В. Г. Яхно, Двумерная обратная задача для системы динамических уравнений Ламе, *Докл. АН СССР*, 1989, том 307, номер 2, 360–362

В.Г. ЯХНО

ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 11 III 1988)

В работах М.М. Лаврентьева [1, 2], А.С. Алексеева [3] исследовались обратные задачи определения функции скорости в ограниченной области в предположении, что вне области скорость постоянна. В работе В.Г. Романова [4] изучалась задача определения в ограниченной области коэффициентов общего гиперболического уравнения второго порядка. В настоящей работе рассмотрена аналогичная постановка обратной задачи для системы уравнений линейной упругости, заключающаяся в определении упругих параметров Ламе и плотности как функций двух пространственных переменных. Решение этой задачи сведено к последовательному решению двух обратных кинематических задачх, связанных с определением функций скоростей продольных и поперечных волн, и задачи определения одного из параметров Ламе. Исследованы вопросы единственности и устойчивости решения полученных задач.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений динамической упругости

$$(1)\qquad \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial y_j} + e_i\delta(y-y^0)\delta(t),$$

$$(2)\qquad u_i|_{t<0} = 0,$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)\in R^3;\quad t\in R,\quad i = 1,2,3.$$

Здесь $\mathbf{y}^0 = (0, y_2^0, y_3^0)$ – параметр задачи; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – вектор направления мгновенного точечного воздействия; $\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}^0) = \delta(y_3)\delta(y_2 - y_2^0)\delta(y_3 - y_3^0)$, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака; $\rho = \rho(y_2, y_3)$ – плотность; $\mathbf{u}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^0, t) = (u_1(\mathbf{y}, \mathbf{y}^0, t), u_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}^0, t), u_3(\mathbf{y}, \mathbf{y}^0, t))$ – вектор смещений; $\sigma_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial y_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ – напряжения; $\lambda = \lambda(y_2, y_3)$, $\mu = \mu(y_2, y_3)$ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера.

Пусть далее $D\subset R^2$ – ограниченная область, $\mathbf{x} = (y_2, y_3)\in R^2$. Функции ρ, λ, μ зависят только от $\mathbf{x} = (y_2, y_3)$ и принадлежат классу $C^{11}(R^2)$. Значения этих функций везде положительны, а при $\mathbf{x} = (y_2, y_3)\in R^2\setminus D$ они являются постоянными ρ_0, μ_0, λ_0. Далее считаем значения $\rho(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} = (y_2, y_3)\in D$ неизвестными. Пусть S такая замкнутая кривая, что ее внутренность D_0 содержит $\bar D$ и она определяется уравнением $F(\mathbf{x}) = 0$, где

$$F(\mathbf{x})\in C^2(\bar D_0),\quad F(\mathbf{x})<0,\quad \mathbf{x}\in D_0,\quad |\nabla_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})||_S = 1.$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. *Определить при* $\mathbf{x}\in D$ *функции* $\rho(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})\in C^{11}(R^2)$, *входящие в систему дифференциальных уравнений* (1), *если относительно решения задачи* (1), (2) *известна информация*

$$(3)\qquad \mathcal{F}_{y_1}[u](\nu, \mathbf{x}, \mathbf{x}^0, t)|_{\nu=0} = H(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, t),$$

где $\mathcal{F}_{y_1}$ *– оператор преобразования Фурье по* y_1, ν *– параметр преобразования;* $\check H(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, t)$ *– известная вектор-функция при* $\mathbf{x} = (y_2, y_3)\in S$, $\mathbf{x}^0 = (y_2^0, y_3^0)\in S$,

$0 < t < T$, T – *фиксированное положительное число, удовлетворяющее неравенству*

$$T \cdot v_0 > d, \quad d = \operatorname{diam} D_0, \quad v_0 = \inf_{x \in D_0} \sqrt{\mu(\mathrm{x})/\rho(\mathrm{x})}.$$

Замечание 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) при $y_3 > 0$, $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0) \in R^2 \times R_+$ с данными (2) и условием

(4) $\quad \sigma_{i3}|_{y_3 = +0} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$

Пусть $D_0 \subset R \times R_+$, $R_+ = (0, \infty)$. Поставим обратную задачу, связанную с определением при $\mathrm{x} = (y_2, y_3) \in D$ функций $\rho(x)$, $\mu(\mathrm{x})$, $\lambda(\mathrm{x}) \in C^{11}(R \times R_+)$, принимающих в $(R \times R_+) \setminus D$ постоянные значения, если относительно решения задачи (1), (2), (4) задана информация

$$\mathbf{u}|_{y_3 = +0,\, y_3^0 = +0,\, (y_1, y_2) \in D_1,\, (y_1^0, y_2^0) \in D_2} = \mathbf{h}(y_1, y_2, y_1^0, y_2^0, t),$$

где $D_1 \subset R^2$, $D_2 \subset R^2$ – заданные области, $D_1 \cap D_2 = \phi$; $\mathbf{h}(y_1, y_2, y_1^0, y_2^0, t)$ – известная функция при $(y_1, y_2) \in D_1$, $(y_1^0, y_2^0) \in D_2$, $t \in R$.

Предположим, что величина $T \cdot \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ меньше расстояния от точек области D_0 до плоскости $y_3 = 0$. Тем самым при $\mathrm{y}^0 = (0, x^0)$, $\mathrm{x}^0 = (y_2^0, y_3^0) \in S$, $-\infty < t < T$ решение задачи (1), (2), (4) и $\mathbf{u}(\mathrm{y}, y^0, t)$ не зависит от граничного условия (4).

В указанных ограничениях можно показать, что исследование однозначности решения последней задачи сводится к исследованию единственности решения обратной задачи 1.

Замечание 2. Пусть $\mathrm{x} = (y_2, y_3)$, $\mathrm{x}^0 = (y_2^0, y_3^0)$,

$$v_1(\mathrm{x}) = \sqrt{\mu(\mathrm{x})/\rho(\mathrm{x})}, \quad v_2(\mathrm{x}) = \sqrt{(\lambda(\mathrm{x}) + 2\mu(\mathrm{x}))/\rho(\mathrm{x})},$$

(5) $$d\tau_j = \frac{1}{v_j(\mathrm{x})} \left(\sum_{i=2}^{3} dy_j^2 \right)^{1/2},$$

$\tau_j(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0)$ – расстояние между точками $\mathrm{x} = (y_2, y_3) \in R^2$, $\mathrm{x}^0 = (y_2^0, y_3^0) \in R^2$ в римановой метрике, определяемой формулой (5), $j = 1, 2$. Заметим, что информация $H(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0, t)$, $\mathrm{x} \in S$, $\mathrm{x}^0 \in S$ содержит в себе данные о временах $\tau_j(x, x^0)$, $\mathrm{x} \in S$, $\mathrm{x}^0 \in S$. Эти данные служат информацией для двух обратных кинематических задач, заключающихся в определении скорости $v_1(\mathrm{x})$ по $\tau_1(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0)$, $\mathrm{x} \in S$, $\mathrm{x}^0 \in S$ и определении скорости $v_2(\mathrm{x})$ по $\tau_2(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0)$, $\mathrm{x} \in S$, $\mathrm{x}^0 \in S$. Исследование таких задач содержится в работах [5, 6].

Из замечания 2 следует, что решение обратной задачи 1 может быть сведено к решению двух обратных кинематических задач, определяющих $v_1(\mathrm{x})$, $v_2(\mathrm{x})$, затем решению следующей задачи.

Обратная задача 2. *Пусть* $v(\mathrm{x}) \in C^{11}(R^2)$ – *известная положительная функция, принимающая при* $\mathrm{x} \in R^2 \setminus D$ *постоянное значение* $\sqrt{\mu_0/\rho_0}$; $\mu(\mathrm{x}) \in C^{11}(R^2)$ – *положительная функция, принимающая при* $\mathrm{x} \in R^2 \setminus D$ *постоянное значение* μ_0, *а при* $\mathrm{x} \in D$ *ее значения неизвестны. Определить при* $\mathrm{x} \in D$ *значения функции* $\mu(\mathrm{x})$, *если относительно решения задачи* (1), (2) *задана информация* (3), *где* $H_1(x, x^0, t)$ – *известная при* $\mathrm{x} \in S$, $\mathrm{x}^0 \in S$, $-\infty < t < \tau_1(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0) + \epsilon$ *функция*; ϵ – *некоторое положительное число*; $\tau_1(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0)$ – *расстояние между* x, x^0 *в метрике* (5).

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям работы [7], можно показать, что решение обратной задачи 2 сводится к последовательному решению задачи интегральной геометрии, а затем решению задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения. При этом исследование вопросов единственности и устойчивости решения полученной задачи интегральной геометрии проводилось ранее в работе [6], а изучение вопросов существования, единственности и устойчивости решения задачи Дирихле – в [8, 9]. Из указанных выше рассуждений и результатов цитированных работ вытекает теорема об оценке устойчивости решения обратной задачи 2.

Т е о р е м а. *Пусть M, μ_0, ρ_0 – фиксированные положительные числа,* $\mu_0 < \exp(M)$; $v(\mathrm{x}) \in C^{11}(R^2)$ *– известная положительная функция, принимающая при* $\mathrm{x} \in R^2 \setminus D$ *постоянное значение;* $\mu(\mathrm{x}), \mu^*(\mathrm{x}) \in \mathfrak{M}(M, \mu_0) = \{\mu(\mathrm{x}) \mid \mu(\mathrm{x}) = \exp R(\mathrm{x}),\ R(\mathrm{x}) \in C^{11}(R^2),\ |R(\mathrm{x})| \leqslant M,\ \mu(\mathrm{x}) = \mu_0$ *при* $\mathrm{x} \in R^2 \setminus D\}$ *– решения обратной задачи* 2, *отвечающие информациям* $H_1(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0, t)$, $H_1^*(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0, t)$ *– соответственно. Тогда имеет место оценка*

$$\left\| \ln \frac{\mu}{\mu^*} \right\|^2_{L_2(D)} \leqslant C \int_S ds_\xi \int_S |\Phi(\widetilde{W})| \, ds_x,$$

где C – некоторая постоянная, величина которой зависит от M, μ_0, ρ_0, $\operatorname{diam} D_0$, $v_0 = \inf\limits_{x \in D_0} v_1(x)$;

$$\widetilde{W}(\mathrm{x}, \xi) = \frac{4\tau_1(\mathrm{x}, \xi)}{\sigma_{-1}(\mathrm{x}, \xi)} \pi \lim_{t \to \tau_1(\mathrm{x}, \xi)+0} \frac{(H_1(\mathrm{x}, \xi, t) - H_1^*(\mathrm{x}, \xi, t))}{\sqrt{t^2 - \tau_1^2(\mathrm{x}, \xi)}};$$

$$\Phi(W) = \begin{vmatrix} W_{x_1}(\mathrm{x}, \xi) & W_{x_2}(\mathrm{x}, \xi) \\ F_{x_1}(\mathrm{x}) & F_{x_2}(\mathrm{x}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W_{\xi_1}(\mathrm{x}, \xi) & W_{\xi_2}(\mathrm{x}, \xi) \\ F_{\xi_1}(\xi) & F_{\xi_2}(\xi) \end{vmatrix};$$

$$\sigma_{-1}(\mathrm{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi v^3(\xi)} \left| \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} g(\mathrm{x}, \xi) \right|^{1/2}, \quad \mathrm{x} \in S, \quad \xi \in S,$$

$\left| \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} g(\mathrm{x}, \xi) \right| > 0$ *– якобиан перехода от римановых координат к декартовым* (*см.* [4, с. 124]).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 III 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.М.* – ДАН, 1964, т. 157, № 3, с. 520–521. 2. *Лаврентьев М.М.* – ДАН, 1965, т. 160, № 1, с. 32–35. 3. *Алексеев А.С.* В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967, с. 9–84. 4. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с. 5. *Мухометов Р.Г.* В кн.: Математические проблемы геофизики. Новосибирск, 1975, с. 243–252. 6. *Мухометов Р.Г.* – ДАН, 1977, т. 232, № 1, с. 32–35. 7. *Яхно В.Г.* В сб.: Математический анализ и дифференциальные уравнения. Новосибирск, 1987, с. 115–162. 8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с. 9. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.