Д. В. Грибанов, Д. С. Малышев, Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений,
Журнал СВМО, 2016, том 18, номер 3, 19–31

https://www.mathnet.ru/svmo603

УДК 519.17

Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений

© **Д. В. Грибанов[1], Д. С. Малышев[2]**

Аннотация. В статье рассматриваются естественные постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующем множестве как задач целочисленного линейного программирования. Для любого фиксированного C в статье доказывается полиномиальная разрешимость обеих задач о доминирующем множестве в классе графов, у которых все миноры матриц смежности вершин или ребер не превосходят C по абсолютному значению. В статье также доказывается подобный результат для задачи о независимом множестве и класса графов, который задается ограничением абсолютных значений всех миноров матриц, полученных пополнением транспонированных матриц инцидентности векторами из одних единиц.

Ключевые слова: булево линейное программирование, задача о независимом множестве, задача о доминирующем множестве, матричный минор, полиномиальный алгоритм

1. Введение

Прямая задача линейного программирования (ПЗЛП для краткости) — задача поиска решения, максимизирующего заданную линейную функцию с целыми коэффициентами на заданном полиэдре с целочисленной матрицей ограничений и целочисленным вектором правой части. Иными словами, для заданных $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$, ПЗЛП состоит в том, чтобы решить следующую *прямую линейную программу* (кратко, п.л.п.):

$$\begin{gathered} \max\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}_n, \end{gathered}$$

где $\mathbf{0}_n$ — вектор с n компонентами, каждая из которых является нулем, $\mathbf{x}$ — вектор из n переменных, значения которых нужно определить. *Прямая целочисленная линейная программа* (п.ц.л.п.) — п.л.п., в которой наложено требование целочисленности на значения всех переменных. В *прямой булевой линейной программе* (п.б.л.п.) каждый элемент входных данных $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ принадлежит множеству $\{0, 1\}$ и для каждой переменной наложено требование принадлежности этому множеству. Заданная п.ц.л.п. (п.б.л.п.) является экземпляром массовой *прямой задачи целочисленного* (*булева*) *линейного программирования* (кратко, ПЗЦЛП и ПЗБЛП).

Двойственная линейная программа (кратко, д.л.п.) для п.л.п., записанной выше, это программа:

$$\begin{gathered} \min\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}, \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}_m. \end{gathered}$$

[1] Ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, dimitry.gribanov@gmail.com

[2] Профессор кафедры прикладной математики и информатики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Н. Новгород; dsmalyshev@rambler.ru

Различие между *двойственными целочисленными* (*булевыми*) *линейными программами* (кратко, д.ц.л.п. и д.б.л.п.) и д.л.п. такое же, как и в случае прямых программ, т.е. накладывается ограничение целочисленности (булевости) на все входные данные и переменные. Массовая *двойственная задача целочисленного* (*булева*) *линейного программирования* (кратко, ДЗЦЛП и ДЗБЛП) состоит в том, чтобы решить заданную д.ц.л.п. (д.б.л.п.).

Существует несколько полиномиальных алгоритмов для решения ПЗЛП и ДЗЛП — алгоритмы Л. Хачияна [9], Н. Кармаркара [8], Ю. Нестерова (см. [11] и [12]). К сожалению, ПЗБЛП и ДЗБЛП являются NP-трудными, т.к. некоторые NP-трудные задачи могут быть сформулированы через п.б.л.п. и д.б.л.п. Тем самым, существование полиномиальных алгоритмов для решения ПЗБЛП и ДЗБЛП маловероятно. Поэтому вызывает интерес поиск случаев полиномиальной разрешимости ПЗБЛП и ДЗБЛП.

Напомним, что целочисленная матрица называется *вполне унимодулярной*, если каждый ее минор равен либо $+1$, либо -1, либо 0. Хорошо известно, что все оптимальные решения любой п.л.п. или д.л.п. с вполне унимодулярной матрицей ограничений являются целочисленными. Следовательно, для любой п.л.п. и соответствующей ей п.ц.л.п. с вполне унимодулярной матрицей ограничений множества оптимальных решений совпадают. Поэтому любой полиномиальный алгоритм для решения ПЗЛП и ДЗЛП (например, алгоритмы из [8],[9],[11],[12]) также решает ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с вполне унимодулярными матрицами ограничений. Следующим естественным шагом является рассмотрение *бимодулярного случая*, т.е. матриц ограничений, модуль каждого минора которых принадлежит множеству $\{0, 1, 2\}$. Также было бы интересным исследовать сложность ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с матрицами ограничений, имеющими ограниченные по абсолютному значению миноры. Имеется предположение (до сих пор не доказанное), что для любого фиксированного c ПЗЦЛП и ДЗЦЛП решаются за полиномиальное время в классе линейных программ, любой минор матриц ограничений которых не превосходит c по абсолютному значению [14]. Существуют (см. [14]) варианты этой гипотезы, в которых рассматриваются расширенные матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{pmatrix}$.

К сожалению, в настоящее время накоплено совсем немного результатов о сложности ПЗЦЛП и ДЗЦЛП для классов линейных программ с ограниченными минорами. Так, сложностные статусы ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с бимодулярными матрицами ограничений до сих пор не известны. Шаг навстречу выяснению сложности в бимодулярном случае был сделан в работе [15]. Именно, было доказано, что если ранг бимодулярной $m \times n$ матрицы $\mathbf{A}$ равен n и каждая $n \times n$ подматрица $\mathbf{A}$ невырождена, то соответствующая п.ц.л.п. может быть решена за полиномиальное время. В работе [3] было доказано, что ПЗЦЛП решается за полиномиальное время для матриц ограничений, в которых все детерминанты квадратных подматриц максимального размера лежат между 1 и любой наперед заданной константой. В [1] было доказано, что если $\mathbf{A}$ — булева матрица, имеющая не более чем 2 единицы в каждой строке, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — булевы вектора, и абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ не превосходят C', то соответствующая п.б.л.п. может быть решена за полиномиальное время для любого фиксированного C'. Этот результат имеет графовую природу, т.к. линейная программа для задачи о независимом множестве (задачи поиска в графе множества попарно несмежных вершин наибольшей мощности) для заданного графа G имеет транспонированную матрицу инцидентности $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}(G)$ графа G в качестве матрицы ограничений.

Мы рассматриваем естественные постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующем множестве как задач целочисленного линейного программирования и доказываем полиномиальную разрешимость этих задач для классов графов, имеющих ограниченные по абсолютному значению миноры (расширенных) матриц ограничений.

2. Некоторые классические задачи на графах и их БЛП-постановки

Независимое множество в графе — любое подмножество его попарно несмежных вершин. Размер независимого множества с наибольшим количеством вершин графа G называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (кратко, ЗНМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geq k$ или нет. Это классическая NP-полная задача на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами, ЗНМ может быть сформулирована в виде следующей п.б.л.п.:

$$\begin{gathered} \max\ \mathbf{j}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{I}^{\mathrm{T}}(G)\mathbf{x} \leq \mathbf{j}_m, \\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n, \end{gathered}$$

где $\mathbf{j}_k$ — вектор с k компонентами, каждая из которых является единицей. Действительно, переменная x_v — индикатор того, что соответствующая вершина v принадлежит оптимальному решению ЗНМ. Неравенство $x_v + x_u \leq 1$ гарантирует, что смежные вершины u и v одновременно не принадлежат никакому допустимому решению программы, т.е. что любое допустимое решение является независимым множеством.

Пусть $\mathcal{ISP}(c)$ — множество всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_n^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{I}^{\mathrm{T}}(G) \end{pmatrix}$ не превосходят c. В этой работе мы показываем, что для любого фиксированного c ЗНМ может быть решена для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ за полиномиальное время. Этот результат был впервые получен в работе [1], но наше доказательство более простое и компактное.

Вершинным доминирующим множеством графа G называется подмножество $D \subseteq V(G)$ такое, что любой элемент множества $V(G) \setminus D$ имеет соседа в D. Размер доминирующего множества с наименьшим числом вершин графа G называется *вершинным числом доминирования* графа G и обозначается через $\gamma(G)$. *Задача о вершинном доминирующем множестве* (кратко, ЗВДМ) состоит для заданных графа G и числа k в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\gamma(G) \leq k$ или нет. *Задача о реберном доминирующем множестве* (кратко, ЗРДМ) определяется аналогичным образом. ЗВДМ и ЗРДМ являются классическими NP-полными задачами на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами, ЗВДМ и ЗРДМ могут быть сформулированы в виде следующих д.б.л.п.:

$$\begin{gathered} \min \mathbf{j}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ (\mathbf{A}_v(G) + \mathbf{I}_n)\mathbf{y} \geq \mathbf{j}_n, \\ \mathbf{y} \in \{0,1\}^n \end{gathered} \qquad\qquad \begin{gathered} \min \mathbf{j}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ (\mathbf{A}_e(G) + \mathbf{I}_m)\mathbf{y} \geq \mathbf{j}_m, \\ \mathbf{y} \in \{0,1\}^m, \end{gathered}$$

где $\mathbf{A}_v(G)$ и $\mathbf{A}_e(G)$ — матрицы смежности вершин и ребер графа G, соответственно, а $\mathbf{I}_k$ — единичная матрица размера k. Убедимся в том, что первая программа действительно задает ЗВДМ для графа G. Переменная y_v является индикатором того, что соответствующая вершина v принадлежит некоторому оптимальному решению ЗВДМ для графа G. Неравенство $x_v + \sum\limits_{u \in N(v)} x_u \geq 1$, где $N(v)$ — окрестность вершины v, гарантирует, что множество $\{v\} \cup N(v)$ содержит элемент любого допустимого решения, т.е. что любое допустимое решение является доминирующим множеством.

Пусть $\mathcal{V}DSP(c)$ и $\mathcal{E}DSP(c)$ — множества всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матриц $\mathbf{A}_v(G)+\mathbf{I}_n$ и $\mathbf{A}_e(G)+\mathbf{I}_m$ не превосходят c, соответственно. В этой работе мы показываем, что для любого фиксированного c ЗВДМ может быть решена для графов из $\mathcal{V}DSP(c)$ за полиномиальное время. Также мы показываем, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ за полиномиальное время.

3. Некоторые обозначения и определения

Граф H называется *подграфом* графа G, если H получается из G удалением вершин и ребер (удаление вершины предполагает удаление всех инцидентных ей ребер). Граф H называется *порожденным подграфом* графа G, если H может быть получен из G удалением вершин.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих *запрещенных порожденных подграфов*, т.е. графов, минимальных (относительно удаления вершин) не принадлежащих $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$. *Сильно наследственный* класс графов — наследственный класс, замкнутый еще и относительно удаления ребер. Любой сильно наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих запрещенных подграфов. При этом принята запись $\mathcal{X} = Free_s(\mathcal{Y})$.

Для любого c классы $\mathcal{I}SP(c)$ и $\mathcal{E}DSP(c)$ являются сильно наследственными. Для любого c класс $\mathcal{V}DSP(c)$ является наследственным.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на не более чем два независимых множества.

Граф смежности ребер графа G называется *реберным* к G.

Мы будем использовать следующие обозначения для матриц:

1. $\mathbf{J}_n$ — матрица порядка n, состоящая из одних единиц,
2. $\mathbf{O}_n$ — матрица порядка n, состоящая из одних нулей,
3. $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица порядка n,
4. $\mathbf{j}_n$ — вектор с n компонентами, состоящий из одних единиц,
5. $\mathbf{o}_n$ — вектор с n компонентами, состоящий из одних нулей,
6. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ — матрица, транспонированная к $\mathbf{A}$,
7. $\mathbf{I}(G)$ — матрица инцидентности графа G,
8. $\mathbf{A}_v(G)$ — матрица смежности вершин графа G,
9. $\mathbf{A}_e(G)$ — матрица смежности ребер графа G.

Мы также будем использовать следующие обозначения:

1. $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в первой доле и q вершинами во второй доле,
2. $K'_{1,p}$ — граф, полученный из графа $K_{1,p}$ подразбиением каждого его ребра,
3. K_n — полный граф с n вершинами,
4. O_n — пустой граф с n вершинами,
5. A_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_j |\ i \neq j\} \cup \{v_1 u_1, v_2 u_2, \ldots, v_n u_n\}$,
6. B_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_j |\ i \neq j\} \cup \{u_i u_j |\ i \neq j\} \cup \{v_1 u_1, v_2 u_2, \ldots, v_n u_n\}$,
7. Pal_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_{2n+1}, u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_{i+1} |\ 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{v_{2i} u_i |\ 1 \leq i \leq n\}$,
8. kG — дизъюнктное объединение k копий графа G,
9. для графа G и подмножества $V' \subseteq V(G)$, $G[V']$ — подграф G, порожденный подмножеством V', $G \setminus V'$ — результат удаления из G всех вершин подмножества V',
10. $N(x)$ — окрестность вершины x, $N[x] \triangleq N(x) \cup \{x\}$.

4. Задача о независимом множестве

4.1. Некоторое включение

Л е м м а 4.1. *Для любого $c \geq 2$ справедливо включение $\mathcal{ISP}(c) \subseteq Free_s(\{Pal_c\})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{M}(k,a)$ — матрица, полученная из матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{j}^{\mathrm{T}}_{3k+1} \\ \mathbf{I}^{\mathrm{T}}(Pal_k) \end{pmatrix}$ изменением 1 на a в элементе, соответствующем вершине u_1 в первой строке. Рассмотрим подматрицу матрицы $\mathbf{M}(k,a)$, порожденную столбцами, соответствующими вершинам v_1, v_2, v_3, u_1, а также первой строкой и строками, соответствующими ребрам $v_1 v_2, v_2 v_3, v_2 u_1$. Эта матрица $\mathbf{M}'$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, где первый ее столбец соответствует вершине u_1, $(i+1)$-ый столбец соответствует вершине v_i для любого $1 \leq i \leq 3$, вторая, третья и четвертая строки соответствуют ребрам $u_1 v_2, v_1 v_2, v_2 v_3$, соответственно. Следующая диаграмма показывает последовательность элементарных операций со строками и столбцами матрицы $\mathbf{M}'$:

$$
\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
$$
$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, матрица $\mathbf{M}(k,a)$ элементарными преобразованиями приводится к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{o}_{3k-2}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{o}_{3k-2}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{o}_{3k-2}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{M}(k-1,a+1) \end{pmatrix}$. Следовательно, $|\det(\mathbf{M}(k,a))| = |\det(\mathbf{M}(k-1,a+1))|$, т.е. $|\det(\mathbf{M}(k,a))| = |\det(\mathbf{M}(1,a+k-1))|$. Очевидно, что $\det(\mathbf{M}(1,a)) = -1-a$. Следовательно, $|\det(\mathbf{M}(k,a))| = |a+k|$. Т.к. $\mathbf{M}(k,1) = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{I}^{\mathrm{T}}(Pal_k) \end{pmatrix}$, то $|\det\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{I}^{\mathrm{T}}(Pal_k) \end{pmatrix}| = k+1$.

Матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{I}^{\mathrm{T}}(Pal_k) \end{pmatrix}$ является расширенной матрицей ограничений ЗНМ для графа Pal_k. Следовательно, $\mathcal{ISP}(c)$ не содержит графа Pal_c. Напомним, что класс $\mathcal{ISP}(c)$ является сильно наследственным. Следовательно, включение $\mathcal{ISP}(c) \subseteq Free_s(\{Pal_c\})$ имеет место.

Доказательство закончено.

4.2. Теорема Рида

Покрытие нечетных циклов графа G — подмножество $X \subseteq V(G)$ такое, что граф $G \setminus X$ является двудольным.

Элементарной стеной высоты h называется граф, состоящий из h уровней, каждый из которых состоит из h «кирпичей», где под «кирпичом» понимается простой цикл длины шесть, если уровень не является верхним и нижним, иначе это простой цикл длины пять. Элементарная стена высоты 5 изображена на следующем рисунке.

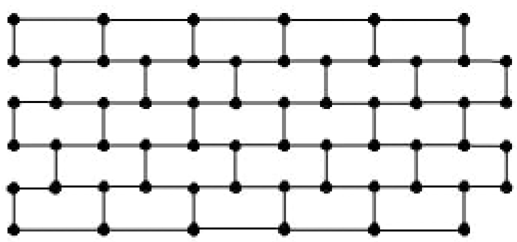

Рисунок **4.1**

Элементарная стена высоты 5

Стена Эшера высоты h может быть получена из элементарной стены высоты h следующим образом. Пусть $(v_1,\ldots,v_{h+1})$ и $(u_1,\ldots,u_{h+1})$ — верхний и нижний пути элементарной стены высоты h, соответственно. Мы заменяем каждое ребро (v_i,v_{i+1}) на простой путь (v_i,w_i',v_{i+1}) и каждое ребро (u_i,u_{i+1}) на простой путь (u_i,w_i'',u_{i+1}). Далее, для каждого i мы добавляем ребро (w_i',w_{h+1-i}'') и подразбиваем его. Стена Эшера высоты 4 изображена на следующем рисунке.

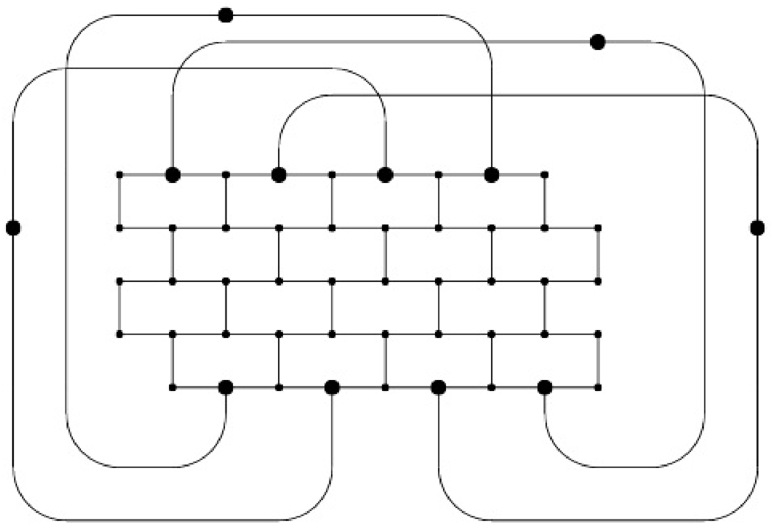

Рисунок **4.2**

Стена Эшера высоты 4

Б. Рид доказал следующий результат в работе [13].

Теорема 4.1. *Для любых k и h существует такое число $t(k,h)$, что если G — граф, не содержащий k непересекающихся по вершинам нечетных циклов и не содержащий стены Эшера высоты h в качестве подграфа, то G содержит покрытие нечетных циклов, имеющее не более $t(k,h)$ элементов.*

4.3. Основной результат этого раздела

Теорема 4.2. *Для любого фиксированного c* ЗНМ *для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.*

Доказательство. Пусть G — произвольный граф из $\mathcal{ISP}(c)$ и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Если G содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов, то матрица $\mathbf{I}(G)$ содержит подматрицу, имеющую c^* блоков, определитель каждого из которых равен 2 по абсолютной величине. Следовательно, данная матрица содержит минор, абсолютное значение которого равно 2^{c^*}, что больше, чем c. Поэтому G не содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов.

Очевидно, граф Pal_c является порожденным подграфом стены Эшера высоты c. По Лемме 4.1 и Теореме 4.1 граф G имеет покрытие нечетных циклов X мощности не более $t(c^*, c)$. Это покрытие может быть найдено за полиномиальное время, поскольку можно за полиномиальное время проверить, является ли заданный граф двудольным или нет. Ясно, что $\alpha(G) = \max\limits_{X' \subseteq X, X' \text{ — независимое множество}} (|X'| + \alpha(G \setminus (X \cup \bigcup\limits_{v \in X'} N(v))))$ и что для любого подмножества X' множества X подграф $G \setminus (X \cup \bigcup\limits_{v \in X'} N(v))$ является двудольным. ЗНМ может быть решена для двудольных графов за полиномиальное время [16]. Следовательно, для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ полиномиально сводится к ЗНМ для двудольных графов. Поэтому для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.

Доказательство закончено.

5. Задача о вершинном доминирующем множестве

5.1. Вспомогательные результаты

Лемма 5.1. *Пусть c — некоторое натуральное число и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Тогда справедливо включение $\mathcal{V}DSP(c) \subseteq Free(\{K_{1,c+2}, A_{c+2}, B_{c+1}, c^*K_{1,3}, c^*A_3\})$.*

Доказательство. Матрица ограничений $\mathbf{A}_v(K_{1,c+2}) + \mathbf{I}_{c+3}$ ЗВДМ для графа $K_{1,c+2}$ совпадает с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{j}^{\mathrm{T}}_{c+2} \\ \mathbf{j}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ с точностью до перестановок строк и столбцов. Ее определитель равен $-c-1$, т.к. она может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} -c-1 & \mathbf{o}^{\mathrm{T}}_{c+2} \\ \mathbf{o}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+1} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица ограничений ЗВДМ для графа $c^*K_{1,3}$ является блочной матрицей, имеющей c^* блоков, каждый из которых имеет определитель, равный -2. Следовательно, определитель всей матрицы равен $(-2)^{c^*}$, что по абсолютному значению больше, чем c. Следовательно, $K_{1,c+2} \notin \mathcal{V}DSP(c)$ и $c^*K_{1,3} \notin \mathcal{V}DSP(c)$. Т.к. $\mathcal{V}DSP(c)$ является наследственным, то имеет место включение $\mathcal{V}DSP(c) \subseteq Free(\{K_{1,c+2}, c^*K_{1,3}\})$.

Нетрудно видеть, что ЗВДМ для графов A_{c+2} и B_{c+1} имеет матрицы ограничений $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \\ \mathbf{I}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ \mathbf{I}_{c+1} & \mathbf{J}_{c+1} \end{pmatrix}$, соответственно. Первая матрица может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2} & \mathbf{O}_{c+2} \\ \mathbf{O}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица $\mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2}$ является циркулянтом, чей определитель равен $\prod\limits_{j=0}^{c+1} p(w_j)$, где $p(x) \triangleq x + x^2 + \ldots + x^{c+1}$ и $w_j \triangleq \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{j}{c+2}}$ [7]. Ясно, что $p(w_0) = c+1$ и $p(x) = x + x^2 + \ldots + x^{c+1} = \frac{x^{c+2}-1}{x-1} - 1$ для любого вещественного числа $x \neq 1$. Следовательно, $p(w_j) = -1$ для любого $j \in \overline{1, c+1}$. Поэтому $|\det(\mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2})| = c+1$. Таким образом, графы A_{c+2} и c^*A_3 не принадлежат классу $\mathcal{V}DSP(c)$, т.е. $\mathcal{V}DSP(c) \subseteq Free(\{A_{c+2}, c^*A_3\})$. Подматрица матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ \mathbf{I}_{c+1} & \mathbf{J}_{c+1} \end{pmatrix}$, порожденная первыми $c+2$ строками и последними $c+2$ столбцами, является матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ 0 & \mathbf{j}^{\mathrm{T}}_{c+1} \end{pmatrix}$. Абсолютное значение ее определителя равно $c+1$. Поэтому $\mathcal{V}DSP(c) \subseteq Free(\{B_{c+1}\})$.
Доказательство закончено.

Через $R(a,b)$ мы обозначаем соответствующее *число Рамсея*, т.е. наименьшее число n такое, что любой граф с n вершинами содержит либо K_a, либо O_b в качестве порожденного подграфа.

Лемма 5.2. *Пусть $G \in \mathcal{V}DSP(c)$ и D — произвольное его минимальное доминирующее множество. Тогда $G[D] \in Free(\{K_{R(c+1,c+2)}\})$.*

Доказательство. Предположим, что $G[D]$ содержит полный подграф с $k \geq R(c+1, c+2)$ вершинами. Пусть вершины $v_1, \ldots, v_k$ порождают этот полный подграф. Поскольку D — минимальное доминирующее множество графа G, то для любого $i \in \overline{1,k}$ существует вершина $u_i \in N(v_i) \setminus \bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^{k} N(v_j)$. По теореме Рамсея порожденный

подграф $G[\{u_1, \ldots, u_k\}]$ графа G содержит либо K_{c+1}, либо O_{c+2} в качестве порожденного подграфа. Следовательно, G содержит либо A_{c+2}, либо B_{c+1} в качестве порожденного подграфа. Мы получаем противоречие с предыдущей леммой. Следовательно, наше первоначальное предположение было неверным.
Доказательство закончено.

Лемма 5.3. *Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{V}DSP(c)$, r — произвольная вершина G, $V_k(r)$ — множество всех вершин графа G, расположенных на расстоянии k от вершины r. Существует функция $f_c(\cdot):\ \mathbb{N}\cup\{0\}\longrightarrow\mathbb{N}$ такая, что для любого k выполнено неравенство $\alpha(G[V_k(r)])\leq f_c(k)$.*

Доказательство. По Лемме 5.1 можно положить $f_c(0)=1$ и $f_c(1)=c{+}1$. Пусть $k\geq 2$. Предположим, что $f_c(0), f_c(1), \ldots, f_c(k-1)$ уже определены. Определим $f_c(k)$. Пусть S_k — независимое множество графа $G[V_k(r)]$ с наибольшим количеством вершин. Пусть D_{k-1} — подмножество множества $\bigcup\limits_{x\in S_k} N(x)\cap V_{k-1}(r)$, доминирующее S_k и имеющее минимальное количество вершин. По Лемме 5.1 ни одна из вершин множества D_{k-1} не может быть смежна с $c{+}2$ вершинами множества S_k. Следовательно, $|D_{k-1}|\geq\frac{|S_k|}{c+1}$ по принципу Дирихле. Т.к. класс $\mathcal{V}DSP(c)$ является наследственным и $G\in\mathcal{V}DSP(c)$, то порожденный подграф $G[D_{k-1}\cup S_k]$ графа G принадлежит классу $\mathcal{V}DSP(c)$. По нашему предположению $G[D_{k-1}]\in Free(\{O_{f_c(k-1)+1}\})$. По Лемме 5.2 $G[D_{k-1}]\in Free(\{K_{R(c+1,c+2)}\})$. Следовательно, по теореме Рамсея $|D_{k-1}|\leq R(R(c+1,c+2), f_c(k-1)+1)$. Поэтому $|S_k|\leq(c+1)R(R(c+1,c+2), f_c(k-1)+1)$. Тем самым, мы можем положить $f_c(k)=(c+1)R(R(c+1,c+2), f_c(k-1)+1)+1$.
Доказательство закончено.

$(K_{1,3},A_3)$*-упаковка* графа G — произвольное множество $\{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$ графов такое, что:

1. для любого i граф G_i является порожденным подграфом графа G, изоморфным либо $K_{1,3}$, либо A_3,

2. для любых различных i и j множества вершин графов G_i и G_j не пересекаются и не существует двух смежных вершин $u\in G_i$ и $v\in G_j$.

$(K_{1,3},A_3)$-упаковка называется *оптимальной*, если она содержит максимально возможное количество элементов. По Лемме 5.1 любая $(K_{1,3},A_3)$-упаковка любого графа из $\mathcal{V}DSP(c)$ имеет не более $[\log_2(c)]$ элементов, каждый из которых изоморфен $K_{1,3}$, и не более $[\log_2(c)]$ элементов, каждый из которых изоморфен A_3. Следовательно, некоторая оптимальная $(K_{1,3},A_3)$-упаковка любого графа из $\mathcal{V}DSP(c)$ может быть найдена за полиномиальное время, т.к. она может быть найдена перечислением всех подмножеств его вершин, имеющих не более $(4+6)[\log_2(c)]$ элементов.

Пусть G — произвольный связный граф из $\mathcal{V}DSP(c)$ и $P\triangleq\{G_1,\ldots,G_s\}$ — некоторая оптимальная его $(K_{1,3},A_3)$-упаковка. Пусть $N_d(P)\triangleq\{x\in V(G)|\ \exists i\in\overline{1,s}\ \exists y\in V(G_i)$ такая, что расстояние между x и y не превосходит $d\}$. Пусть $\mathfrak{D}_G\triangleq\{D^*|\ D^*$ — подмножество множества $N_2(P)$, доминирующее $N_1(P)\}$. Для любого элемента $D^*\in\mathfrak{D}_G$ мы удалим каждую вершину G, доминируемую множеством D^* (D^* доминирует каждую вершину D^*). Полученный граф обозначим через $G(D^*)$.

Лемма 5.4. *Для любого элемента $D^*\in\mathfrak{D}_G$ граф $G(D^*)$ принадлежит классу $Free(\{K_{1,3},A_3\})$. Если D — доминирующее множество графа G с наименьшим количеством вершин, то выполнено неравенство $\gamma(G)\geq\gamma(G(D\cap N_2(P)))+|D\cap N_2(P)|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $V(G(D^*)) \cap N_1(P) = \emptyset$ по определению графа $G(D^*)$. Отсюда и из оптимальности упаковки P следует, что граф $G(D^*)$ не может содержать ни $K_{1,3}$, ни A_3 в качестве порожденного подграфа. Другими словами, $G(D^*) \in Free(\{K_{1,3}, A_3\})$.

Пусть $\tilde{D} \triangleq D \cap N_2(P)$ и $D' \triangleq D \setminus \tilde{D}$. Ясно, что $\tilde{D} \in \mathfrak{D}_G$. Покажем, что существует доминирующее множество графа $G(\tilde{D})$, имеющее не более $|D'|$ элементов. Это очевидно, если $D' \subseteq V(G(\tilde{D}))$. Предположим, что существует вершина $x \in D' \setminus V(G(\tilde{D}))$. Заметим, что $x \notin N_2(P)$. По построению графа $G(\tilde{D})$ существует вершина $y \in \tilde{D}$ такая, что $xy \in E(G)$. Ясно, что $y \in N_2(P) \setminus N_1(P)$. Т.к. D — доминирующее множество графа G с минимальным количеством вершин, то существует вершина $z \in N(x) \setminus \bigcup\limits_{v \in D, v \neq x} N[v]$. Следовательно, z не доминируется множеством $\tilde{D}$. Поэтому вершина z принадлежит графу $G(\tilde{D})$. Множество $N(x) \cap V(G(\tilde{D}))$ порождает полный граф. Действительно, если оно содержит две несмежные вершины v и u, то $N(y) \cap \{v, u\} = \emptyset$ и вершины x, y, v, u порождают подграф $K_{1,3}$. Это невозможно, т.к. упаковка P является оптимальной. Поэтому множество $(D' \setminus \{x\}) \cup \{z\}$ доминирует $V(G(\tilde{D}))$. Таким образом, существует доминирующее множество D'' графа $G(\tilde{D})$, содержащее не более $|D'|$ вершин. Множество $\tilde{D} \cup D''$ является доминирующим множеством графа G. Более того, $|\tilde{D} \cup D''| = |\tilde{D}| + |D''| \leq |\tilde{D}| + |D'| = |D| = \gamma(G)$. Т.к. $\gamma(G(\tilde{D})) \leq |D''|$, то выполнено неравенство $\gamma(G) \geq \gamma(G(\tilde{D})) + |\tilde{D}|$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5.2. Основной результат этого раздела

Т е о р е м а 5.1. *Для любого фиксированного* c ЗВДМ *для графов из* $\mathcal{VDSP}(c)$ *решается за полиномиальное время.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{VDSP}(c)$. Некоторая его оптимальная $(K_{1,3}, A_3)$-упаковка P может быть вычислена за полиномиальное время. Пусть D_{opt} — доминирующее множество графа G, имеющее минимальное количество вершин. По Леммам 5.2 и 5.3 существует функция $g(\cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такая, что мощность множества $D_{opt} \cap N_2(P)$ не превосходит значения функции $g(\cdot)$ в точке c. Пусть $\mathfrak{D}_G^* \triangleq \{D \in \mathfrak{D}_G | \ |D| \leq g(c)\}$. Следовательно, множество $\mathfrak{D}_G^*$ может быть вычислено за полиномиальное время. Пусть $D \in \mathfrak{D}_G^*$. Объединение множества D и любого доминирующего множества графа $G(D)$ с минимальным количеством вершин является доминирующим множеством графа G. Следовательно, выполнено неравенство $\gamma(G) \leq |D| + \gamma(G(D))$. Отсюда и второй части Леммы 5.4 выполнено соотношение $\gamma(G) = \min\limits_{D \in \mathfrak{D}_G^*} (\gamma(G(D)) + |D|)$. Т.к. $\mathfrak{D}_G^* \subseteq \mathfrak{D}_G$, то по первой части Леммы 5.4 граф $G(D)$ принадлежит классу $Free(\{K_{1,3}, A_3\})$ для любого $D \in \mathfrak{D}_G^*$. ЗВДМ может быть решена за полиномиальное время для графов из класса $Free(\{K_{1,3}, A_3\})$ [5]. Поэтому для любого фиксированного c ЗВДМ для графов из класса $\mathcal{VDSP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

6. Задача о реберном доминирующем множестве

6.1. Кликовая ширина графов и ее значение

Кликовая ширина — важный параметр графов. Это объясняется тем фактом, что многие задачи на графах могут быть решены за полиномиальное время в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной (см., например, [6]). Более точно, для любого фиксированного числа C многие NP-полные задачи на графах становятся полиномиально разрешимыми во множестве всех графов, каждый из которых имеет кликовую ширину не более чем C. В частности, это верно для задач о независимом множестве и о вершинном доминирующем множестве [6].

Класс $\mathcal{S}$ — множество всех лесов, имеющих не более чем 3 листа в каждой из компонент связности. Следующий результат является достаточным условием ограниченности кликовой ширины в сильно наследственных классах графов. Он доказан в работе [4].

Лемма 6.1. *Если $\mathcal{X}$ — сильно наследственный класс графов и $\mathcal{S} \nsubseteq \mathcal{X}$, то существует константа $C(\mathcal{X})$ такая, что кликовая ширина любого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит $C(\mathcal{X})$.*

Для любых c и p, $pK'_{1,3} \in \mathcal{S}$ и $\mathcal{E}DSP(c)$ являются сильно наследственными классами. Следовательно, по предыдущей и следующей леммам кликовая ширина всех графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ ограничена для любого c.

Лемма 6.2. *Пусть c — произвольное натуральное число и $c^* \triangleq [\log_2(c)] + 1$. Тогда справедливо включение $\mathcal{E}DSP(c) \subseteq Free_s(\{c^* K'_{1,3}\})$.*

Доказательство. Матрица ограничений $\mathbf{A}_e(K'_{1,3}) + \mathbf{I}_6$ ЗРДМ для графа $K'_{1,3}$ совпадает (с точностью до перестановок строк и столбцов) с матрицей $\mathbf{M} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что $det(\mathbf{M}) = -2$. Следовательно, никакой граф из $\mathcal{E}DSP(c)$ не может содержать c^* непересекающихся по вершинам копий графа $K'_{1,3}$, иначе $\mathbf{M}$ содержит минор $(-2)^{c^*}$, причем $2^{c^*} > c$. Поэтому $\mathcal{E}DSP(c) \subseteq Free_s(\{c^* K'_{1,3}\})$.
Доказательство закончено.

6.2. Основной результат этого раздела

Теорема 6.1. *Для любого фиксированного c* ЗРДМ *для графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ может быть решена за полиномиальное время.*

Доказательство. Известно, что ЗРДМ полиномиально разрешима в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной [10]. Отсюда и из лемм 6.1 и 6.2 следует, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{E}DSP(c)$ за полиномиальное время.
Доказательство закончено.

7. Благодарности

Эта публикация подготовлена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проекты 16-31-60008-мол-а-дк, 15-01-06249-а, 16-31-00109-мол-а; гранта Президента РФ МК-4819.2016.1; лаборатории ЛАТАС НИУ ВШЭ.

Дата поступления 09.08.2016

Список литературы

1. V. E. Alekseev, D. V. Zakharova, "Independent sets in the graphs with bounded minors of the extended incidence matrix", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **5**:1 (2011), 14–18.
2. S. Arnborg, A. Proskurowski, "Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees", *Discrete Applied Mathematics*, **23**:1 (1989), 11—24.
3. S. Artmann, F. Eisenbrand, C. Glanzer, T. Oertel, S. Vempala, R. Weismantel, "A note on non-degenerate integer programs with small sub-determinants", *arxiv:1603.09595v1*.
4. R. Boliac, V. Lozin, "On the clique-width of graphs in hereditary classes", *Lecture Notes in Computer Science*, **2518** (2002), 44–54.
5. A. Brandstädt, F. F. Dragan, "On linear and circular structure of (claw, net)-free graphs", *Discrete Applied Mathematics*, **129**:2–3 (2003), 285–303.
6. B. Courcelle, J. Makowsky, U. Rotics, "Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width", *Theory of Computing Systems*, **33**:2 (2000), 125–150.
7. R. M. Gray, "Toeplitz and circulant matrices: a review", *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, **2**:3 (2006), 155–239.
8. N. Karmarkar, "A new polynomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica*, **4**:4 (1984), 373–395.
9. L. G. Khachiyan, "Polynomial algorithms in linear programming", *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:1 (1980), 53–72.
10. D. Kobler, U. Rotics, "Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width", *Discrete Applied Mathematics*, **126**:2–3 (2003), 197–221.
11. Y. E. Nesterov, A. S. Nemirovsky, *Interior point polynomial methods in convex programming*, SIAM, 1994.
12. P. M. Pardalos, C. G. Han, Y. Ye, "Interior point algorithms for solving nonlinear optimization problems", *COAL Newsletter*, **19** (1991), 45–54.
13. B. Reed, "Mangoes and Blueberries", *Combinatorica*, **19**:2 (1999), 267–296.
14. V. N. Shevchenko, *Qualitative topics in integer linear*, AMS, 1997.
15. S. I. Veselov, A. J. Chirkov, "Integer program with bimodular matrix", *Discrete Optimization*, **6**:2 (2009), 220–222.

16. S. H. Whitesides, “A method for solving certain graph recognition and optimization problems, with applications to perfect graphs.”, *Annals of Discrete Mathematics*, **88** (1984), 281–297.

The complexity of some graph problems with bounded minors of their constraint matrices

© **D. V. Gribanov**[3], **D. S. Malyshev**[4]

Abstract. The article considers natural formulations of the independent set problem, vertex and edge dominating set problems as integer linear programming problems. For every fixed C, authors prove polynomial-time solvability of both dominating set problems in a class of graphs, for which all minors of the vertex and edge adjacency matrices are at most C in the absolute value. The paper also includes a similar result for the independent set problem and for a class of graphs, which is defined by bounding of absolute values of all matrix minors obtained by augmenting of transposed incidence matrices by all-ones vectors.

Key Words: boolean linear programming, independent set problem, dominating set problem, matrix minor, polynomial-time algorithm

[3] Assistant lecturer of Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; dimitry.gribanov@gmail.com

[4] Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; dsmalyshev@rambler.ru