

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. P. Kiselev, I. D. Tsvankin, On the comparison of numerical and asymptotic methods for computation of elastic wave fields, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1989, Volume 304, Number 1, 61–65

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 15, 2025, 20:36:28



А.П. КИСЕЛЕВ, И.Д. ЦВАНКИН

О СОПОСТАВЛЕНИИ ЧИСЛЕННЫХ  
И АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ УПРУГИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А.С. Алексеевым 22 IV 1987)

Представления о волновых полях, базирующиеся на асимптотических методах, прежде всего на лучевом методе [1], являются в сейсмике основой интерпретации экспериментальных и численных результатов. Привлекавшийся до сих пор для количественной интерпретации нулевой член лучевого метода наследует поляризационные и спектральные свойства однородных плоских волн и не объясняет поэтому ряда явлений, отчетливо проявляющихся при численном моделировании [2–5].

Одним из примеров может служить аномально поляризованная обменная волна  $PS$ , образующаяся при падении сферической  $P$ -волны на плоскую границу раздела. Эта волна, распространяющаяся со скоростью  $S$ -волн, поляризована на вертикали (т.е. на проходящей через источник нормали к границе) вдоль луча и близка по форме к интегралу от падающей  $P$ -волны. Амплитуда волны  $PS$  на вертикали при удалении источника от границы на расстояние, не превышающее половины длины волны, может составить до 50% от амплитуды волны  $PP$  [5].

В [3] высказана гипотеза о возможности описания аномальной волны  $PS$  с помощью высших приближений лучевого метода\*. Очевидный путь проверки этой гипотезы состоит в явном построении громоздких формул для лучевых поправок и сопоставлении их с точными расчетами.

Мы предлагаем методику лучевой интерпретации найденных в результате численных расчетов нестационарных упругих волновых полей, не опирающуюся на явные формулы для высших приближений. Методика излагается на примере аномальной волны  $PS$ .

Смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  однородной среды вне источников описываются уравнениями

$$(1) \quad c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - b^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $c$  и  $b$  — скорости  $P$  и  $S$ -волн.

Лучевой метод описания решений уравнения (1) предполагает задание луча, вдоль которого распространяется волна фиксированного типа, времени пробега и формы колебаний. Лучевое представление поля имеет вид

$$(2) \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}) f^{(0)}(t - \tau) + \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}) f^{(1)}(t - \tau) + \dots,$$

где  $\tau = \tau(\mathbf{r})$  — время пробега вдоль луча,  $f^{(0)}$  — заданная быстроосциллирующая функция,

$$(3) \quad f^{(1)}(s) = \int f^{(0)}(s') ds'.$$

Ряд (2) пригоден для описания поля, если последующие члены значительно меньше выписанных. В строгой формулировке лучевого метода [1] для быстроосциллирующих колебаний [6] соотношение (2) является асимптотическим раз-

\* В [5] предложена иная интерпретация свойств этой волны, в результате которой полю предписаны пути распространения, отличные от диктуемых геометрической сейсмикой.

ложением по степеням большого параметра  $p$  — безразмерной характерной частоты.  
В случае  $S$ -волны

$$(4) \quad \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}) \perp \nabla \tau(\mathbf{r}), \quad \nabla \tau(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r})/b,$$

где  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — единичный вектор, направленный по лучу; смещения в нулевом приближении касательны к фронту. Далее,

$$(5) \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)\perp} + \mathbf{u}^{(1)\parallel},$$

причем  $\mathbf{u}^{(1)\perp}(\mathbf{r}) \perp \mathbf{n}(\mathbf{r})$ , а  $\mathbf{u}^{(1)\parallel}(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{n}(\mathbf{r})$ . Выражения для  $\mathbf{u}^{(0)}$  и  $\mathbf{u}^{(1)\perp}$  нельзя получить в рамках лучевого метода без информации об источнике колебаний;  $\mathbf{u}^{(1)\perp}$ , вообще говоря, нельзя выразить через  $\mathbf{u}^{(0)}$  [1]. Вектор же  $\mathbf{u}^{(1)\parallel}$ , определяющий главную часть продольной составляющей  $S$ -волны, связан в однородной среде с нулевым членом простой формулой [7]

$$(6) \quad (\mathbf{u}^{(1)\parallel}(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r})) = b \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}).$$

Нулевой член лучевого ряда недостаточен даже для качественного описания  $S$ -волн вблизи лучей, на которых он обращается в нуль. Именно это и происходит на вертикали для волны  $PS$ .

Формулы (2)–(6) позволяют сформулировать следующее

**О п р е д е л е н и е.** Будем говорить, что поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  поперечной волны имеет в пространственно-временной области  $\Omega(\mathbf{r}, t)$  лучевой характер, если

1)  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  представимо в виде

$$(7) \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}) f^{(0)}(t - \tau) + \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}) f^{(1)}(t - \tau) + \epsilon(\mathbf{r}, t)$$

с заданной быстроосциллирующей функцией  $f^{(0)}$  и некоторыми векторами  $\mathbf{u}^{(0)}$  и  $\mathbf{u}^{(1)}$ , причем модуль  $\epsilon$  достаточно мал;

2) угол между вектором  $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r})$  и нормальной плоскостью к лучу в каждой точке  $\mathbf{r}$  достаточно мал;

3) соотношение (6) выполняется в  $\Omega$  с достаточной точностью.

Приближенное представление

$$(8) \quad \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(0)} f^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} f^{(1)}$$

для поля в  $\Omega$  будем называть двучленным лучевым представлением.

При явном выделении большого параметра [6] остаток  $\epsilon$  в (7) имеет порядок  $O(|\mathbf{u}^{(0)} f^{(0)}| p^{-1})$ .

В определение входят форма импульса  $f^{(0)}$ , направление луча и время пробега  $\tau$   $S$ -волны, а также критерии выполнения требований 1)–3).

Для найденного численными методами волнового поля  $f^{(0)}$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\tau$ , как правило, известны. В противном случае (характерном для экспериментальных данных) существует возможность определения их посредством стандартных процедур обработки.

Для нахождения амплитудных коэффициентов  $\mathbf{u}^{(0)}$  и  $\mathbf{u}^{(1)}$  последовательно умножим (7) на  $f^{(0)}(t - \tau)$  и  $f^{(1)}(t - \tau)$  и проинтегрируем по времени, предполагая, для определенности, что  $f^{(0)}(s)$  и  $f^{(1)}(s)$  вещественны и отличны от нуля при  $0 < s < T$ . Замечая, что вследствие (3)

$$\int_0^T f^{(0)}(s) f^{(1)}(s) ds \equiv 0,$$

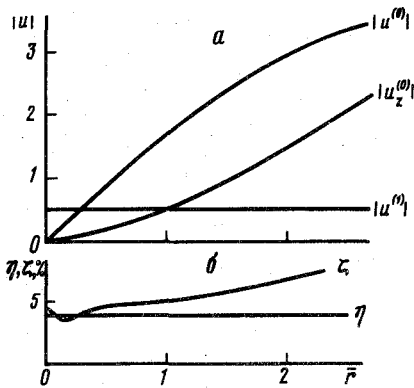


Рис. 1

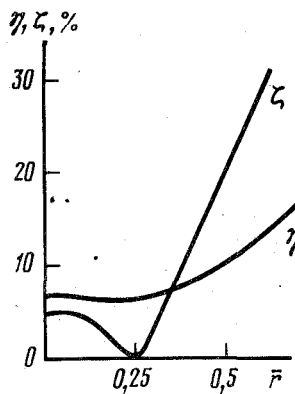


Рис. 3

$\bar{r}=0$

$\bar{r}=0,25$

$\bar{r}=0,5$

$\bar{r}=1$

$\bar{r}=2$

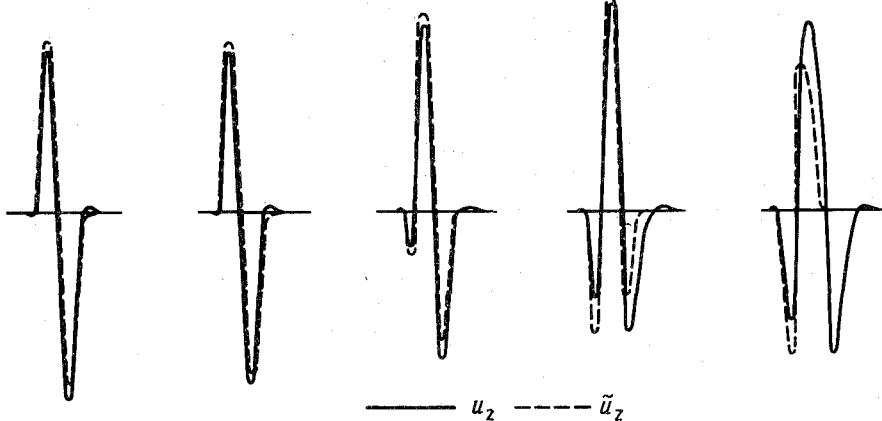


Рис. 2

Рис. 1. Коэффициенты лучевого ряда  $u^{(0,1)}$  (а) и кривые ошибок  $\eta, \zeta$  (б) при двучленном представлении проходящей  $PS$ -волны;  $\bar{h} = 0,25, \bar{d} = 3$ . Здесь и на рис. 2, 3 упругие параметры связаны соотношениями  $c_1/c_2 = 0,8; c_1/b_1 = c_2/b_2 = 1,73; \rho_2/\rho_1 = 1,25$ .

Рис. 2.  $z$ -Компонента поля ( $u_z$ ) и его двучленного представления ( $\tilde{u}_z$ ) для приемника, расположенного вблизи границы;  $\bar{h} = 0,25; \bar{d} = 0,25$

Рис. 3. Ошибки  $\eta$  и  $\zeta$  для модели рис. 2

и пренебрегая  $\epsilon$ , получим

$$(9) \quad u^{(\alpha)}(r) = \frac{\int_{\tau}^{\tau+T} u(r, t) f^{(\alpha)}(t - \tau) dt}{\int_0^T (f^{(\alpha)}(t))^2 dt}, \quad \alpha = 0, 1.$$

Таким образом, для заданного поля  $u(r, t)$  построение двучленного лучевого представления (7) при фиксированных  $f^{(0)}$  и  $\tau$  однозначно.

Рассмотрим вопрос о лучевом характере проходящей обменной волны  $PS$ . Пусть точечный центр расширения помещен на высоте  $z = h > 0$  над жесткой грани-

цей  $z = 0$  контакта упругих полупространств, характеризуемых скоростями  $c_1, b_1$  ( $z > 0$ ) и  $c_2, b_2$  ( $z < 0$ ) и плотностями  $\rho_1, \rho_2$ . Приемник поместим в нижнем полупространстве при  $z = -d < 0$ , расстояние между источником и приемником по горизонтали обозначим  $r$ .

Теоретические сейсмограммы нестационарного поля строились путем преобразования Фурье от численного решения стационарной задачи, представленного интегралом типа Зоммерфельда [4, 5]. Данная техника позволяет рассчитывать в отдельности практически любую волну, в том числе волну  $PS$ .

В качестве функции  $f^{(0)}$  естественно взять форму радиального смещения в дальней зоне для  $P$ -волны, которую возбуждал бы наш источник в однородном пространстве. При расчетах выбрано

$$(10) \quad f^{(0)}(t) = \begin{cases} \sin \frac{3\pi}{T} t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{3}, \quad \frac{2}{3} T \leq t \leq T; \\ 2 \sin \frac{3\pi}{T} t, & \frac{T}{3} < t < \frac{2}{3} T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases}$$

Время  $\tau$  прихода  $S$ -волны и направление луча выбраны в соответствии с геометрической сейсмикой.

Удобно ввести безразмерные переменные  $\bar{d} = d/\lambda$  и  $\bar{h} = h/\lambda$  и  $\bar{r} = r/\lambda$ , где  $\lambda$  — характерная длина волны сигнала (10).

В качестве критериев выполнения условий 1) и 2) взята малость нормированных величин

$$\eta(\mathbf{r}) = \frac{\int_{\tau}^{\tau+T} |\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}| dt}{\int_{\tau}^{\tau+T} |\mathbf{u}| dt}, \quad \zeta(\mathbf{r}) = \frac{|(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{n})|}{|\mathbf{u}^{(0)}|}.$$

Соотношение (6) проверялось численным дифференцированием.

Расчеты показали, что при  $\eta, \zeta < 10$ –15% соотношение (6) выполняется с более высокой точностью, чем условия 1), 2).

Рис. 1 доказывает лучевой характер проходящей волны  $PS$  даже при удалении источника от границы на  $\lambda/4$ . При этом вблизи вертикали волна  $PS$  формируется преимущественно за счет поправочного члена лучевого разложения. Если же и источник, и приемник близки к границе (рис. 2, 3), то, несмотря на некоторый рост  $\eta$  и  $\zeta$ , при  $\bar{r} < 1/4$  ошибка не превосходит 10%. Увеличение погрешностей при  $\bar{r} > 1/4$  связано с интерференцией волн  $PS$ , псевдосферической  $S^*$  и вытекающей поперечной  $PS^{(1)}$  [4, 8].

Предложенная методика лучевой интерпретации процесса распространения упругих колебаний легко переносится не только на объемные волны  $P$  и  $S$  в плавно-неоднородной среде, но и на поверхностные, а также на некоторые дифракционные явления (например, каустика, полутень и др.). Простота этой методики позволяет без большого труда дополнить ее практически любой алгоритм точного решения прямой задачи.

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта  
Академии наук СССР, Москва  
Научно-производственное объединение  
"Рудгеофизика", Ленинград

Поступило  
27 V 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 1961, вып. 5, с. 3–24. 2. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. – Изв. АН СССР. Физика Земли, 1976, № 12, с. 11–25. 3. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. – ДАН, 1982, т. 267, № 5, с. 1079–1083. 4. Цванкин И.Д., Калинин А.В., Пивоваров Б.Л. – Изв. АН СССР. Физика Земли, 1983, № 10, с. 32–45. 5. Цванкин И.Д., Калинин А.В. – Там же, 1984, № 2, с. 34–40. 6. Бабич В.М. – Там же, 1979, № 2, с. 3–11. 7. Киселев А.И. – Там же, 1983, № 9, с. 51–56. 8. Hron F., Mikhailenko B.G. – Bull. Seismol. Soc. Amer., 1981, vol. 71, № 4, p. 1011–1021.

УДК 550.38

ГЕОФИЗИКА

В.П. МЯСНИКОВ, Е.П. ТИМОШКИНА

**МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ  
НА ЭТАПЕ КОНВЕКТИВНОГО ОСТЫВАНИЯ**

(Представлено академиком Г.Г. Черным 25 IX 1987)

В общем случае эволюция внутреннего строения планет земной группы в зависимости от массы планеты, ее состава и характеристик начального состояния состоит из трех этапов: первоначального расслоения на оболочки с устойчивой стратификацией, конвективного остывания с локализацией конвективных движений в оболочках и заключительного этапа кондуктивного остывания.

Анализ геофизических и геологических данных показывает, что для Земли начальный этап расслоения завершился образованием тяжелого ядра к рубежу 2,9–3,0 млрд. лет назад и в настоящее время наша планета проходит этап конвективного остывания. Сопоставление геологических данных позволяет сделать вывод, что этот этап ее эволюции связан с высоконадкритической конвекцией в ядре и мантии [1]. Представляет интерес количественно оценить характерную длительность этого этапа эволюции и соответствующий масштаб изменения температуры и других характеристик в недрах Земли.

При развитой конвекции, следуя методике [2], уравнения эволюции сферически-симметричных составляющих геофизических полей для ядра и мантии можно представить в виде

$$\frac{dS_c}{d\tau} \int_0^{R_c} \rho_c T_c R^2 dR - R_c^2 \lambda_c \left( \frac{\partial T_c}{\partial R} \right)_{R=R_c} = 0;$$

$$(1) \quad \frac{dS_m}{d\tau} \int_{R_c}^{R_m} \rho_m T_m R^2 dR - R_m^2 \lambda_m \left( \frac{\partial T_m}{\partial R} \right)_{R=R_m} + R_c^2 \lambda_m \left( \frac{\partial T_m}{\partial R} \right)_{R=R_c} +$$

$$+ 2\kappa_m \alpha_m \rho_m \left[ R_m^2 (T_m - T_s) \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial R} \right)_{R=R_m} - R_c^2 (T_c - T_m) \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial R} \right)_{R=R_c} \right] = 0;$$