А. Б. Венков, Построение “Hauptfunktion”, решение уравнений Шварца и фукса для поверхности рода ноль методом спектральной теории автоморфных функций, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1984, том 133, 51–62

А.Б.Венков

ПОСТРОЕНИЕ "HAUPTFUNKTION", РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ШВАРЦА И ФУКСА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ РОДА НОЛЬ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Целью настоящей работы является обобщение основных результатов [I], [2] на произвольную фуксову группу первого рода с некомпактной фундаментальной областью, которая отвечает римановой поверхности рода ноль. На промежуточном этапе исследуется общий ряд Зигеля - Сельберга, в частности, его значение в начальной точке спектра автоморфного лапласиана.

В первой части работы будем предполагать, что Γ - произвольная фуксова группа первого рода с некомпактной фундаментальной областью F.

Пусть H - плоскость Лобачевского, реализованная как верхняя полуплоскость. Для $\alpha = 1,\dots,n$ определим подгруппу $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$, стабилизирующую параболическую вершину F z_α. Будем считать: $\Gamma_n = \Gamma_\infty = \{S^m\}$, $S: z \to z+1$, $z \in H$. Введем набор $g_\alpha \in PSL(2,\mathbb{R})$ $\alpha=1,\dots,n$ таких, что $z_\alpha = g_\alpha \infty$ и $g_\alpha \Gamma_\infty g_\alpha^{-1} = \Gamma_\alpha$. Будем предполагать $g_n = E$ - единица группы. (Это предположение является несущественным и принято лишь для некоторого технического удобства). Введем ряд Зигеля-Сельберга (см. [3], [I])

$$F_\ell(z;s;\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \sqrt{y(\gamma z)}\, I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|\ell| y(\gamma z)) \exp 2\pi i x(\gamma z),$$

где $I_s(y)$ - модифицированная функция Бесселя, $z = x(z) + iy(z) = \mathrm{Re}\, z + i\,\mathrm{Im}\, z$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq 0$.

Ряд $F_\ell(z;s;\Gamma)$ абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\, s > 1$, допускает мероморфное продолжение на все $s \in \mathbb{C}$, является Γ-автоморфным C^∞-решением дифференциального уравнения:

$$-Lu + s(1-s)u = 0,$$

где L-оператор Лапласа-Бельтрами на H. Функция $F_\ell(z;s;\Gamma)$ может быть разложена в специальные ряды Фурье:

ТЕОРЕМА I. Справедливо разложение Фурье:

$$F_\ell(g_\alpha z;s;\Gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x}\, b_k(y;\ell;\alpha;s;\Gamma), \quad z = x+iy$$

при этом для коэффициентов Фурье имеют место формулы:

I) $\kappa=0,\ \ell\neq\kappa\ (\ell,\kappa\in\mathbb{Z}),\ \alpha=1,2,\ldots,n$

$$b_\kappa(y;\ell;\alpha;s;\Gamma)=2\sqrt{y}\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|\kappa|y)\sum_{\substack{c>0\\ \gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_\alpha}} c^{-1}S(-\kappa,-\ell;c)M_{2s-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{-\kappa\ell}}{c}\right) \tag{I}$$

где
$$M_{2s-1}(a\sqrt{-m\ell})=\begin{cases} I_{2s-1}(a\sqrt{|m\ell|}), & m\ell<0\\ J_{2s-1}(a\sqrt{m\ell}), & m\ell>0\end{cases}$$

и I_s, J_s – функции Бесселя,

$$S_\alpha(\kappa,\ell;c)=\sum_{0\leq d<c}\exp\frac{2\pi i}{c}(\kappa a+\ell d) \tag{2}$$

общая сумма Клостермана $\gamma g_\alpha z=(az+b)(cz+d)^{-1}$, γ берется в классе $\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_\alpha$, сумма однозначно определяется матричным элементом $c=c(\gamma g_\alpha)$ и параметрами κ, ℓ.

2) $\kappa=\ell\neq0\ \ (\kappa,\ell\in\mathbb{Z}),\ \alpha=1,\ldots,n$

$b_\kappa(y;\kappa;\alpha;s;\Gamma)$ равно правой части равенства (I) для $\kappa=\ell$ плюс $\delta_{\alpha n}\sqrt{y}\,I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|\ell|y)$, где $\delta_{\alpha n}$ – символ Кронекера (напомним, n-я вершина F лежит в ∞).

3) $\kappa=0,\ \ell\in\mathbb{Z},\ \ell\neq0,\ \alpha=1,2,\ldots,n$

$$b_0(y;\ell;\alpha;s;\Gamma)=\varphi(-\ell;\alpha;s;\Gamma)\frac{y^{1-s}}{2s-1},$$

где $\varphi(\ell;\alpha;s;\Gamma)$ тесно связана с ℓ-м коэффициентом Фурье ряда Эйзенштейна-Мааса. Точнее говоря,

$$E_\beta(g_\alpha z;s;\Gamma)=\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i x\kappa}\,a_\kappa(y;\beta;\alpha;s;\Gamma),\quad z=x+iy$$

Для $\operatorname{Re}s>1$ $\displaystyle E_\beta(z;s;\Gamma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\beta\backslash\Gamma} y^s(g_\beta^{-1}\gamma z)$.

Для $\kappa \neq 0$ $a_\kappa(y;\beta;\alpha;s;\Gamma)=\sqrt{y}\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|\kappa|y)\,\tilde{\varphi}(\kappa;\beta;\alpha;s;\Gamma)$

$$\tilde{\varphi}(\kappa;\beta;\alpha;s;\Gamma)=2\pi^{s}|\kappa|^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)^{-1}\eta(\kappa;\beta;\alpha;s;\Gamma)$$

$$\eta(\kappa;\beta;\alpha;s;\Gamma)=\sum_{\substack{c>0\\ \gamma\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma/\Gamma_\alpha}}\frac{1}{|c|^{2s}}\,S_{\beta\alpha}(0;\kappa;c)\quad .$$

В этих формулах $\Gamma(s)$ -функция Эйлера, $S_{\beta\alpha}(\kappa;\ell;c)$ еще более общая сумма Клостермана, которая формально определяется правой частью (2), но с $g_\beta^{-1}\gamma g_\alpha z=(az+b)(cz+d)^{-1}$. Наконец, верно равенство

$$\varphi(\ell;\alpha;s;\Gamma)=\tilde{\varphi}(\ell;n;\alpha;s;\Gamma)\ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства теоремы лежит общий классический метод построения разложений Фурье относительно параболических подгрупп Γ_α для рядов вида

$$\Phi(z;\beta;\Gamma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma} f(y(g_\beta^{-1}\gamma z))\,e^{2\pi i\ell x(g_\beta^{-1}\gamma z)},\quad \ell\in\mathbb{Z}\ ,$$

применяемый ранее в специальных ситуациях Г.Петерсоном, А.Сельбергом, Д.Нибуром и пр. (см., например, [3]). Справедливы преобразования

$$\int_0^1 dx\Big\{\sum_{\Gamma_\beta\setminus\Gamma} f(y(g_\beta^{-1}\gamma g_\alpha z))\,e^{2\pi i\ell x(g_\beta^{-1}\gamma g_\alpha z)}\Big\}\,e^{-2\pi i\kappa x}=$$

$$=\int_0^1 dx\Big\{\sum_{\gamma\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma/\Gamma_\alpha}\ \sum_{\gamma_2\in\Gamma_\alpha} f(y(g_\beta^{-1}\gamma_1\gamma_2 g_\alpha z))\,e^{2\pi i\ell x(g_\beta^{-1}\gamma_1\gamma_2 g_\alpha z)}\Big\}\,e^{-2\pi i\kappa x}=$$

$$=\sum_{\gamma_1\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma/\Gamma_\alpha} e^{2\pi i(\ell\frac{a}{c}+\kappa\frac{d}{c})}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{y}{c^2(x^2+y^2)}\Big)\,e^{-2\pi i\kappa x-\frac{2\pi i\ell}{(x^2+y^2)c^2}}\,dx=$$

(3)

$$= \sum_{c>0} S_{\beta\alpha}(\ell;k;c)\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{c^2(x^2+y^2)}\right) e^{-2\pi i k x - \frac{2\pi i \ell}{(x^2+y^2)c^2}}\, dx .$$

Мы рассмотрели случай $\beta \neq \alpha$ и воспользовались обозначениями $\gamma_1 \in \Gamma_\beta \backslash \Gamma / \Gamma_\alpha$, $g_\beta^{-1} \gamma g_\alpha z = (az+b)(cz+d)^{-1}$. Пользуясь спецификой функции $f(y)$, из формулы (3) уже нетрудно получить все известные формулы для разложений Фурье рядов Пуанкаре, Эйзенштейна, Зигеля–Сельберга и, в частности, утверждение теоремы. Доказательство закончено.

Докажем теперь существование предела:

$$\lim_{s \to 1} F_\ell(z;s;\Gamma), \quad \ell \neq 0 ; \tag{4}$$

и в некотором смысле вычислим его.

ЛЕММА I. Существует конечный предел (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r(z,z';s;\Gamma)$ ядро резольвенты Γ–автоморфного лапласиана $A(\Gamma)$ (см. [4], [5]). Из разложения Фурье для $r(z,z';s;\Gamma)$ (см. [4], [5], [6]) нетрудно получить следующую формулу (см. [7]):

$$\int_0^1 r(x+iy,z';s;\Gamma)\, e^{2\pi i \ell x} dx = F_\ell(z';s;\Gamma)\sqrt{y}\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|\ell| y) . \tag{5}$$

С другой стороны, в окрестности собственного значения дискретного спектра λ_j оператора $A(\Gamma)$ ядро резольвенты допускает разложение (см. [4], [5])

$$r(z,z';s) = \frac{1}{\lambda_j - s(1-s)} \sum_{k=1}^{n_j} v_{k_j}(z)\, v_{k_j}(z') + \tilde{r}(z,z';s) , \tag{6}$$

где $\tilde{r}(z,z';s)$ аналитична в окрестности s_j, $\lambda_j = s_j(1-s_j)$, $\{v_{k_j}(z)\}$ – вещественный базис в собственном подпространстве оператора $A(\Gamma)$ для n_j-кратного собственного значения λ_j. Для $\lambda_j = 0$ формула (6) принимает вид

$$r(z,z';s) = \frac{c_1}{s(s-1)} + r(z,z';s) , \tag{7}$$

где c_1 зависит только от Γ. Из формул (5), (7) следует

$$\lim_{s\to 1} F_\ell(z';s) = \left(\sqrt{y}\, K_{\frac12}(2\pi|\ell|y)\right)^{-1} \int_0^1 \tilde{\tau}(x+iy; z'; 1)\, e^{2\pi i \ell x}\, dx,$$

что и доказывает утверждение леммы.

Функция $F_\ell(z;1;\Gamma) = F_\ell(z)$ является гармонической и автоморфной. Кроме этого, из теоремы I видно, что на фундаментальной области F функция $F_\ell(z)$ ограничена в каждой параболической вершине z_α, $\alpha = 1, 2, \dots n-1$.

Проведем теперь более детальное изучение функции $F_\ell(z)$. Достаточно рассмотреть ситуацию $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell < 0$, так как выполняется равенство

$$F_\ell(z) = \overline{F_{-\ell}(z)},$$

где черта означает, как обычно, комплексное сопряжение.

Построим теперь разложение Фурье для $F_{-\ell}(z)$ относительно подгруппы Γ_∞ $(\ell > 0)$. Из теоремы I получаем:

$$F_{-\ell}(z) = \sqrt{y}\, I_{\frac12}(2\pi \ell y)\, e^{-2\pi i \ell x} + a_{-\ell} +$$

$$+ \sum_{m>0} e^{2\pi i m x}\, 2\sqrt{y}\, K_{\frac12}(2\pi m y) \sum_{c>0} c^{-1} S_n(-m,\ell;c)\, I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{m\ell}}{c}\right) +$$

$$+ \sum_{k>0} e^{-2\pi i k x}\, 2\sqrt{y}\, K_{\frac12}(2\pi k y) \sum_{c>0} c^{-1} S_n(k,\ell;c)\, J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{m\ell}}{c}\right), \tag{8}$$

где $a_{-1} = \varphi(\ell; n; 1; \Gamma)$.

Примем обозначения:

$$\sum_{c>0} c^{-1} S_n(-m;\ell;c)\, I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{m\ell}}{c}\right) = A_m(\ell)$$

$$\sum_{c>0} c^{-1} S_n(k,\ell;c)\, J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k\ell}}{c}\right) = B_k(\ell).$$

Кроме этого, примем во внимание следующие хорошо известные формулы:

$$\sqrt{y}\, I_{\frac{1}{2}}(2\pi \ell y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\ell}}\,(e^{2\pi\ell y} - e^{-2\pi\ell y})$$

$$\sqrt{y}\, K_{\frac{1}{2}}(2\pi m y) = \frac{1}{2\sqrt{m}}\, e^{-2\pi m y} \quad .$$

В результате из (8) получим равенство

$$F_\ell(z) = \mathcal{J}(z;\ell) + G(z;\ell) \ , \qquad (9)$$

где

$$\mathcal{J}(z;\ell) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\ell}}\, e^{-2\pi i \ell z} + a_{-\ell} + \sum_{m>0} e^{2\pi i m z} \frac{1}{\sqrt{m}}\, A_m(\ell) \qquad (10)$$

$$G(z;\ell) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k>0} \frac{1}{\sqrt{k}}\, e^{-2\pi i k \bar{z}}\, (2\pi B_k(\ell) - \delta_{k\ell}) \ , \qquad (11)$$

$\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера.

Введем теперь классический нормированный ряд Пуанкаре веса два (см. [8], [9])

$$P_m(z) = -m \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma} \frac{e^{2\pi i m \gamma z}}{(cz+d)^2} \ , \qquad (12)$$

где, как обычно, ряд понимается, как предельное значение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -m \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma} \frac{e^{2\pi i m \gamma z}}{(cz+d)^2\,|cz+d|^{\varepsilon}} \ , \qquad \gamma z = (az+b)(cz+d)^{-1} \ .$$

Хорошо известно разложение Фурье ряда (12) относительно подгруппы Γ_∞

$$P_m(t) = \sum_{n>0} C_{nm}\, e^{2\pi i n t} \qquad (13)$$

$$C_{nm}=\sqrt{mn}\left\{2\pi\sum_{c>0}c^{-1}S_\infty(m,n;c)J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)-\delta_{mn}\right\}. \quad (14)$$

Возьмем внутри фундаментальной области две точки t и t_0 и проинтегрируем разложение Фурье (13) от t_0 до t почленно. Заметим, что почленное интегрирование (13) возможно, потому что оно лишь улучшает сходимость ряда. Получим:

$$\int_{t_0}^{t}P_m(\tau)\,d\tau=\sum_{n>0}C_{nm}\frac{1}{2\pi i n}e^{2\pi i n t}-\sum_{n>0}C_{nm}\frac{1}{2\pi i n}e^{2\pi i n t_0}. \quad (15)$$

Интегрирование в (15) не зависит локально от выбора пути, так как подынтегральное выражение аналитично. Однако интеграл, вообще говоря, не является инвариантно определенным с точки зрения действия дискретной группы Γ.

Вернемся теперь к равенству (11) для $G(z;\ell)$. Оказывается, эту функцию можно выразить в терминах соответствующего ряда Пуанкаре. Следующие равенства очевидны:

$$\overline{G(z;\ell)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k>0}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{2\pi i k z}\left(2\pi\overline{B_k(\ell)}-\delta_{k\ell}\right)$$

$$\overline{B_k(\ell)}=\sum_{c>0}c^{-1}\overline{S_\infty(k,\ell;c)}\,J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k\ell}}{c}\right),$$

где черта означает комплексное сопряжение. Кроме этого, для суммы Клостермана $S_\infty(k,\ell;c)$ верно соотношение: (см.[6])

$$\overline{S_\infty(k,\ell;c)}=S'_\infty(\ell,k;c).$$

Отсюда получаем искомое равенство:

$$\overline{G(z;\ell)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k>0}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{2\pi i k z}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}C_{k\ell}=$$

$$=\frac{i}{\sqrt{\ell}}\left\{\int_{t_0}^{z}P_\ell(\tau)\,d\tau+\sum_{n>0}C_{n\ell}\frac{1}{2\pi i n}e^{2\pi i n t_0}\right\},$$

т.к. $2\pi\overline{B_k(\ell)}-\delta_{k\ell}=\frac{1}{\sqrt{k\ell}}\,C_{k\ell}$, что приводит окончательно к выражению

$$G(z;\ell)=-\frac{i}{\sqrt{\ell}}\left\{\overline{\int_{t_0}^{z}P_\ell(\tau)d\tau+\sum_{n>0}\overline{C_{n\ell}}\frac{i}{2\pi n}e^{-2\pi i n t_0}}\right\}=$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{\ell}}\int_{\bar t_0}^{\bar z}\overline{P_\ell(\tau)d\tau}+\psi(\ell;t_0), \tag{16}$$

где $\psi(\ell;t_0)$ не зависит от z .

Мы доказали теорему:

ТЕОРЕМА 2. Для функции $F_{-\ell}(z)$ верно равенство

$$F_{-\ell}(z)=\mathcal{J}(z;\ell)+G(z;\ell), \tag{17}$$

где для $\mathcal{J}(z;\ell)$, $G(z;\ell)$ в свою очередь, верны формулы (10), (16).

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 верна для любой фуксовой группы первого рода Γ с некомпактной фундаментальной областью F и в некоторых ситуациях она может служить инструментом для доказательства тождественной необратимости в ноль рядов Пуанкаре (12). Поясним это утверждение на простом примере, который при желании может быть и усложнен. Пусть риманова поверхность, отвечающая F и Γ , имеет нетривиальный топологический род g , т.е. $g>0$. Выберем в теореме 2 $\ell=1$. Предположим теперь, что первый ряд Пуанкаре (12) для данной Γ равен тождественно нулю. Из теоремы 2 следует, что в этом случае выполняется равенство $F_{-1}(z)=$ $=\mathcal{J}(z;1)$, где $\mathcal{J}(z;1)$, является автоморфной аналитической функцией, имеющей в вершине ∞ единственный простой полюс (относительно параметра $t=e^{2\pi i z}$). Другими словами, $\mathcal{J}(z;1)$ является Hauptfunktion (инвариантом Клейна), а такой функции для поверхности рода $g>0$ существовать не может (см. [10]). Мы пришли к противоречию, что доказывает утверждение о том, что $P_1(z)$ не является тождественным нулем для данной Γ .

Теперь и до конца этой работы мы будем рассматривать исключительно ситуацию группы топологического рода ноль с целью приложения развитой теории для решения уравнений Шварца и Фукса.

Группа Γ рода ноль, в классическом обозначении имеющая сигнатуру $\Gamma(0;k;\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_k)$, задается следующими соотношениями на образующие:

$$\begin{cases} V_1 V_2 \dots V_k = E \\ V_1^{\ell_1} = E,\ V_2^{\ell_2} = E, \dots, V_k^{\ell_k} = E, \end{cases}$$

где $\ell_j \geqslant 2$, $\ell_j \in \mathbb{Z}$. При этом будем считать, что $\ell_k = \ell_{k-1} = \dots$ $\dots = \ell_{k-n+1} = \infty$ и соответствующие $V_k, V_{k-1}, \dots, V_{k-n+1}$ являются параболическими: $V_{k-n+1} = S_1, V_{k-n+2} = S_2', \dots, V_k = S_n' = S'$.

ТЕОРЕМА 3. Если группа Γ имеет род ноль, то в обозначениях теоремы 2 выполняется равенство:

$$F_{-1}(z) = \mathcal{J}(z;1) \tag{18}$$

и $F_{-1}(z)$ является "Hauptfunktion" (инвариантном Клейна).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана-Роха любая параболическая форма веса два, отвечающая группе Γ, тождественно равна нулю. Следовательно, тождественно равны нулю все ряды Пуанкаре (12) и их коэффициенты Фурье (14). Поэтому из формулы (16) следует, что $G(z;1)=0$ тождественно. По теореме 2 выполняется искомое равенство. Таким образом, $F_{-1}(z)$ является автоморфной и аналитической функцией. Далее, как было показано ранее (см. теорему 1) она ограничена в каждой параболической вершине фундаментальной области F, за исключением $z_n = \infty$, где $F_{-1}(z)$ имеет простой полюс (относительно локального параметра $t = e^{2\pi i z}$), что и доказывает теорему.

Используя теоремы 1-3 мы теперь можем легко обобщить результаты работ [1], [2] на случай произвольной группы Γ (не обязательно симметричной) рода ноль.

"Hauptfunktion" $\mathcal{J}(z) = \mathcal{J}(z;1)$ и обратная к ней $z(\mathcal{J})$ удовлетворяют следующим уравнениям Шварца (см. [10], [11]):

$$-\{\mathcal{J}, z\} = \mathcal{J}'^2(z)\, Q(\mathcal{J}(z))$$

$$\{z, \mathcal{J}\} = Q(\mathcal{J}),$$

где $\{z,\mathcal{J}\}$ – производная Шварца, $\{z,\mathcal{J}\} = z'^{-1} z''' - \frac{3}{2} z''^2 z'^{-2}$, $z = z(\mathcal{J})$, $Q(\mathcal{J})$ – рациональная функция:

$$Q(\mathcal{J}) = \prod_{m=1}^{k-1} (\mathcal{J} - a_m)^{-1} \left[E_{k-3}(\mathcal{J}) + \sum_{m=1}^{k-1} N_m (\mathcal{J} - a_m)^{-1} \right] \tag{19}$$

$$N_m = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell_m^2}\right)\prod_{b=1}^{k-1}{}'(a_m - a_b) .$$

В этих формулах: a_m является образом соответствующей вершины канонической фундаментальной области F при отображении $J(z)$ (в формуле (I9) мы учли, что образ вершины, отвечающей образующей $V_k = S_n = S'$ группы Γ, есть точка бесконечность); штрих в произведении N_m означает, что произведение берется по всем указанным b, кроме $b = m$; далее

$$E_{k-3}(J) = \sum_{m=0}^{k-3} X_m J^m, \quad X_{k-3} = \frac{1}{2} .$$

Проблема состоит в том, чтобы выразить оставшиеся $k-3$ "акцессорные" коэффициенты X_m в терминах группы Γ. Дословно также как и в [I] мы можем выразить X_m в терминах коэффициентов Фурье инварианта J и в терминах чисел a_ℓ. Указанные коэффициенты Фурье уже выражены нами в терминах Γ в теоремах I–3, а числа a_ℓ, по крайней мере те, которые отвечают параболическим вершинам фундаментальной области F, могут быть на основании тех же теорем I–3 относительно просто (аналогично [2]) выражены в терминах группы Γ.

Мы ограничимся здесь формулировкой окончательных результатов, так как доказательство их, как мы уже отмечали, вполне аналогично соответствующим теоремам работ [I], [2]. Введем обозначения:

$$\prod_{m=1}^{k-1}(J - a_k) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{D}_m J^m, \quad \mathcal{D}_{k-1} = 1$$

$$J(z) = \sum_{m \geq -1} A_m e^{2\pi i m z}$$

$$\Phi_p(\tau) = \sum_{\substack{t_1+t_2+\dots+t_p+s_1+s_2+s_3+s_4=\tau \\ -1 \leq t_1,\dots,t_p,s_1,\dots,s_4 < \infty}} A_{t_1}A_{t_2}\dots A_{t_p}A_{s_1}A_{s_2}A_{s_3}A_{s_4}s_1 s_2 s_3 s_4 \tag{20}$$

$$\Psi(\tau)=\sum_{m=0}^{k-1}\mathcal{D}_m \sum_{\substack{\ell_1+\ldots+\ell_m+n_1+n_2=\tau \\ -1\leq \ell_1,\ldots,\ell_m,n_1,n_2<\infty}} A_{\ell_1}A_{\ell_2}\ldots A_{\ell_m}A_{n_1}A_{n_2}n_1^2 n_2\left(\tfrac{3}{2}n_2-n_1\right),$$

где все индексы целые числа. В формуле (20) будем считать, что индексы τ, p пробегают значения $4\leq -\tau\leq k+1$, $0\leq p\leq k-3$

ТЕОРЕМА 4. Матрица $\{\Phi_p(\tau)\}$ обратима и треугольна, $\{\Phi_p(\tau)\}^{-1}=\{\eta_p(\tau)\}$. Для акцессорных коэффициентов X_p, $0\leq p\leq k-4$ справедлива формула:

$$X_p=\sum_{\tau=-4}^{-k-1}\eta_p(\tau)\Psi(\tau).$$

ТЕОРЕМА 5. Для точек a_ℓ из (19), соответствующих параболическим вершинам области F, верна формула

$$a_\ell = const\cdot \sum_{\substack{c>0 \\ \gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma/\Gamma_\ell}} \frac{1}{c^2} S_{n\ell}(0;-1;c),$$

где как и ранее $\gamma g_\ell z=(az+b)(cz+d)^{-1}$, сумма $S_{n\ell}$ определена в теореме I, $const$ –абсолютная константа.

Литература

1. В е н к о в А.Б. О точных формулах для акцессорных коэффициентов в уравнении Шварца. – Функц.анализ и его прилож., 1983, т.17, № 3, с.1–8.
2. В е н к о в А.Б. Об акцессорных коэффициентах уравнения Фукса второго порядка с вещественными особыми точками. В кн.: Автоморфные функции и теория чисел.I. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1983, т.129, с.17–29.
3. N i e b u r D. A class of nonanalytic automorphic functions. – Nagoya Math.J., 1973, v.52, p.133–145.
4. Ф а д д е е в Л.Д. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского. – Труды ММО, 1967, т.17, с.323–349.
5. В е н к о в А.Б. Спектральная теория автоморфных функций.– Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1981, т.153.

6. F a y J.D. Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group. - J.Reine Angew.Math., 1977, v.293/294, p.143-203.
7. H e j h a l D.A. Some Dirichlet series whose poles are related to cusp forms. - Preprint University of Göteborg, 1981, N 14, Sweden.
8. P e t e r s s o n H. Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen. - Acta Math., 1932, Bd.58, p.169-215.
9. S e l b e r g A. On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. - Proc.Symp.Pure Math. AMS, 1965, v.8,p.1-15.
10. K l e i n F., F r i c k e R. Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunktionen /Automorphenfunktionen/,G. Teubner, Leipzig, 1896.
11. F o r d L.R. Automorphic functions. McGraw-Hill, New-York, 1929.