Б. М. Гуревич, Совершенные разбиения для эргодических потоков, *Функц. анализ и его прил.*, 1977, том 11, выпуск 3, 20–23

Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 3, 1977, 20—23.

УДК 519.2

СОВЕРШЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Б. М. Гуревич

Цель этой заметки — доказать для эргодических потоков аналог теоремы Рохлина — Синая [1] о существовании совершенного разбиения у любого автоморфизма пространства Лебега. Мы будем в основном придерживаться терминологии и обозначений статьи В. А. Рохлина [2].

1. Напомним несколько известных понятий и фактов, используемых ниже (см. [2]). Каждому автоморфизму T пространства Лебега X отвечает разбиение*) $\pi(T)$ (введенное М. С. Пинскером [3]), являющееся максимальным среди разбиений, фактор-автоморфизмы по которым имеют нулевую энтропию. Разбиение ξ называется *экстремальным для* T, если $T\xi \geqslant \xi$, $\bigvee_i T^i\xi = \varepsilon$, $\bigwedge_i T^i\xi = \nu$, где ε и ν — соответственно разбиение на точки и тривиальное разбиение пространства X. Экстремальное разбиение ξ называется *совершенным*, если справедливо равенство $H(T\xi/\xi) = h(T)$, левая часть которого есть условная энтропия разбиения $T\xi$ относительно ξ, а правая — энтропия автоморфизма T. Совершенное разбиение — естественный аналог разбиения, порожденного «прошлым» стационарного случайного процесса с конечным числом состояний. Автоморфизм T, для которого $\pi(T) = \nu$, называется *K-автоморфизмом* (*автоморфизмом Колмогорова*), а отвечающие ему экстремальные разбиения — *K-разбиениями*. Всякий автоморфизм обладает совершенным разбиением.

Пусть $\{S_t\}$ — измеримый поток, действующий в пространстве Лебега X. Известно, что разбиение $\pi(S_t)$ не зависит от t при $t \neq 0$. Обозначим это разбиение через $\pi(\{S_t\})$. Разбиение ξ называется *совершенным для* $\{S_t\}$ (ср. [4]), если: 1) $S_t\xi \geqslant \xi$ при $t \geqslant 0$, 2) $\bigvee_t S_t\xi = \varepsilon$, 3) $\bigwedge_t S_t\xi = \pi(\{S_t\})$, 4) $H(S_t\xi/\xi) = h(S_t)$ при $t \geqslant 0$. Поток $\{S_t\}$ называется *K-потоком*, если существует разбиение ξ, обладающее свойствами 1), 2) и 3′) $\bigwedge_t S_t\xi = \nu$.

Теорема 1. *Всякий эргодический поток обладает совершенным разбиением.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. *Если* $\pi(\{S_t\}) = \nu$, *то* $\{S_t\}$ — *K-поток.*

Утверждение теоремы 2 означает, что всякий поток, состоящий из K-автоморфизмов (не считая тождественного преобразования S_0), является K-потоком. Это утверждение содержится в докладе Д. Рудольфа [5] на недавней конференции по динамическим системам в Ренне. Однако предложенный им метод доказательства применим лишь к потокам с конечной энтропией. Что касается теоремы 1, то в работе автора [6] она была доказана при некоторых дополнительных ограничениях на поток.

2. Доказательство теоремы 1. 2.1. В силу теоремы о специальном представлении измеримого потока (см. [7]), можно с самого начала предпо-

*) Все разбиения, встречающиеся в этой работе, являются измеримыми (в случаях, когда измеримость нельзя считать предположением, она легко доказывается). Соотношения между разбиениями считаются выполненными на множестве полной меры.

ложить, что имеем дело со специальным потоком (по другой терминологии потоком под функцией), построенным по автоморфизму T_1 пространства Лебега (X_1, μ_{X_1}) и функции $f_1(x)$, $x \in X_1$. В [5] Д. Рудольф указал процедуру, позволяющую перейти от специального представления (T_1, f_1) к изоморфному ему представлению (T, f), в котором функция f принимает два значения. Поэтому достаточно доказать теорему 1 для специального потока $\{S_t\} = (T, f)$, где T — эргодический автоморфизм пространства Лебега (X, μ_X) (эргодичность T равносильна эргодичности потока $\{S_t\}$), а функция $f(x)$, $x \in X$, принимает положительные значения a_1 и a_2 *).

2.2. Пусть (Y, μ) — пространство, в котором действует поток $\{S_t\} = (T, f)$. Мы построим три разбиения этого пространства, ξ', ξ'' и ξ, со следующими свойствами: 1) ξ' и ξ'' — совершенные разбиения для автоморфизма S_δ при некотором $\delta > 0$; 2) $S_t\xi \geqslant \xi$, $H(S_t\xi/\xi) = h(S_t)$ при любом $t \geqslant 0$; 3) $\xi'' \leqslant \xi \leqslant \xi'$. Из 1) — 3) легко выводится, что ξ — искомое совершенное разбиение для потока $\{S_t\}$.

По определению, всякая точка $y \in Y$ имеет вид (x, u), где $x \in X$, $u \in \mathbf{R}$ и $0 \leqslant u < f(x)$. Пусть γ — разбиение пространства Y на множества вида $u = \mathrm{const}$ («горизонтальные слои») и α — разбиение пространства X на два множества $A_1 = \{x \in X\colon f(x) = a_1\}$ и $A_2 = \{x \in X : f(x) = a_2\}$.

Из эргодичности потока вытекает, что найдется положительное $\delta < \min(a_1, a_2)$, при котором автоморфизм S_δ эргодичен. Подберем натуральное $\bar{n}$ из условия $\delta > 2^{-\bar{n}}$ и обозначим через β разбиение пространства Y на подмножества вида $\{(x, u) \in Y\colon x \in A_i;\quad j2^{-\bar{n}} \leqslant u < (j+1)2^{-\bar{n}}\}$, $i = 1, 2$; $j = 0, 1, \ldots$ Покажем, что

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} S_\delta^{-n}\beta \geqslant \gamma. \tag{1}$$

Пусть

$$B_k = \{(x, u) \in Y\colon x \in A_1 \cap T^{-1}A_2,\ a_1 - k^{-1} < u < a_1\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Так как автоморфизм T эргодичен, $\mu_X(A_1 \cap T^{-1}A_2) > 0$. Следовательно, $\mu(B_k) > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и в силу эргодичности S_δ найдется такое подмножество $Y' \subset Y$, что $\mu(Y') = 0$ и для любой точки $y \in Y \setminus Y'$ и любого k включение $S_\delta^n y \in B_k$ выполняется при бесконечно многих $n > 0$. Пусть $y_1 = (x_1, u_1)$ и $y_2 = (x_2, u_2)$ — любые две точки множества $Y \setminus Y'$, принадлежащие одному элементу разбиения $\bigvee_{n=0}^{\infty} S_\delta^{-n}\beta$. Мы должны показать, что $u_1 = u_2$. Если это не так, и, скажем, $u_1 > u_2$, то подберем натуральные k и n, для которых $u_1 - u_2 > k^{-1}$ и $S_\delta^n y_2 \in B_k$. Нетрудно понять, что тогда $S_\delta^n y_1 \in \{(x, u) : x \in A_2\}$, в то время как $S_\delta^n y_2 \in \{(x, u) : x \in A_1\}$. Но это противоречит выбору точек y_1, y_2. Неравенство (1) доказано.

2.3. Положим $\alpha_0 = \alpha$ и определим разбиения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ пространства X так, чтобы выполнялось условие $\alpha_n \nearrow \varepsilon_X$, где ε_X — разбиение X на отдельные точки (аналогичный смысл имеет обозначение ε_Y; см. ниже). Пусть, далее, $\beta_0 = \beta$ и β_n, $n = 1, 2, \ldots$, — разбиение пространства Y на подмножества вида $\{(x, u) \in Y\colon x \in C,\quad j2^{-\bar{n}-n} \leqslant u < (j+1)2^{-\bar{n}-n}\}$, $j = 0, 1, \ldots$, где C — произвольный элемент разбиения α_n. Из определения видно, что $\beta_n \nearrow \varepsilon_Y$.

---

*) Дальнейшие рассуждения годятся и в более общем случае, когда разбиение пространства X на множества постоянства f имеет конечную энтропию.

Пусть заданы три последовательности неотрицательных целых чисел, $\{l_k\}$, $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$, $k=0, 1, \ldots$, причем $l_0=m_0=n_0=0$. Введем разбиение $\xi_X=\bigvee_{k=0}^{\infty}\bigvee_{r=m_k}^{\infty} T^{-r}\alpha_k$ пространства X и разбиения ξ', ξ'' и ξ пространства Y, где $\xi'=\bigvee_{k=0}^{\infty}\bigvee_{r=l_k}^{\infty} S_\delta^{-r}\beta_k$, $\xi''=\bigvee_{k=0}^{\infty}\bigvee_{r=n_k}^{\infty} S_\delta^{-r}\beta_k$, а ξ определяется условием: точки (x_1, u_1) и (x_2, u_2) принадлежат одному элементу ξ в том и только том случае, когда точки x_1, x_2 принадлежат одному элементу ξ_X и $u_1=u_2$. Полагая $a^+=\max(a_1, a_2)$, $a^-=\min(a_1, a_2)$, покажем, что если

$$m_k \geqslant a^-(l_k\delta+a^-)/a^-, \quad n_k \geqslant a^+(m_k+1)/\delta, \quad k \geqslant 1, \tag{2}$$

то

$$\xi'' \leqslant \xi \leqslant \xi'. \tag{3}$$

Из определения ξ', равенств $\beta_0=\beta$, $l_0=0$ и неравенства (1) вытекает, что $\xi' \geqslant \bigvee_{r=0}^{\infty} S_\delta^{-r}\beta \geqslant \gamma$. Это означает, что если $y_1=(x_1, u_1)$ и $y_2=(x_2, u_2)$ — любые две точки из некоторого подмножества полной меры пространства Y, принадлежащие одному элементу разбиения ξ', то $u_1=u_2$ и x_1, x_2 принадлежат одному элементу разбиения $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\alpha$. Но тогда *) при любом $l \geqslant 0$ точки $S_\delta^l y_1$, $S_\delta^l y_2$ имеют соответственно вид (x_1^l, u_1^l), (x_2^l, u_2^l), где $u_1^l=u_2^l$, $x_1^l=T^m x_1$, $x_2^l=T^m x_2$ и m (зависящее от x_1, x_2 и l) удовлетворяет неравенству

$$(m-1)a^- \leqslant l\delta. \tag{4}$$

По условию, точки $S_\delta^l y_1$ и $S_\delta^l y_2$ при $l \geqslant l_k$ принадлежат одному элементу разбиения α_k, и, следовательно, точки x_1, x_2 принадлежат одному элементу разбиения $T^{-m}\alpha_k$. В силу неравенства (4) и условия $\delta < a^-$ это имеет место при всех $m \geqslant (l_k\delta+a^-)/a^-$ и, значит, при всех $m \geqslant m_k$ (см. (2)). Из сказанного следует, что x_1 и x_2 принадлежат одному элементу разбиения ξ_X, а потому y_1 и y_2 принадлежат одному элементу разбиения ξ. Тем самым правое из неравенств (3) доказано. Левое доказывается аналогично.

2.4. Напомним следующий результат В. А. Рохлина и Я. Г. Синая [1] (см. также [2]). Если S — автоморфизм пространства Лебега, $\{\eta_k, k=0, 1, 2, \ldots\}$ — последовательность разбиений с конечной энтропией такая, что $\eta_k \nearrow \varepsilon$, и $\{r_k, k=0, 1, 2, \ldots\}$ — достаточно быстро растущая последовательность целых чисел, то $\bigvee_{k=0}^{\infty}\bigvee_{r=r_k}^{\infty} S^{-r}\eta_k$ — совершенное разбиение для S. При заданной последовательности $\{\eta_k\}$ числа r_k можно выбирать так, что если $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ уже выбраны, то в качестве r_n берется любое число, превосходящее некоторую величину, зависящую от $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$. Кроме того, можно положить $r_0=0$.

Возвращаясь к изучаемой ситуации и беря в качестве S поочередно T и S_δ, а в качестве η_k — α_k и β_k, нетрудно построить последовательности $\{l_k\}$, $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ такие, что $l_0=m_0=n_0=0$, выполняются неравенства (2) и разбиения ξ_X и ξ', ξ'' являются совершенными для T и S_δ соответственно.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить свойства 2) разбиения ξ (см. п. 2.1). Первое из этих свойств — неравенство $S_t\xi \geqslant \xi$, $t \geqslant 0$, — непосредственно вытекает из постоянства функции f на элемен-

*) Здесь используется неравенство $\delta < a^-$.

тах разбиения ξ_X и неравенства $T\xi_X \geqslant \xi_X$. Что же касается равенства $H(S_t\xi/\xi) = h(S_t)$, $t \geqslant 0$, то оно легко выводится из аналогичного равенства $H(T\xi_X/\xi_X) = h(T)$ (напомним, что ξ_X — совершенное разбиение для T) и формулы Абрамова $h(S_t) = |t|\, h(S_1)$. Теорема доказана.

Примечание при корректуре. Результат, по существу равносильный теореме 1, недавно опубликовал Ф. Бланшар.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 13 апреля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Рохлин В. А., Синай Я. Г., Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений, ДАН СССР 141, № 5 (1961), 1038—1041.
2. Рохлин В. А., Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой, УМН XXII, вып. 5 (1967), 3—56.
3. Пинскер М. С., Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией, ДАН СССР 133, № 5 (1960), 1025—1026.
4. Гуревич Б. М., Некоторые условия существования K-разбиений для специальных потоков, Труды Моск. матем. об-ва XVII (1967), 89—116.
5. Rudolf D. J., A two-valued step-coding for ergodic flows, Proc. of the Intern. Conference on Dynamic. Systems in Math. Phys., Rennes, Sept. 14—21, 1975.
6. Гуревич Б. М., Построение возрастающих разбиений для специальных потоков, Теория вероятн. X, вып. 4 (1965), 693—712.
7. Рохлин В. А., Избранные вопросы метрической теории динамических систем, УМН IV, вып. 2 (1949), 57—128.