П. Р. Иванков, Н. М. Иванов, Теоретико-групповой метод понижения размерности в нелинейных задачах оптимального управления, *Автомат. и телемех.*, 1990, выпуск 8, 183–185

Заметки

УДК 517.977.5

П. Р. ИВАНКОВ, Н. М. ИВАНОВ, д-р техн. наук

(ЦНИИМАШ, Москва)

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ МЕТОД ПОНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Приводится методика уменьшения количества независимых параметров в нелинейных задачах оптимального управления. Данная методика может быть использована для определения закона управления динамическими системами, обладающими свойствами симметрии.

1. Постановка задачи

Сложность решения задачи оптимального управления зависит от размерности вектора состояния динамической системы. Увеличение размерности вектора состояния приводит к существенному увеличению вычислений, необходимых для определения закона оптимального управления. Вместе с тем при решении ряда задач оптимального управления имеется возможность сократить размерность вектора состояния. Понижение размерности в задачах оптимального управления может быть осуществлено путем декомпозиции уравнений движения на такие две подсистемы, что вектор состояния первой подсистемы, критерий оптимальности и ограничения на фазовые координаты не зависят от параметров движения второй подсистемы. Одним из возможных методов декомпозиции является теоретико-групповой способ, изложенный, в частности, в [1]. Однако в [1] рассматривается только чистая динамика управляемых систем. Вопросы, связанные с ограничениями на фазовые координаты и поиском оптимальных режимов управления, не затрагиваются. В настоящей работе рассмотрен метод понижения размерности в задачах оптимального управления нелинейных систем, исходя из свойств симметрии уравнений движения (см. [1]), критерия качества и ограничений на вектор состояния.

Для решения поставленной задачи введем следующие обозначения. Уравнения динамической системы представим в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{v}(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)),\tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния в момент времени t, $\mathbf{u}(t)$ — вектор, компонентами которого являются управляющие параметры. Начальный и конечный моменты управления обозначим через t_0 и t_f соответственно. Положим, что необходимо минимизировать терминальную функцию $\Phi_1(t_f)$ при следующих ограничениях на терминальный $\mathbf{x}(t_f)$ и текущий $\mathbf{x}(t)$ векторы состояния:

$$\begin{aligned}&\Phi_i(\mathbf{x}(t_f))=0 \qquad (i=2,\ \ldots,\ k),\\ &\Phi_i(\mathbf{x}(t))\geqslant 0 \qquad (i=k+1,\ \ldots,\ m).\end{aligned}\tag{2}$$

Множество векторов состояния обозначим через X, а размерность X — через n. Очевидно, что если существует совокупность параметров движения $y_1,\ \ldots,\ y_l$, удовлетворяющих условиям:

$$l<n,\tag{3}$$

$$\dot{y}=\mathbf{V}(\mathbf{y},\ \mathbf{u}),\tag{4}$$

$$\Phi_i(\mathbf{x})=\Psi_i(\mathbf{y}) \qquad (i=1,\ \ldots,\ m),\tag{5}$$

то исходная задача оптимального управления сводится к определению закона оптимального управления динамической системы, описываемой уравнениями (4). При этом минимизируемым функционалом является функция Ψ_1, а ограничения на текущий $\mathbf{y}(t)$ и терминальный $\mathbf{y}(t_f)$ векторы состояния определяются следующим образом:

$$
(6)\qquad \begin{aligned} &\Psi_i(\mathbf{y}(t_f))=0 \qquad (i=2,\ldots,k),\\ &\Psi_i(\mathbf{y}(t))\geqslant 0 \qquad (i=k+1,\ldots,m). \end{aligned}
$$

Из (3) следует, что размерность исходной задачи оптимального управления больше размерности вектора состояния динамической системы, описываемой уравнениями (4). Таким образом, понижение размерности задачи оптимального управления сводится к определению параметров движения $y_1, \ldots, y_l$, удовлетворяющих соотношениям (3)–(5).

2. Метод понижения размерности

Рассмотрим теперь метод определения параметров движения $y_1, \ldots, y_l$, удовлетворяющих соотношениям (3)–(5), исходя из свойств симметрии задачи оптимального управления.

Симметрию будем характеризовать такой группой G дифференцируемых преобразований фазового пространства X, что при любых $\mathbf{x}\in X$ и $\mathbf{g}\in G$ выполняются условия:

$$
(7)\qquad (\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}),\mathbf{u}),
$$

$$
(8)\qquad \Phi_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}))=\Phi_i(\mathbf{x}) \qquad (i=1,\ldots,m).
$$

Группу G назовем группой симметрий динамической системы, а функцию h вектора состояния, удовлетворяющую условию

$$
h(\mathbf{g}(\mathbf{x}))=h(\mathbf{x})
$$

для любых $\mathbf{g}\in G$ и $\mathbf{x}\in X$, будем называть инвариантной относительно G. Систему уравнений движения (4) назовем инвариантной относительно G. Совокупность инвариантных относительно G функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ назовем полной, если любая инвариантная относительно G функция h может быть представлена в виде

$$
h(\mathbf{x})=p(\varphi_1(\mathbf{x})),\ldots,\varphi_l(\mathbf{x}).
$$

Используя введенные определения и обозначения, сформулируем следующую лемму, применение которой позволяет понижать размерность вектора состояния в нелинейных задачах оптимального управления.

Лемма. Если существует полная совокупность инвариантных относительно группы симметрий G функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ и $\mathbf{y}=(\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$, то имеют место соотношения (4), (5), причем $\mathbf{V}$ и Ψ_i $(i=1, \ldots, m)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
(9)\qquad \mathbf{V}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}),\mathbf{u})=(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{u}),
$$

$$
(10)\qquad \Psi_i(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))=\Phi_i(\mathbf{x}) \quad (i=1,\ldots,m), \quad \boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_l).
$$

Доказательство приведено в приложении.

Таким образом, если выполняется условие леммы, то исходная задача минимизации $\Phi_1(\mathbf{x}(t_f))$ сводится к задаче оптимального управления динамической системой, описываемой уравнениями движения (4). При этом вектор-функция $\mathbf{V}$, находящаяся в правых частях уравнений (4), терминальный функционал Ψ_1 и функции $\Psi_2, \ldots, \Psi_m$, определяющие ограничения на терминальный и текущий векторы состояния, определяются соотношениями (9), (10).

Следует отметить, что существование функций Ψ_i $(i=1, \ldots, m)$, удовлетворяющих условиям леммы, зависит от особенностей группы симметрий G.

Учитывая отмеченные особенности, проблему понижения размерности задачи оптимального управления можно свести к решению следующих трех подзадач: определение группы симметрий G; определение совокупности функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, удовлетворяющих условиям леммы 1 и соотношению (3); определение правых частей $\mathbf{V}$ уравнений движения (4), критерия оптимальности Ψ_1 и функций, определяющих ограничения на текущий $\mathbf{y}(t)$ и терминальный $\mathbf{y}(t_f)$ векторы.

Решение первых двух может быть осуществлено, исходя из физических особенностей рассматриваемой задачи оценивания, а также с использованием геометрических методов, изложенных, в частности, в [2–4]. Для решения третьей задачи можно воспользоваться уравнениями (9) и (10).

3. Заключение

Приведенные в работе результаты показывают, что если выполняются условия леммы, то, применяя теоретико-групповой метод, можно снизить количество параметров движения в задаче оптимального управления. Это позволяет упростить определение оптимального закона управления. Проверку выполнимости условий леммы можно осуществить, используя геометрические методы, изложенные в [2—4]. Авторы выражают благодарность профессору В. Н. Брандину за полезные замечания, сделанные им при работе над заметкой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы

Из инвариантности $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ следует $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$.

Дифференцируя это соотношение по x, получим

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{x}'}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{x}}, \tag{11}$$

где $\mathbf{x}'=\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Введем обозначение: $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Тогда из (1) и (11) следует

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{u})=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u})=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{x}'}\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Используя (7) и (11), имеем

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{u})=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{x}'}\mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{u})=\mathbf{w}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{u}),$$

т. е. при любом фиксированном значении $\mathbf{u}$ $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ является инвариантной относительно G, и в силу полноты $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ получим:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{u})=\mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \mathbf{u}). \tag{12}$$

Из инвариантности $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ относительно G и полноты $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ следует:

$$\Phi_i(\mathbf{x})=\Psi_i(\mathbf{x}) \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{13}$$

Подставляя в (12) и (13) $\mathbf{y}$ вместо $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, получим (4) и (5).

Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павловский Г. Н., Яковенко Г. Н.* Группы, допускаемые динамическими системами // Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975.
3. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М.: Наука, 1971.
4. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 30.03.89