,0)}(\mathbf{y}, z - s) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\Phi^{(0,0)}(\mathbf{y}, z - z - 2jl) - \Phi^{(0,0)}(0, 2jl)]. \tag{5.3}$$

При помощи асимптотической формулы (4.29) для функции (5.2) устанавливаем следующее поведение на бесконечности:

$$V(\gamma, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\langle\gamma\rangle\left(\ln\frac{|\mathbf{y}|}{4l} + C\right) + O(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad |\mathbf{y}| \longrightarrow \infty, \tag{5.4}$$

где

$$\langle\gamma\rangle = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\gamma(s)ds. \tag{5.5}$$

В окрестности поверхности g_ε построим внутреннее асимптотическое представление. Введем растянутые координаты

$$\eta = \varepsilon^{-1}\mathbf{y}. \tag{5.6}$$

Пусть $E(z; \eta) = -\ln|\eta| + \tilde{E}(z; \eta)$ – функция Грина для задачи Дирихле во внешности замкнутой области $\overline{\omega(z)}$ с полюсом на бесконечности. Для регулярной части верна асимптотическая формула (см. [2], [3])

$$\tilde{E}(z; \eta) = \ln\bar{r}(z) + O(|\eta|^{-1}), \quad |\eta| \longrightarrow \infty. \tag{5.7}$$

Здесь $\bar{r}(z)$ – внешний конформный радиус замкнутой области $\overline{\omega(z)}$.

Принимая во внимание формулу

$$\int_{-l}^{l}\frac{ds}{\sqrt{(z-s)^2 + |\mathbf{y}|^2}} = -2\ln|\mathbf{y}| + \ln 4(l^2 - z^2) + O(|\mathbf{y}|^2),$$

внутреннее асимптотическое представление искомого решения $e(\varepsilon; \mathbf{x})$ назначим в форме

$$w(\varepsilon^{-1}\mathbf{y}; z) = (2\pi)^{-1}\gamma(z)E(z; \varepsilon^{-1}\mathbf{y}). \tag{5.8}$$

Следуя [19], "сошьем" асимптотические представления (5.1) и (5.8) в зоне сращивания на расстоянии $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{\varepsilon}\,2l$ от оси цилиндра G_ε. Именно асимптотическое условие сращивания

$$v(\gamma; \mathbf{x}) - w(\varepsilon^{-1}\mathbf{y}; z) = o(1), \quad |\mathbf{y}|/2l \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \longrightarrow 0,$$

будет выполнено, если, используя асимптотику (5.7), левую часть соотношения

$$A_\varepsilon + \int_{-l}^{l}G(s, \mathbf{x})\gamma(s)ds + \frac{\gamma(z)}{2\pi}\ln\frac{|\mathbf{y}|}{\varepsilon\bar{r}(z)} = o(1)$$

приравнять нулю при $|\mathbf{y}| = 2l\sqrt{\varepsilon}$. Таким путем приходим к уравнению

$$\frac{\gamma(z)}{2\pi}\ln\frac{2l}{\sqrt{\varepsilon}\bar{r}(z)} + (J_\varepsilon\gamma)(z) + A_\varepsilon = 0, \tag{5.9}$$

где

$$4\pi(J_\varepsilon\gamma)(z) = \int_{-l}^{l}\frac{\gamma(s)ds}{\sqrt{(z-s)^2 + 4l^2\varepsilon}} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-s-2jl)^2 + 4l^2\varepsilon}} - \frac{1}{2|j|l}\right)\gamma(s)ds. \tag{5.10}$$

Наконец, добиваясь совпадения старших членов в асимптотиках (5.4) и (1.6), накладываем на плотность $\gamma(z)$ условие

$$(2\pi)^{-1}\langle\gamma\rangle = 1, \tag{5.11}$$

где $\langle\gamma\rangle$ – среднее арифметическое функции $\gamma(z)$.

5.2. Асимптотика приведенной логарифмической емкости

Для величины $\kappa(\varepsilon)$ из асимптотической формулы (1.6), согласно разложению (5.4), при учете равенства (5.5) имеем следующее значение:

$$\kappa(\varepsilon) = \ln 4l - \mathrm{C} + A_\varepsilon + o(1), \quad \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{5.12}$$

Соответственно этому получаем

$$c_{\log}(\bar{G}_\varepsilon) = 4l\exp(A_\varepsilon - \mathrm{C})(1 + o(1)), \quad \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{5.13}$$

Методом из [17], [18] устанавливаем, что бесконечно малые (при $\varepsilon \longrightarrow 0$) величины в формулах (5.12) и (5.13) оцениваются величиной $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$.

Найдем собственные значения и собственные функции оператора J_ε. Положим

$$\gamma_k(z) = \exp\left(i\frac{\pi k z}{l}\right), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{5.14}$$

Подставим функцию (5.14) в правую часть равенства (5.10). Производя замену переменной интегрирования, получаем

$$4\pi(J_\varepsilon\gamma_k)(z) = \int\limits_{-l-z}^{l-z}\frac{\gamma_k(z+t)dt}{\sqrt{t^2+4l^2\varepsilon}} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}' \int\limits_{-l-z+2jl}^{l-z+2jl}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+4l^2\varepsilon}} - \frac{1}{2|j|l}\right)\gamma_k(z-2jl+t)dt.$$

Поскольку в случае (5.14) выполняются равенства $\gamma_k(z+t) = \gamma_k(z)\gamma_k(t)$ и $\gamma_k(z-2jl+t) = \gamma_k(z)\gamma_k(t)$, имеем

$$4\pi(J_\varepsilon\gamma_k)(z) = \gamma_k(z)\lim_{N\to\infty}\left\{\int\limits_{-l-z-2Nl}^{l-z+2Nl}\frac{\gamma_k(t)dt}{\sqrt{t^2+4l^2\varepsilon}} - \sum_{j=-N}^{N}\frac{1}{2|j|l}\int\limits_{-l-z+2jl}^{l-z+2jl}\gamma_k(t)dt\right\}. \tag{5.15}$$

Если $k \neq 0$, то последний интеграл в равенстве (5.15) равен нулю при любом j. Тем самым, переходя к пределу при $N \longrightarrow \infty$, получаем

$$4\pi(J_\varepsilon\gamma_k)(z) = 2\gamma_k(z)\int\limits_0^\infty\frac{\cos[(\pi k/l)t]dt}{\sqrt{t^2+4l^2\varepsilon}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.16}$$

или

$$(J_\varepsilon\gamma_k)(z) = \lambda_k\gamma_k(z), \tag{5.17}$$

где, согласно известной формуле (3.754.2) из [20],

$$\lambda_k = (2\pi)^{-1}K_0(2\pi k\sqrt{\varepsilon}), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.18}$$

В случае $k = 0$ и $\gamma_k(z) = 1$ при помощи формулы (4.28) находим

$$\lambda_0 = (2\pi)^{-1}\left(\ln\frac{2}{\sqrt{3}} - \mathrm{C}\right). \tag{5.19}$$

Заметим, что, согласно свойствам модифицированной функции Бесселя (см., например, [7, § 8, гл. 7], собственные значения (5.18) положительны и убывают при $k \longrightarrow \infty$, причем экспоненциально.

Решение уравнения (5.9) представим в форме ряда Фурье:

$$\gamma(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{\pi k z}{l} + b_k\sin\frac{\pi k z}{l}. \tag{5.20}$$

Согласно условию (5.11) имеем $a_0 = 4\pi$.

На основании формул (5.14) и (5.17) получаем

$$(J_\varepsilon\gamma)(z) = 2\pi\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k\cos\frac{\pi kz}{l} + b_k\sin\frac{\pi kz}{l}\right). \tag{5.21}$$

Подставляя теперь выражения (5.20) и (5.21) в уравнение (5.9) и интегрируя его обе части в пределах от $-l$ до l, находим

$$A_\varepsilon = -2\pi\lambda_0 - \ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{\gamma(z)}{2\pi}\ln\frac{2l}{\bar{r}(z)}dz, \tag{5.22}$$

где величина λ_0 определяется формулой (5.19).

Приближенное выражение для функции $\gamma(z)$ может быть получено методом Бубнова–Галеркина.

Итак, асимптотика приведенной логарифмической емкости узкого цилиндра $\overline{G}_\varepsilon$ определяется соотношением (5.13), в котором величина A_ε вычисляется по формуле (5.22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров С.А.* Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением // Тр. Моск. матем. об-ва. М., 1990. Т. 53. С. 98–129.
2. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
4. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
5. *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
6. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Гостехтеориздат, 1953.
7. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
8. *Джавадов М.Г.* Асимптотика решения краевой задачи для эллиптического уравнения в тонких областях // Дифференц. ур-ния. 1968. Т. 4. № 10. С. 1901–1909.
9. *Зино И.Е., Тропп Э.А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
10. *Назаров С.А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
11. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических задач в областях с коническими точками // Math. Nahr. 1977. Bd. 76. № 1. S. 29–60.
12. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
13. *Mazja V.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akad.-Verlag, 1991.
14. *Назаров С.А.* Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых разложений // Тр. СПб. матем. об-ва. СПб., 1996. Т. 5. С. 112–183.
15. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гостехтеориздат, 1953.
16. *Федорюк М.В.* Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурных ф-л и прилож. функц. анализа к задачам матем. физ. Новосибирск, 1980. Т. 1. С. 113–131.
17. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанной тонкой трубкой // Матем. сб. 1981. Т. 116. № 2. С. 187–217.
18. *Назаров С.А., Паукшто М.В.* Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.
19. *Аргатов И.И.* Давление узкого прямоугольного штампа на упругое основание // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2002. № 2. С. 58–67.
20. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.