Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Yu. I. Gribanov, Operators connected with the projection method of solution of linear equations,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1966, Number 3, 45–50

https://www.mathnet.ru/eng/ivm2706

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.173
December 11, 2025, 22:19:38

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1966 МАТЕМАТИКА № 3 (52)

УДК 519.55

Ю. И. Грибанов

ОБ ОПЕРАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОЕКЦИОННЫМ МЕТОДОМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются взаимоотношения между классами линейных операторов, связанных с изложенным в [1] проекционным методом решения линейных уравнений в банаховом пространстве. Кроме того, в конце заметки приводится несколько простых фактов, позволяющих упростить изложение указанного проекционного метода.

1. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство и $\{X_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность его подпространств. Предполагается существование такой последовательности линейных операторов проектирования P_n пространства X на X_n, что $P_nP_m = P_{\min(n,m)}$ и $\|P_n\| \leqslant C < \infty$ для любого n. Положим $R_n = E - P_n$, где E — единичный оператор в X. Линейный оператор R_n проектирует пространство X на некоторое его подпространство Y_n. Из свойств операторов P_n следует, что $R_nR_m = R_{\max(n,m)}$ и $\|R_n\| \leqslant D \leqslant C + 1$. Очевидно также, что $P_nR_n = R_nP_n = 0$. В сопряженном к X пространстве X^* рассматриваются сопряженные соответственно с P_n и R_n линейные операторы P_n^* и R_n^*. Оператор P_n^* проектирует пространство X^* на некоторое его подпространство X_n^*. Очевидны следующие свойства операторов P_n^* и R_n^*: $P_n^*P_m^* = P_{\min(n,m)}^*$, $R_n^*R_m^* = R_{\max(n,m)}^*$, $\|P_n^*\| \leqslant C$ и $\|R_n^*\| \leqslant D$. Через $[X]$ обозначается замыкание в метрике пространства X линейного множества $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Аналогично, $[X^*]$ обозначает замыкание в метрике пространства X^* линейного множества $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*$.

Действующий в пространстве X линейный оператор A называется ω-, α-, β- или γ-непрерывным оператором, если соответственно последовательность линейных операторов $A_n = P_nAP_n$, P_nA, AP_n или $A_{nn} = P_nA + AP_n - A_n$ сходится по норме в пространстве операторов к оператору A. Соответствующие классы линейных операторов обозначаются через S_ω, S_α, S_β и, наконец, S_γ. Аналогичным образом определяются и ω-, α-, β- и γ-непрерывные операторы в пространстве X^*.

Отметим следующие, используемые в дальнейшем, очевидные соотношения:

$$A - A_n = P_nAR_n + R_nA, \tag{1}$$

$$A - P_nA = R_nA, \tag{2}$$

$$A - AP_n = AR_n, \tag{3}$$

$$A - A_{nn} = R_n A R_n. \tag{4}$$

Теорема 1. *Справедливы следующие включения:*

$$S_\omega = S_\alpha \cap S_\beta \quad \text{и} \quad S_\alpha,\ S_\beta \subseteq S_\gamma.$$

Доказательство. Из (1) и $\|P_n\| \leqslant C$ следует $\|A - A_n\| \leqslant \leqslant \|R_n A\| + C\|AR_n\|$. Следовательно, $S_\alpha \cap S_\beta \subseteq S_\omega$. Установим противоположное включение. Из (1), $R_n P_n = 0$, $R_n^2 = R_n$ и $\|R_n\| \leqslant D$ вытекает, что

$$\|R_n A\| \leqslant D\|A - A_n\|. \tag{5}$$

Поэтому $S_\omega \subseteq S_\alpha$. Аналогично неравенству (5) устанавливается неравенство $\|R_n^* A^*\| \leqslant D\|A^* - A_n^*\|$. Но $\|R_n^* A^*\| = \|AR_n\|$ и $\|A^* - A_n^*\| = = \|A - A_n\|$. Поэтому $\|AR_n\| \leqslant D\|A - A_n\|$. Отсюда сразу же следует, что $S_\omega \subseteq S_\beta$. Итак, класс операторов $S_\omega \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$. Это завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Для доказательства включения $S_\beta \subseteq S_\gamma$ перепишем соотношение (3) в виде $A - AP_n = P_n A R_n + R_n A R_n$. Отсюда, используя $R_n P_n = 0$, $R_n^2 = R_n$ и $\|R_n\| \leqslant D$ и принимая во внимание (4), получаем

$$\|A - A_{nn}\| \leqslant D\|A - AP_n\|. \tag{6}$$

Следовательно, $S_\beta \subseteq S_\gamma$. Далее, аналогично неравенству (6) устанавливается неравенство $\|A^* - A_{nn}^*\| \leqslant D\|A^* - A^* P_n^*\|$. Но $\|A^* - A_{nn}^*\| = = \|A - A_{nn}\|$ и $\|A^* - A^* P_n^*\| = \|A - P_n A\|$. Поэтому $\|A - A_{nn}\| \leqslant \leqslant D\|A - P_n A\|$. Отсюда следует включение $S_\alpha \subseteq S_\gamma$, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Для того чтобы A был ω-, α-, β- или γ- непрерывным оператором в X, необходимо и достаточно, чтобы A^* был соответственно ω-, β-, α- или γ- непрерывным оператором в X^*.*

Это утверждение немедленно следует из соотношений: $(A - A_n)^* = = A^* - A_n^*$, $(R_n A)^* = A^* R_n^*$, $(AR_n)^* = R_n^* A^*$ и $(A - A_{nn})^* = A^* - A_{nn}^*$.

Теорема 3. *Область значений любого α-непрерывного оператора расположена в $[X]$.*

В самом деле, $P_n A X \subseteq X_n$. Но для α-непрерывного оператора A последовательность операторов $P_n A$ сходится по норме в пространстве операторов к A. Поэтому в этом случае из $P_n A X \subseteq X_n$ следует $AX \subseteq [X]$.

2. Пусть V — класс линейных вполне непрерывных операторов в X. Будем рассматривать в X классы линейных ω-, α-, β- и γ-вполне непрерывных операторов:

$$V_\omega = V \cap S_\omega, \quad V_\alpha = V \cap S_\alpha, \quad V_\beta = V \cap S_\beta \text{ и } V_\gamma = V \cap S_\gamma.$$

Теорема 4. *Если все пространства X_n конечномерны, то*

$$V_\omega = S_\omega,\ V_\alpha = S_\alpha,\ V_\beta = S_\beta \ \text{и}\ V_\gamma = S_\gamma. \tag{7}$$

Обратно, если имеет место хотя бы одно из соотношений (7), *то все пространства X_n конечномерны.*

Доказательство. Пусть A — линейный оператор в X. Так как все X_n конечномерны, то оператор $P_n A$, непрерывно отображающий X в конечномерное пространство X_n, вполне непрерывен. Из конечномерности X_n следует конечномерность X_n^*. Поэтому оператор $P_n^* A^*$ из X в X_n^*, а следовательно, и оператор AP_n, действующий в X, вполне непрерывен. Оператор A_{nn} вполне непрерывен как сумма вполне непрерывных операторов. Итак, операторы A_n, $P_n A$,

AP_n и A_{nn} вполне непрерывны в X. Поэтому, если A есть ω-, α-, β- или γ-непрерывный оператор, то, на основании одной теоремы С. Банаха об аппроксимации линейного оператора вполне непрерывными операторами ([2], стр. 83), оператор A вполне непрерывен. Для доказательства второй части теоремы предположим, что некоторое пространство X_m бесконечномерно. Тогда найдется действующий в X_m линейный оператор A, не являющийся вполне непрерывным оператором. Очевидно, оператор $P_mAP_m \in S_\omega$, а следовательно, и каждому из классов S_α, S_β и S_γ. Итак, в этом случае ни одно из соотношений (7) не имеет места.

Лемма 1. *Для того чтобы $x \in [X]$, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} \|R_nx\| = 0$.

Доказательство. Если последнее предельное соотношение выполнено, то $R_nx = x - P_nx \to 0$ по норме. Так как $P_nx \in X_n$ то $x \in [X]$. Пусть теперь $x \in [X]$. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ можно указать такое пространство X_m с принадлежащим ему элементом u, что $\|x - u\| < \frac{\varepsilon}{D}$. При $n \geqslant m$ $R_nu = 0$. Поэтому при $n \geqslant m$

$$\|R_nx\| = \|R_nx - R_nu\| \leqslant D\|x - u\| < \varepsilon.$$

Последнее в силу произвольности $\varepsilon > 0$ эквивалентно предельному соотношению, подлежащему доказательству.

Лемма 2. $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|R_nx\| \geqslant d(x, [X]) = \inf\limits_{u\in[X]} \|x - u\|$.

При любом элементе $x \in X$ элемент $P_nx \in X_n \subset [X]$. Поэтому $\|R_nx\| = \|x - P_nx\| \geqslant d(x, [X])$. Отсюда сразу же следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Для того чтобы множество $M \subset [X]$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы при любом n было компактно множество P_nM и* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in M} \|R_nx\| = 0$.

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна, ибо из сходимости в X любой последовательности элементов $\{x_m\}$ вытекает сходимость при любом фиксированном n последовательности элементов $\{P_nx_m\}$. Далее, для компактного множества $M \subset [X]$ при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset [X]$. При любом $n \geqslant N(\varepsilon)$ $\|R_ny_k\| < \varepsilon$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$. Для каждого $x \in M$ можно указать такой элемент y_k, что $\|x - y_k\| < \varepsilon$. Поэтому для любого $x \in M$ $\|R_nx\| \leqslant \|R_nx - R_ny_k\| + \|R_ny_k\| < (1 + D)\varepsilon$ при любом $n \geqslant N(\varepsilon)$. Таким образом, второе условие также необходимо.

Достаточность. Согласно второму условию по заданному $\varepsilon > 0$ можно фиксировать число n так, что $\|R_nx\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для каждого $x \in M$. Для компактного множества P_nM существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset X_n$. Эта $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для P_nM является ε-сетью для M. Действительно, для любого $x \in M$ найдется y_k такой, что $\|P_nx - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $\|x - y_k\| \leqslant \|P_nx - y_k\| + \|R_nx\| < \varepsilon$. Итак, при любом $\varepsilon > 0$ для множества M существует конечная ε-сеть. Следовательно, множество M компактно.

Лемма 4. *Для того чтобы линейный вполне непрерывный оператор $A \in V_\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы область значений оператора A была расположена в $[X]$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3 и определения класса V_α. Пусть теперь линейный оператор A вполне непрерывно отображает X в $[X]$. Тогда множество $AL \subset [X]$, где $L = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, компактно в X. Поэтому по предыдущей лемме

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|R_n A x\| = \lim_{n\to\infty} \|R_n A\| = 0.$$

Последнее вместе с полной непрерывностью оператора A означает, что оператор $A \in V_\alpha$.

Следствие 1. Класс операторов $V_\alpha = V$ тогда и только тогда, когда $X = [X]$.

Действительно, при $X \neq [X]$ найдется элемент $0 \neq u \in X \setminus [X]$. Фиксируем любой элемент $0 \neq x^* \in X^*$. Очевидно, оператор $A = ux^*(\cdot) \in V$. Однако этот оператор $A \overline{\in} V_\alpha$, так как

$$\varliminf_{n\to\infty} \|R_n A\| = \|x^*\| \varliminf_{n\to\infty} \|R_n u\| \geqslant \|x^*\| d(u, [X]) > 0.$$

Следствие 2. Класс операторов $V_\beta = V$ тогда и только тогда, когда $X^* = [X^*]$.

В самом деле, согласно предыдущему следствию, класс σ-вполне непрерывных операторов в X^* совпадает с классом вполне непрерывных операторов лишь тогда, когда $X^* = [X^*]$. Отсюда, на основании теоремы 2 и определения класса операторов V_β, заключаем, что следствие 2 справедливо.

Основным результатом пункта два является

Теорема 5. *Если пространство $X = [X]$ и пространство $X^* = [X^*]$, то $V_\omega = V_\alpha = V_\beta = V_\gamma = V$. Если пространство $X = [X]$, а пространство $X^* \neq [X^*]$, то $V_\omega = V_\beta \subset V_\alpha = V_\gamma = V$. Если пространство $X \neq [X]$, а пространство $X^* = [X^*]$, то $V_\omega = V_\alpha \subset V_\beta = V_\gamma = V$. Если пространство $X \neq [X]$ и пространство $X^* \neq [X^*]$, то*

$$V_\omega \subset V_\alpha; \quad V_\omega \subset V_\beta; \quad V_\alpha \neq V_\beta; \quad V_\alpha,\ V_\beta \subset V_\gamma \subset V.$$

Доказательство. Первое, второе и третье утверждения теоремы непосредственно следуют из леммы 4, следствий из нее и теоремы 1. Для оправдания четвертого утверждения теоремы, на основании предыдущих результатов, следует только показать, что $V_\alpha \neq V_\beta$ и что все утверждаемые теоремой включения действительно строгие. При любых фиксированных элементах $0 \neq u \in X$ и $0 \neq x^* \in X^*$ рассмотрим отличный от нулевого оператор

$$A = ux^*(\cdot) \in V. \tag{8}$$

Пусть в (8) элемент $u \in [X]$ и элемент $x^* \in X^* \setminus [X^*]$. В силу (1) норма $\|(A - A_n)x\| \geqslant \big|\|P_n u\| |x^*(R_n x)| - \|R_n u\| |x^*(x)|\big|$. Отсюда $\varliminf_{n\to\infty} \|A - A_n\| \geqslant \|u\| d(x^*, [X^*]) > 0$. Следовательно, оператор $A \overline{\in} V_\omega$. Однако $A \in V_\alpha$, так как область значений этого вполне непрерывного опера-

тора расположена в $[X]$. Принимая теперь во внимание теорему 1, заключаем, что $V_\omega \subset V_\alpha$. Пусть теперь в (8) элемент $u \in X \setminus [X]$ и элемент $x^* \in [X^*]$. Тогда оператор $A^* \in V_\alpha(X^*)$ и, следовательно, оператор $A \in V_\beta$. Однако оператор $A \overline{\in} V_\omega$, так как $\varliminf_{n\to\infty} \|A - A_n\| \geqslant \|x^*\| d(u, [X]) > 0$. Таким образом, $V_\omega \subset V_\beta$. Из теоремы 1 на основании уже доказанного сразу же следует, что $V_\alpha \neq V_\beta$. Рассмотрим теперь оператор $B = ux^*(\cdot) + vy^*(\cdot)$, где отличные от нулевых элементы $u \in X_1$, $v \in X \setminus [X]$, $x^* \in X^* \setminus [X^*]$ и $y^* \in X_1^*$. Так как $R_n B R_n = 0$ при $n \geqslant 1$, то этот вполне непрерывный оператор $B \in V_\gamma$. Однако этот оператор $B \overline{\in} V_\alpha$, поскольку $\varliminf_{n\to\infty} \|R_n B\| \geqslant \|y^*\| d(v, [X]) > 0$, и $B \overline{\in} V_\beta$, поскольку $\varliminf_{n\to\infty} \|BR_n\| \geqslant \|u\| d(x^*, [X^*]) > 0$. Итак, мы показали, что V_α, $V_\beta \subset V_\gamma$. Пусть, наконец, в (8) элемент $u \in X \setminus [X]$ и элемент $x^* \in X^* \setminus [X^*]$. Тогда оператор $A \overline{\in} V_\gamma$, ибо $\lim_{n\to\infty} \|R_n A R_n\| \geqslant d(x, [X]) d(x^*, [X^*]) > 0$. Теорема полностью доказана.

Последняя теорема завершает исследование взаимоотношений между рассматриваемыми классами линейных операторов.

3. Укажем несколько фактов, упрощающих изложение развитого в [1] проекционного метода решения линейных уравнений в банаховых пространствах.

Лемма 5. *Если существует линейный обратный оператор U^{-1} и $\|U^{-1}\| \|U - V\| < 1$, то существует линейный обратный оператор V^{-1}, причем*

$$\|V^{-1}\| \leqslant \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U^{-1}\| \|U - V\|}$$

и

$$\|V^{-1} - U^{-1}\| \leqslant \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U^{-1}\| \|U - V\|}.$$

Сформулированное утверждение хорошо известно (сравните, например, [3], стр. 159). Оно легко вытекает из теоремы Банаха о том, что при $\|A\| < 1$ существует линейный обратный оператор $(E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Отметим важные следствия, непосредственно вытекающие из этого утверждения.

Следствие 1. Если существует линейный обратный оператор U^{-1} и $\lim_{n\to\infty} \|U - U_n\| = 0$, то, начиная с такого $n = N$, для которого $\|U^{-1}\| \|U - U_n\| < 1$ при любом $n \geqslant N$, существуют линейные обратные операторы U_n^{-1}, причем $\lim_{n\to\infty} \|U^{-1} - U_n^{-1}\| = 0$.

Следствие 2. Если $\lim_{n\to\infty} \|U - U_n\| = 0$ и существуют линейные обратные операторы U_n^{-1}, то для существования линейного обратного оператора U^{-1} необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \|U_n^{-1}\| < \infty$.

Следствие 3. Если $\lim_{n\to\infty} \|U - U_n\| = 0$, то для существования линейного обратного оператора U^{-1} необходимо и достаточно, чтобы хотя бы при одном n существовал линейный обратный оператор U_n^{-1} и $\|U_n^{-1}\| \|U - U_n\| < 1$.

Для теории проекционного метода представляет интерес следующая

Лемма 6. *Если существует один из линейных обратных операторов* $(E-A_n)^{-1}$, $(E-P_nA)^{-1}$ *или* $(E-AP_n)^{-1}$, *то существуют и два других. При этом*

$$(E-A_n)^{-1}=(E-P_nA)^{-1}P_n+R_n=P_n(E-AP_n)^{-1}+R_n,$$

$$(E-P_nA)^{-1}=(E-A_n)^{-1}P_n(AR_n+E)+R_n$$

и

$$(E-AP_n)^{-1}=(E+R_nA)\,(E-A_n)^{-1}P_n+R_n.$$

Это утверждение доказывается непосредственной, почти очевидной проверкой, занимающей, однако, много места.

Теорема 6. *Если A является α- или β-непрерывным оператором, то для существования линейного обратного оператора* $(E-A)^{-1}$ *необходимо и достаточно, чтобы при всех достаточно больших* $n\geqslant N$ *существовали линейные обратные операторы* $(E-A_n)^{-1}$ *и*

$$\sup_{n\geqslant N}\|(E-A_n)^{-1}\|<\infty.$$

Эта теорема непосредственно следует из приведенных выше результатов.

Последняя теорема позволяет значительно упростить изложение проекционного метода: доказанные в [1] результаты о α- и β-непрерывных уравнениях оказываются очевидными следствиями основных теорем проекционного метода.

4. В заключение отметим одно интересное приложение проекционного метода. В ряде случаев для численного решения линейного интегрального уравнения вида $u(x)=\int\limits_0^\infty K(x,y)\,u(y)\,dy+f(x)$ важно знать, можно ли это уравнение с достаточной степенью точности заменить уравнением на конечном интервале $u(x)=\int\limits_0^a K(x,y)\,u(y)\,dy+f(x)$. Изложенный в [1] проекционный метод решения линейных уравнений применим к поставленной задаче. Точная постановка приведенной выше задачи и ее решение будут изложены в отдельной работе.

г. Казань

Поступило
14 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Грибанов. О проекционном методе решения линейных уравнений в банаховых пространствах. Изв. вузов, Матем., № 1 (44), стр. 48—55, 1965.

2. С. Банах. Курс функціонального аналізу. „Радянська школа", Київ, 1948.

3. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.