K. M. D'yakonov, Kernels of Toeplitz operators, smooth functions, and Bernstein type inequalities, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1992, Volume 201, 5–21

К.М.Дьяконов

ЯДРА ОПЕРАТОРОВ ТЁПЛИЦА, ГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ И НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА

Введение

В этой статье изучается связь между гладкостью символа тёплицева оператора и гладкостью элементов его ядра.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. $\mathbb{D} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; $\mathbb{T} \overset{\text{def}}{=} \partial \mathbb{D}$; m - нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$; $L^p \overset{\text{def}}{=} L^p(\mathbb{T}, m), 0<p\leqslant\infty$; H^p - класс Харди [4, 5, 9] голоморфных функций в $\mathbb{D}$, воспринимаемый также как подпространство в L^p; $H^p_0 \overset{\text{def}}{=} \{f \in H^p : f(0) = 0\}$; P_+ (P_-) - ортогональный проектор в L^2 на H^2 $(\overline{H^2_0})$, продолженный естественным образом на L^1.

Пусть $\varphi \in L^\infty$ и T_φ - оператор Тёплица с символом φ: $T_\varphi f \overset{\text{def}}{=} P_+(\varphi f)$, $f \in H^1$. Через $K_p(\varphi)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, обозначим ядро оператора T_φ в пространстве H^p:

$$K_p(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \{f \in H^p : T_\varphi f = 0\}.$$

Предположим теперь, что функция φ унимодулярна ($|\varphi| = 1$ п.в. на $\mathbb{T}$) и обладает некоторой гладкостью (скажем, лежит в классе Соболева W^s_q или Бесова B^s_q при каких-нибудь q, $s > 0$), причем $K_p(\varphi) \neq \{0\}$. Что можно сказать о дифференциальных свойствах функций из $K_p(\varphi)$? В разных ситуациях ниже будет получен ответ (как правило, в каком-то смысле неулучшаемый) на этот вопрос.

Заметим пока, что рассмотрение унимодулярных символов φ фактически не умаляет общности. См., например, работы [17, 18], где показано, что если $\varphi \in L^\infty$ и $K_2(\varphi) \neq \{0\}$, то найдется функция h, $h \in H^2$, для которой $K_2(\varphi) = K_2(\bar{z}\bar{h}/h)$. Отметим ещё, что если θ -внутренняя функция (т.е. унимодулярная функция класса H^∞), то подпространство $K_p(\bar{\theta})$ инвариантно относительно оператора обратного сдвига S^* и совпадает с множеством $K^p_\theta \overset{\text{def}}{=} H^p \cap \theta \overline{H^p_0}$. Если вдобавок $\theta \in W^s_q$ или $\theta \in B^s_q$ при $sq \geqslant 1$, то θ - конечное произведение Бляшке, а функции класса K^p_θ рациональны.

Настоящая статья содержит ряд утверждений следующего типа:

$$|\varphi|=1,\quad \varphi\in X \Rightarrow K_p(\varphi)\subset Y,$$

где X и Y – некоторые пространства гладких функций на окружности $\mathbb{T}$. Полученные результаты можно сформулировать и в виде "неравенств типа Бернштейна"

$$\|f\|_Y \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_X^{\alpha}\,\|f\|_p,\quad f\in K_p(\varphi), \tag{I}$$

где $\alpha>0$, $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ – нормы (квазинормы) пространств X и Y, а $\|\cdot\|_p$ – норма в L^p. Частными случаями доказываемых (и приводимых без доказательства в § 4) неравенств являются – с одной стороны – оценка

$$\|f^{(n)}\|_p \leqslant \mathrm{const}\,\|\theta'\|_\infty^n\,\|f\|_p,\quad f\in K_\theta^p,$$

принадлежащая автору [7, § 4] и обобщающая неравенство С.Н.Бернштейна для полиномов (или целых функций), и – с другой стороны – оценки А.А.Пекарского [II, § 2] для производных рациональных дробей.

Напомним, что классическое неравенство С.Н.Бернштейна

$$\|Q'\|_p \leqslant n\|Q\|_p,$$

(где Q – полином степени $\leqslant n$, т.е. $Q\in K^p_{z^{n+1}}$) возникает при доказательстве обратных теорем полиномиальной аппроксимации [2, I0], а упомянутые выше неравенства А.А.Пекарского служат инструментом для получения аналогичных теорем в теории рациональной аппроксимации [II]. Из неравенств типа (I), доказанных ниже, также можно извлечь различные аппроксимационные теоремы, следствиями которых являются как классические (полиномиальные) обратные теоремы типа Бернштейна, так и обратные теоремы рациональной аппроксимации [II].

Еще одно применение неравенства типа (I) находят при изучении взаимосвязи между граничной гладкостью аргумента $\arg f$ аналитической функции f и её собственной гладкостью (см. § 3 ниже).

В настоящей статье содержатся также результаты эпизодического характера, относящиеся к сходимости ряда Фурье внутренней функции θ (и рядов Фурье функций класса K_θ^p) в фиксированной точке окружности.

§ I. Дифференциальные неравенства и коммутаторы Кальдерона

Пусть $W_r^1 = W_r^1(\mathbb{T})$, $r \geqslant 1$ - пространство Соболева, т.е. множество тех абсолютно непрерывных функций g на окружности $\mathbb{T}$, для которых $g' \in L^r$. (Здесь $g'(\zeta) \overset{def}{=} dg/d\zeta = -ie^{-it}dg/dt, \zeta = e^{it} \in \mathbb{T}$.)

ТЕОРЕМА I. Пусть $1<p$, $q<+\infty$, $1<r\leqslant+\infty$, $q^{-1}=p^{-1}+r^{-1}$. Если $\varphi \in W_r^1$, $|\varphi| \equiv 1$, то $K_p(\varphi) \subset W_q^1$, причем для $f \in K_p(\varphi)$ имеем

$$\|f'\|_q \leqslant c(p,r)\|\varphi'\|_r \|f\|_p,$$

где $c(p,r)$ - положительная постоянная, зависящая только от p и r.

В основе доказательства лежит

ТЕОРЕМА А. (Кальдерон [I4]). Пусть показатели p, q, r - такие же, как в теореме I, и b -абсолютно непрерывная функция на прямой $\mathbb{R}$, для которой $b' \in L^r(\mathbb{R})$. Тогда сингулярный интегральный оператор C_b ("коммутатор Кальдерона"), определённый формулой

$$(C_b g)(x) \overset{def}{=} \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(x)-b(y)}{(x-y)^2}\, g(y)\,dy,$$

ограниченно действует из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^q(\mathbb{R})$. При этом

$$\|C_b\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})} \leqslant c(p,r)\|b'\|_r. \tag{2}$$

Нам понадобится слегка видоизменённый вариант теоремы А. Из доказательства Кальдерона видно, что оценка (2) сохранится, если заменить C_b оператором $C_b^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$, где

$$(C_b^{(\varepsilon)} g)(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(x)-b(y)}{(x-y+i\varepsilon)^2}\, g(y)\,dy.$$

(Константа в правой части (2) не зависит от ε). Аналогичный результат для окружности принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА Б. При прежних ограничениях на p, q, r и при $b \in W_r^1$ оператор $C_{b,\rho}$ $(0<\rho<1)$, определенный равенством

$$\left(C_{b,\rho}g\right)(\xi)\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{\mathbb{T}}\frac{b(\zeta)-b(\xi)}{(\zeta-\rho\xi)^2}\,g(\zeta)\,d\zeta\quad(\xi\in\mathbb{T}),\tag{3}$$

ограниченно действует из $L^p=L^p(\mathbb{T},m)$ в $L^q=L^q(\mathbb{T},m)$, причем

$$\sup_{0<\rho<1}\|C_{b,\rho}\|_{L^p\to L^q}\leqslant c(p,r)\|b'\|_r .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Поскольку $f\in K_p(\varphi)$, то $f\varphi\in\overline{H_0^p}$, так что $\int f(\zeta)\varphi(\zeta)(\zeta-z)^{-1}d\zeta=0$ для любого $z\in\mathbb{D}$. Поэтому при $\rho\in(0,1)$, $\xi\in\mathbb{T}$ имеем:

$$f'(\rho\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\rho\xi)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)\varphi(\zeta)\frac{\overline{\varphi}(\zeta)-\overline{\varphi}(\xi)}{(\zeta-\rho\xi)^2}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(C_{\overline{\varphi},\rho}(f\varphi)\right)(\xi)$$

(по поводу последнего обозначения см. формулу (3)). Применяя теорему Б, получаем

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\int|f'(\rho\xi)|^q dm(\xi)\right)^{1/q}\leqslant c(p,r)\|\varphi'\|_r\|f\varphi\|_p=$$

$$=c(p,r)\|\varphi'\|_r\|f\|_p .$$

Таким образом, $f'\in H^q$, и выполняется нужное неравенство. ●

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $1\leqslant p<+\infty$. Если $\varphi\in Lip\,1\left(\overset{\mathrm{def}}{=}W^1_\infty\right)$ и $|\varphi|\equiv1$, то $K_p(\varphi)\subset W^1_p$, причем для $f\in K_p(\varphi)$ имеет место неравенство

$$\|f'\|_p\leqslant c_p\|\varphi'\|_\infty\|f\|_p .\tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $1<p<+\infty$ достаточно применить теорему I, положив $r=+\infty$. Для $p=1$ неравенство (4) (а значит, и включение $K_1(\varphi)\subset W^1_1$) вытекает из доказательства теоремы I. Действительно, оператор $C_{\overline{\varphi},\rho}$ является оператором Кальдерона–Зигмунда; поэтому ([6], с.272), непрерывно действуя из L^2 в L^2, он также действует из $H^1_{\mathbb{R}}\overset{\mathrm{def}}{=}H^1+\overline{H^1_0}$ в L^1, причем

$$\sup_{0<\rho<1}\|C_{\bar\varphi,\rho}\|_{H^1_{\mathbb{R}}\to L^1}\leqslant \mathrm{const}\cdot\sup_{0<\rho<1}\|C_{\bar\varphi,\rho}\|_{L^2\to L^2}\leqslant \mathrm{const}\|\varphi'\|_\infty .$$

Поскольку $f\in K_1(\varphi)$, то $f\varphi\in \overline{H^1_0}$, и

$$\|f'\|_1=\frac{1}{2\pi}\sup_{0<\rho<1}\|C_{\bar\varphi,\rho}(f\varphi)\|_1\leqslant \mathrm{const}\|\varphi'\|_\infty\|f\|_1 . \quad \bullet$$

Пусть теперь Λ^α, $0<\alpha<+\infty$, обозначает класс Гёльдера (Зигмунда при $\alpha\in\mathbb{N}$) на окружности:

$$\Lambda^\alpha \overset{\mathrm{def}}{=}\left\{g\in C(\mathbb{T}):\ \sup_{h>0} h^{-\alpha}\|\Delta_h^m g\|_\infty<+\infty\right\},$$

где m – произвольное натуральное число, для которого $m>\alpha$, а Δ_h^m – разность порядка m с шагом h. (Напомним, что операторы Δ_h^k определяются по индукции: $(\Delta_h^1 g)(\zeta)=(\Delta_h g)(\zeta)\overset{\mathrm{def}}{=}g(e^{ih}\zeta)-g(\zeta)$, $\Delta_h^k g\overset{\mathrm{def}}{=}\Delta_h\Delta_h^{k-1}g$). Положим ещё $\Lambda^0\overset{\mathrm{def}}{=}L^\infty$.

Известная теорема Дьюрена-Ромберга-Шилдса [16] утверждает, что пространство $\Lambda_A^\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}P_+\Lambda^\alpha$ сопряжено с $H^{1/(1+\alpha)}$ относительно стандартной антилинейной двойственности. Отсюда нетрудно вывести следующее (также известное) утверждение.

ЛЕММА. Пусть $s>0$, $\max(1,s)<p<+\infty$, $\alpha=s^{-1}-p^{-1}$. Если $\psi\in\Lambda^\alpha$, то оператор Ганкеля H_ψ, определенный формулой

$$H_\psi f=P_-(\psi f),\quad f\in H^2,$$

ограниченно действует (может быть продолжен до оператора, ограниченно действующего) из H^s в $\overline{H^p_0}$, причем

$$\|H_\psi\|_{H^s\to\overline{H^p_0}}\leqslant \mathrm{const}\|\psi\|_{\Lambda^\alpha},$$

где $\|\cdot\|_{\Lambda^\alpha}$ – естественная норма в пространстве Λ^α, а const – постоянная, зависящая только от α.

Установим ещё одно следствие теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть φ –абсолютно непрерывная функция на $\mathbb{T}$, $|\varphi|=1$, $f\in K_1(\varphi)$.

а) Если $1<q<r\leqslant+\infty$, $\alpha\geqslant 0$, $s>0$, причем $q^{-1}=s^{-1}+r^{-1}-\alpha$, то

$$\|f'\|_q \leqslant c(s,r,\alpha)\|\varphi'\|_r\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha}\|f\|_s. \tag{5}$$

б) Если $1<q<r\leqslant+\infty$, то

$$\|f'\|_q \leqslant c(q,r)\|\varphi'\|_r\|\varphi\|_{\Lambda^{1/r}}\|f\|_q. \tag{6}$$

в) Если $1<q<2$, то

$$\|f'\|_q \leqslant c_q\|\varphi'\|_2^2\|f\|_q. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Определим показатель p равенством $p^{-1}=q^{-1}-r^{-1}$. Тогда $\alpha=s^{-1}-p^{-1}$, и в силу теоремы I имеем $\|f'\|_q\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi'\|_r\|f\|_p$, а в силу приведенной выше леммы

$$\|f\|_p=\|f\varphi\|_p=\|H_\varphi f\|_p\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha}\|f\|_s.$$

Комбинируя эти неравенства, получаем (5).

б) Полагаем в (5) $\alpha=1/r$, $s=q$.

в) Полагаем в (6) $r=2$ и замечаем, что $W_2^1\subset\Lambda^{1/2}$. ●

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Все доказанные неравенства в определенном смысле точны. Поясним это применительно к наиболее общему неравенству (5). (Теорема I получается из него при $\alpha=0$). Положим $f_a(\zeta)=(1-\bar a\zeta)^{-n}$, $\varphi_a(\zeta)=(\bar\zeta-\bar a)^n(1-a\bar\zeta)^{-n}$, где $a\in\mathbb{D}$, $n\in\mathbb{N}$, $ns>1$. Тогда $f_a\in K_1(\varphi_a)$, и прямое вычисление показывает, что при $|a|\to 1-0$

$$\|f_a'\|_q\asymp\|\varphi_a'\|_r\|\varphi_a\|_{\Lambda^\alpha}\|f_a\|_s\asymp(1-|a|)^{1/q-n-1}.$$

(Знак $\asymp$ означает, что отношение величин, расположенных справа и слева от него, заключено между двумя положительными постоянными, не зависящими от a).

2. Любопытно сравнить неравенства (4) и (7).

3. В [7] автором был доказан аналог неравенства (4) (в том числе и при $p=+\infty$) для случая, когда $\varphi=\bar\theta$, θ – внутренняя функция в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, $f\in K_\theta^p\overset{\mathrm{def}}{=}H^p\cap\theta\overline{H^p}$, $H^p=H^p(\mathbb{C}_+)$. Классическое неравенство Бернштейна для целых функций (правда, с несколько завышенной константой) получается отсюда при $\theta(z)=\exp(i\sigma z)$, $\sigma>0$. Кроме того, в [7] показано, что при условии $\theta'\in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ имеет место оценка для высших производных

$$\|f^{(n)}\|_p\leqslant\mathrm{const}\,\|f\|_p,\quad f\in K_\theta^p \tag{8}$$

(и тогда можно положить $\mathrm{const} = c(n,p)\,\|\theta'\|_\infty^n$), и что справедливо обратное утверждение: неравенство (8) с константой, не зависящей от f, влечет условие $\theta' \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$.

§ 2. Коэффициенты Фурье и наилучшие приближения

Для функции f, $f \in L^1$, положим $\hat{f}(k) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} f \bar{z}^k\, dm \; (k \in \mathbb{Z})$. Через $\mathcal{P}_n$ обозначим множество тригонометрических полиномов степени $\leqslant n$: $\mathcal{P}_n \overset{\mathrm{def}}{=} \{Q \in L^1 : \hat{Q}(k) = 0$ при $|k| > n\}$. Пусть, наконец, $E_p(f,n) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}$ – наилучшее приближение функции f, $f \in L^p$, полиномами степени $\leqslant n$. Следующая, совсем простая, теорема позволяет оценивать коэффициенты Фурье (Тейлора) функции f, $f \in K_p(\varphi)$, через наилучшие приближения $E_{p'}(\varphi, n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть φ –унимодулярная функция на окружности $\mathbb{T}$, $f \in K_p(\varphi)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Тогда

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \|f\|_p\, E_{p'}(\varphi, n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in \mathcal{P}_n$. Поскольку $f\varphi \in \overline{H_0^p}$, $\bar{z}^n \bar{Q} \in \overline{H^\infty}$, то $\int f \varphi \bar{z}^n \bar{Q}\, dm = 0$, и мы имеем:

$$\hat{f}(n) = \int f \bar{z}^n\, dm = \int f \varphi \bar{z}^n (\bar{\varphi} - \bar{Q})\, dm,$$

откуда

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \|f\|_p\, \|\varphi - Q\|_{p'}.$$

Взяв $\inf\mathrm{imum}$ по $Q \in \mathcal{P}_n$, получаем (9). ●

Напомним теперь определение пространств Бесова B^s_{pq} $(1 \leqslant p, q \leqslant +\infty;\ s > 0)$: если $f \in L^p$, то

$$f \in B^s_{pq} \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\|\Delta_t^m f\|_p^q}{|t|^{1+sq}}\, dt < +\infty, & q < +\infty, \\ \|\Delta_t^m f\|_p = O(|t|^s), & q = +\infty, \end{cases}$$

где m –какое-нибудь целое число, такое что $m > s$. Нам понадобится также конструктивная характеристика классов Бесова (см., например, [IO]): если $f \in L^p$, то

$$f \in B^s_{pq} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^{sq-1} E_p(f,n)^q < +\infty, \ q < +\infty, \\ E_p(f,n) = O\left(\frac{1}{n^s}\right), \ q = +\infty . \end{cases}$$

При этом нормы в пространстве B^s_{pq}, отвечающие естественным образом каждой из приведённых характеризаций, эквивалентны.

Как всегда, полагаем $B^s_p \overset{\text{def}}{=} B^s_{pp}$. Отметим, что пространства Λ^α, введенные в предыдущем параграфе, совпадают с B^α_∞.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p$, $q_s \leq +\infty$, $s > 0$, и пусть φ – унимодулярная функция класса B^s_{pq}, $f \in K_{p'}(\varphi)$. Тогда

а) при $q < +\infty$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{sq-1} |\hat{f}(n)|^q \right)^{1/q} \leq \text{const} \, \|\varphi\|_{B^s_{pq}} \|f\|_{p'}, \tag{IO}$$

где const зависит только от p, q, s;

б) при $q = +\infty$: $|\hat{f}(n)| \leq \text{const} \, \|\varphi\|_{B^s_{p\infty}} \|f\|_{p'} n^{-s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) В силу (9)

$$|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{p'} E_p(\varphi, n).$$

Возводя это неравенство в степень q, умножая затем обе его части на n^{sq-1} и суммируя по n, получаем (IO). (При этом используется конструктивное описание класса B^s_{pq}, см. выше).

Доказательство пункта б) аналогично (и ещё проще). ●

СЛЕДСТВИЕ 3. Если φ -унимодулярная функция на $\mathbb{T}$, $f \in K_1(\varphi)$, то при $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq q < +\infty$ имеем

$$\|f\|_{\ell^q_A} \leq \text{const} \, \|\varphi\|_{B^{1/q}_{pq}} \|f\|_{\ell^p_A},$$

где $\|f\|_{\ell^p_A} \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)|^p \right)^{1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (IO) $s = q^{-1}$ и воспользуемся неравенством Хаусдорфа-Юнга $\|f\|_{p'} \leq \|f\|_{\ell^p_A}$. ●

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть φ и f имеют прежний смысл, и пусть $1\leqslant p\leqslant +\infty$, $2\leqslant q\leqslant +\infty$, $\ell>0$. Тогда

$$\|f^{(\ell)}\|_q\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{B^{\ell+1/q'}_{p'q'}}\|f\|_p ,$$

где $f^{(\ell)}$ – дробная производная порядка ℓ : $f^{(\ell)}(z)\stackrel{def}{=}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell}\hat f(n)z^n$, $p'=p/(p-1)$, $q'=q/(q-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем неравенство (I0), заменив в нём p на p', q на q' :

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{sq'-1}|\hat f(n)|^{q'}\Big)^{1/q'}\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{B^{s}_{p'q'}}\|f\|_p .$$

Положим $s=\ell+1/q'$. Левая часть последнего неравенства принимает теперь вид $\|f^{(\ell)}\|_{\ell^{q'}_A}$, и по теореме Хаусдорфа-Юнга она мажорирует величину $\|f^{(\ell)}\|_q$. ●

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Любопытно сравнить следствие 3 (оно содержательно при $1\leqslant q<p\leqslant 2$) с неравенством

$$\|f\|_p\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{\Lambda^{1/q-1/p}}\|f\|_q ,$$

справедливым для $f\in K_1(\varphi)$ при $q>0$, $\max(1,q)<p<+\infty$ (см. доказательство следствия 2 в § I).

2. Следствие 4 при $\ell=1$, $2\leqslant q\leqslant p\leqslant +\infty$, даёт результат, близкий к теореме I (однако, не сводящийся к ней).

Пусть теперь $\varphi=\bar\theta$, где θ – внутренняя функция в $\mathbb{D}$. Напомним обозначение $K^p_\theta\stackrel{def}{=}H^p\cap\theta\overline{H^p_0}$, $1\leqslant p\leqslant +\infty$, и положим $K_{*,\theta}\stackrel{def}{=}K^2_\theta\cap BMOA$. (По поводу пространства ВМОА и его свойств см. [4], глава УI). В пространстве ВМОА будем рассматривать норму $\|\cdot\|_*$,

$$\|f\|_*\stackrel{def}{=}\sup\Big\{\Big|\int f\bar g\,dm\Big| : g\in H^2, \|g\|_1\leqslant 1\Big\} ,$$

эквивалентную стандартной ВМО-норме, определяемой в терминах средних осцилляций.

Следующая теорема представляет собой несколько улучшенный вариант теоремы 2 для случая $\varphi=\bar\theta$, $p=+\infty$.

ТЕОРЕМА 4. Для $f\in K_{*,\theta}$ и для $n\in\mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство

$$|\hat{f}(n)|\leq\|f\|_*\,E_1(\theta,n)\,. \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 2, при любом $Q\in\mathcal{P}_n$ имеем:

$$\hat{f}(n)=\int f\bar{\theta}\,\bar{z}^n(\theta-Q)\,dm\,.$$

Поскольку $\bar{\theta}\bar{z}^n(\theta-Q)\in\overline{H^\infty}$, то $|\hat{f}(n)|\leq\|f\|_*\|\theta-Q\|_1$. Взяв $infimum$ по $Q\in\mathcal{P}_n$, получаем (11). ●

Аналогичное улучшение допускает теорема 3: при $p=1$, $f\in K_{*,\theta}$ неравенство (10) можно заменить следующим

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{sq-1}|\hat{f}(n)|^q\Big)^{1/q}\leq const\,\|\theta\|_{B^s_{1q}}\|f\|_*\,,$$

с очевидной модификацией при $q=+\infty$:

$$|\hat{f}(n)|\leq const\,\|\theta\|_{B^s_{1\infty}}\|f\|_*\,n^{-s}\,. \tag{12}$$

Отметим, что эффективные критерии принадлежности внутренней функции классу B^s_p, $sp<1$, содержатся в [12]; по поводу произведений Бляшке класса $B^s_{p\infty}$ см. также [3].

ТЕОРЕМА 5. Пусть B – произведение Бляшке в $\mathbb{D}$ с нулями $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющими слабому условию Ньюмана

$$\sup_j(1-|a_j|)^{-1}\sum_{k>j}(1-|a_k|)<+\infty\,. \tag{wN}$$

Тогда

а) для любой f, $f\in K_{*,B}$, имеем $\hat{f}(n)=O(1/n)$;

б) если к тому же в некоторой точке ζ, $\zeta\in\mathbb{T}$, выполнено условие Фростмана

$$A(\zeta)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|a_k|}{|\zeta-a_k|}<+\infty\,, \tag{F_ζ}$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\zeta^n$ сходится для любой функции $f\in K_{*,B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3], что при условии (wN) $B\in B^1_{1\infty}$. Полагая в (12) $\theta=B$, $s=1$, приходим к утверждению а).

Чтобы доказать б), воспользуемся результатом работы [I5], согласно которому условие (F_ζ) равносильно существованию радиальных пределов $\lim_{r\to 1-0} f(r\zeta)$ для всех $f\in K_{*,B}$. Сходимость ряда Фурье каждой такой функции f в точке ζ следует из последнего факта, пункта а) и тауберовой теоремы Литтлвуда. ●

ЗАМЕЧАНИЕ I. Аналогичный метод применялся в [I9] для конструкции произведения Бляшке B, такого что $\operatorname{clos} B^{-1}(0)\supset \mathbb{T}$, но ряд Фурье $\sum_{n\ge 0}\hat{B}(n)\zeta^n$ сходится в каждой точке $\zeta\in\mathbb{T}$.

2. Несколько более слабый вариант теоремы 5 доказан в [I]: вместо (WN) там фигурирует сильное условие Ньюмана $\sup_k (1-|a_{k+1}|)/(1-|a_k|)<1$, а вместо пространства $K_{*,B}$ – его подмножество K_B^∞. (Если последовательность $\{a_k\}$ не удовлетворяет равномерному условию Фростмана $\sup\{A(\zeta): \zeta\in\mathbb{T}\}<<+\infty$, то включение $K_B^\infty\subset K_{*,B}$ строгое; см. [I5], где этот факт выводится из результатов статьи [I9]).

Пусть теперь $\theta=BS_\mu$ – каноническая факторизация внутренней функции θ: B – произведение Бляшке с нулями $\{a_k\}$, а S_μ – сингулярная внутренняя функция, порождённая мерой μ.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\zeta\in\mathbb{T}$, $\theta=BS_\mu$ – внутренняя функция. Если

$$\sum_k \frac{1-|a_k|}{|\zeta-a_k|^2}+\int\frac{d\mu(t)}{|t-\zeta|^2}<+\infty, \tag{I3}$$

то ряд $\sum_{n\ge 0}\hat{\theta}(n)\zeta^n$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z – фиксированная точка круга, а $k_z(t)\overset{\mathrm{def}}{=}(1-\overline{\theta(z)}\theta(t))(1-\bar{z}t)^{-1}$ – отвечающее ей воспроизводящее ядро в пространстве K_θ^2. По теореме 2 имеем

$$|\hat{k}_z(n)|\le\|k_z\|_2 E_2(\theta,n)=\|k_z\|_2\Big(\sum_{k=n+1}^\infty|\hat{\theta}(k)|^2\Big)^{1/2}. \tag{I4}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\hat{k}_z(n)=\bar{z}^n\Big(1-\overline{\theta(z)}\sum_{k=0}^{n}\hat{\theta}(k)\bar{z}^{-k}\Big);\quad \|k_z\|_2=\left(\frac{1-|\theta(z)|^2}{1-|z|^2}\right)^{1/2}. \tag{I5}$$

Хорошо известно (см., например, [I3]), что при условии (I3) функция θ обладает угловой производной в точке ζ. Это значит, что существуют пределы $\lim_{r\to 1-0}\theta(r\zeta)\overset{def}{=}\theta(\zeta)$ и $\lim_{r\to 1-0}\theta'(r\zeta)\overset{def}{=}$ $\overset{def}{=}\theta'(\zeta)$, причём $|\theta(\zeta)|=1$. Более того,

$$|\theta'(\zeta)|=\lim_{r\to 1-0}\frac{1-|\theta(r\zeta)|}{1-r}=\lim_{r\to 1-0}\frac{1-|\theta(r\zeta)|^2}{1-r^2}=$$

$$=\sum_k\frac{1-|a_k|^2}{|\zeta-a_k|^2}+2\int\frac{d\mu(t)}{|t-\zeta|^2}$$

Подставляя выражения (I5) в (I4), полагая $z=r\zeta$ и переходя в (I4) к пределу при $r\to 1-0$, получаем:

$$\Big|\theta(\zeta)-\sum_{k=0}^{n}\hat\theta(k)\zeta^k\Big|\le|\theta'(\zeta)|^{1/2}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\hat\theta(k)|^2\Big)^{1/2},$$

откуда следует утверждение теоремы. ●

§ 3. Глакость аналитической функции на границе и гладкость её аргумента

Результаты этого параграфа основаны на следующем элементарном соображении: если $f\in H^1$, то $f\in K_1(\bar z\bar f/f)$. Действительно,

$$T_{\bar z\bar f/f}\,f=P_+(\bar z\bar f)=0.$$

Это наблюдение позволяет извлечь из "неравенства типа Бернштейна"

$$\|f\|_Y\le const\,\|\varphi\|_X^{\alpha}\,\|f\|_p,\qquad f\in K_p(\varphi) \tag{I}$$

(где X и Y – те или иные пространства гладких функций), следствие: если $f\in H^p$ и $\bar f/f\in X$, то $f\in Y$. Для доказательства достаточно положить в (I) $\varphi=\bar z\bar f/f$ (умножение на $\bar z$ не выводит из X).

Таким образом, в ряде случае гладкость функции $\bar f/f$ (или $\arg f$) на окружности влечет гладкость самой функции f, $f\in H^p$. В следующей теореме собрано несколько утверждений такого рода. Все они получаются описанным способом из неравенств типа (I), доказанных в §§ I, 2.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f\in H^p$.

а) Если $1<p<+\infty$, $1<r\leqslant+\infty$, $q^{-1}=p^{-1}+r^{-1}<1$ (при $r=+\infty$ возможны также значения $p=q=1$), то справедлива импликация

$$\bar f/f\in W_r^1 \Longrightarrow f'\in H^q .$$

б) Если $1<p<r$, $r\geqslant 2$, то справедлива импликация

$$\bar f/f\in W_r^1 \Longrightarrow f'\in H^p .$$

в) Если $1\leqslant p<q<+\infty$, $\alpha=p^{-1}-q^{-1}$, то

$$\bar f/f\in \Lambda^\alpha \Longrightarrow f\in H^q .$$

г) Если $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $2\leqslant q\leqslant+\infty$, $\ell>0$, то

$$\bar f/f\in B^{\ell+1/q'}_{p'q'} \Longrightarrow f\in W_q^\ell , \qquad \text{т.е. } f^{(\ell)}\in H^q .$$

(Напомним, что $f^{(\ell)}(z) \overset{def}{=\!=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\ell \hat f(n) z^n$) .

Дополним эту теорему следующим предложением, вытекающим из следствия 3 предыдущего параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $1\leqslant q<p\leqslant 2$ и пусть $f\in\ell_A^p$ (т.е. $f\in H^1$ и $\sum\limits_{n\geqslant 0}|\hat f(n)|^p<+\infty$). Если к тому же $\bar f/f\in B^{1/q}_{pq}$, то $f\in\ell_A^q$.

§ 4. Пространство K_θ^p и рациональная аппроксимация

Здесь будет анонсировано без доказательства еще одно неравенство типа Бернштейна для пространств $K_\theta^p = H^p \cap \theta \overline{H_0^p}$, где θ - внутренняя функция в $\mathbb{D}$. Доказательство (довольно трудоемкое) будет опубликовано в другой работе автора. Отметим только, что оно основано на иных соображениях, нежели доказательства родственных неравенств в §§ I, 2 настоящей статьи.

Напомним предварительно определение пространств Соболева W_p^ℓ $(p\geqslant 1, \ell>0)$: $W_p^\ell \overset{def}{=\!=} \{f\in L^p:\ f^{(\ell)}\in L^p\}$, где $f^{(\ell)}(\zeta) \overset{def}{=\!=} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\ell \hat f(n)\zeta^n$ $(\zeta\in\mathbb{T})$. Как известно, $B_p^\ell \subset W_p^\ell$ при $1\leqslant p\leqslant 2$ и $W_p^\ell\subset B_p^\ell$ при $p\geqslant 2$.

Норму $\|\cdot\|_{W_p^\ell}$ определим равенством $\|f\|_{W_p^\ell} = |\hat f(0)| + \|f^{(\ell)}\|_p$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $1\leq p, r\leq+\infty$, $s>0$, $r'\stackrel{def}{=} r/(r-1)$. Предположим, что $\theta'\in H^{rsp}$. Тогда $K_\theta^{r'p}\subset B_p^s\cap W_p^s$, причём для любой функции f, $f\in K_\theta^{r'p}$, имеет место неравенство

$$\max(\|f\|_{B_p^s}, \|f\|_{W_p^s})\leq c(p,r,s)\|\theta'\|_{rsp}^s\|f\|_{r'p}. \tag{I6}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $rsp\geq 1$ условие $\theta'\in H^{rsp}$ означает, что θ – конечное произведение Бляшке. При этом пространство $K_\theta^{r'p}$ конечномерно и состоит из рациональных функций с теми же полюсами, что и у функции θ. Тем самым вложение $K_\theta^{r'p}\subset B_p^s\cap W_p^s$ тривиально; однако неравенство (I6) содержательно и в этом случае. При $rsp<1$ класс внутренних функций θ, подчиненных условию $\theta'\in H^{rsp}$, существенно шире, см. [I3].

Рассмотрим два частных случая неравенства (I6).

I. Пусть $r=+\infty$. Тогда $r'=1$, и из (I6) следует, что

$$\|f^{(s)}\|_p\leq const\|\theta'\|_\infty^s\|f\|_p, \quad f\in K_\theta^p. \tag{I7}$$

Для $s\in\mathbb{N}$ последнее неравенство было получено автором [7] с использованием кратных коммутаторов Кальдерона.

2. Пусть $sp<1$, $r=(sp)^{-1}$. Тогда $\|\theta'\|_{rsp}=\|\theta'\|_1=n$, где n – число корней (с учетом кратностей) произведения Бляшке θ в круге $\mathbb{D}$, так что (I6) сводится к неравенству

$$\max(\|f\|_{B_p^s}, \|f\|_{W_p^s})\leq c(p,s)\,n^s\|f\|_q, \tag{I8}$$

где $q=p/(1-sp)$, а f – произвольная рациональная функция степени $\leq n$ с полюсами в $\mathbb{C}\setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$. Неравенство (I8), принадлежащее А.А.Пекарскому, применялось им в [II] для описания классов $B_p^s\cap H^p$ и $W_p^s\cap H^p$ в терминах наилучших рациональных L^q-приближений.

Следуя классическому методу, восходящему к С.Н.Бернштейну, из (I6) также можно извлечь ряд аппроксимационных теорем. Приведем одну из них, отвечающую случаю $r=+\infty$.

Положим

$$\mathcal{R}_n\stackrel{def}{=}\bigcup_\theta\{K_\theta^\infty : \|\theta'\|_\infty\leq n\}.$$

(Элементы множества $\mathcal{R}_n$ – это рациональные функции "степени не выше n" с полюсами вне $\operatorname{clos}\mathbb{D}$; при этом "степенью" рациональной дроби R считается величина $\|B_R'\|_\infty$, где B_R – конечное произведение Бляшке, построенное естественным образом по полюсам функции R).

ТЕОРЕМА 9. Пусть $f \in H^p$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, $s > 0$. Следующие утверждения равносильны.

I. $f \in B^s_{pq}$.

2. $\{ 2^{js} \, dist_{L^p}(f, \mathcal{R}_{2^j}) \}_{j=0}^{\infty} \in \ell^q$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Поскольку множество $K^{\infty}_{z^n}$, состоящее из всех аналитических полиномов степени $< n$, содержится в $\mathcal{R}_n$, то импликация I $\Rightarrow$ 2 ("теорема типа Джексона") вытекает из соответствующей части классической теоремы о полиномиальных приближениях [IO, глава 5].

Доказательство обратной импликации 2 $\Rightarrow$ I ("теоремы типа Бернштейна") проходит так же, как в классическом случае, с той единственной разницей, что вместо неравенства Бернштейна для полиномов нужно использовать его обобщение (I7). ●

В заключение отметим, что справедлив "неаналитический" аналог теоремы 9, где *a priori* предполагается только, что $f \in L^p$, а приближающим рациональным функциям разрешается иметь полюсы как в $\mathbb{D}$, так и в $\mathbb{C} \setminus clos\, \mathbb{D}$ (см. [8]).

Литература

I. А й р а п е т я н Г.М. О граничных значениях функций, порожденных неполными системами рациональных дробей с фиксированными полюсами. - Изв. АН Арм.ССР, сер.мат., I988, т.23, № 3, с.297-30I.

2. А х и е з е р Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, I965.

3. В е р б и ц к и й И.Э. О коэффициентах Тейлора и L^p-модулях непрерывности произведений Бляшке. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. Х. Зап.науч.семин. ЛОМИ, I982, т.I07, с.27-35.

4. Г а р н е т т Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, I984.

5. Г о ф м а н К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, I963.

6. Д ы н ь к и н Е.М. Методы теории сингулярных интегралов. (Преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда.) -

Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Совр.пробл.матем., Фунд.напр., 1986, т.15, с.197–292.

7. Д ь я к о н о в К.М. Целые функции экспоненциального типа и модельные подпространства в H^p. – В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. XIX. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1991, т.190, с.81–100.

8. Д ь я к о н о в К.М. Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространствах Харди. Дис.на соискание уч.ст.канд.физ.–мат.наук.Л.: ЛГУ, 1991, 114 с.

9. Н и к о л ь с к и й Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

10. Н и к о л ь с к и й С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

11. П е к а р с к и й А.А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации. – Матем.сб., 1984, т.124 (166), № 4(8), с.571–588.

12. A h e r n P.R. The mean modulus and the derivative of an inner function. – Indiana Univ.Math.J., 1979, v.28, p.311–348.

13. A h e r n P.R., C l a r k D.N. On inner functions with H^p-derivative. – Mich.Math.J., 1974, v.21, N 2, p.115–127.

14. C a l d e r ó n A.P. Commutators of singular integral operators. – Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 1965, v.53, p.1092–1099.

15. C o h n W.S. Radial limits and star invariant subspaces of bounded mean oscillation. – Amer.J.Math., 1986, v.108, N 3, p.719–749.

16. D u r e n P.L., R o m b e r g B.W., S h i e l d s A.L. Linear functionals on H^p spaces with $0<p<1$. – J. Reine Angew.Math., 1969, v.238, p.32–60.

17. H a y a s h i E. The kernel of a Toeplitz operator. – Integral Equations and Operator Theory, 1986, v.9, p.588–591.

18. H a y a s h i E. Classification of nearly invariant subspaces of the backward shift. – Proc.Amer.Math.Soc., 1990, v.110, N 2, p.441–448.

19. H r u š č e v S.V., V i n o g r a d o v S.A. Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals. – Ark. Mat., 1981, v.19, N 1, p.23–42.

K.M.D'yakonov. Kernels of Toeplitz operators, smooth functions, and Bernstein type inequalities.

Summary

Let φ be a unimodular function on the unit circle $\mathbb{T}$ and let $K_p(\varphi)$ denote the kernel of the Toeplitz operator T_φ in the Hardy space H^p, $p \geqslant 1$: $K_p(\varphi) \overset{\text{def}}{=\!=} \{f \in H^p : T_\varphi f = 0\}$. Suppose $K_p(\varphi) \neq \{0\}$. The problem is to find out how the smoothness of the symbol φ influences the boundary smoothness of functions in $K_p(\varphi)$. One of the main results is as follows.

THEOREM 1. Let $1 < p, q < +\infty$, $1 < r \leqslant +\infty$, $q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$. Suppose $|\varphi| \equiv 1$ on $\mathbb{T}$ and $\varphi \in W_r^1$ (i.e. $\varphi' \in L^r(\mathbb{T})$). Then $K_p(\varphi) \subset W_q^1$. Moreover, for any $f \in K_p(\varphi)$ we have $\|f'\|_q \leqslant c(p,r)\|\varphi'\|_r \|f\|_p$.