ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

В. Ф. Гапошкин

УДК 517.52

О НУЛЯХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В ряде работ, посвященных свойствам тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, исследовались свойства суммы ряда

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,\ a_1>0,\ a_k\downarrow 0. \tag{1}$$

Так Фейер [1] показал, что не существует интервала $(0, \delta)$, на котором $f(x)\leqslant 0$. Усиливая этот результат, Сас [2] доказал, что $\exists\delta>0$: $f(x)\geqslant 0$, $x\in(0,\delta)$, а Карамата и Томич [3] получили оценку: $\exists\delta, p>0$: $f(x)\geqslant px$, $x\in(0,\delta)$.

Другие условия сохранения знака $f(x)$ на $(0,\delta)$ (или на всем отрезке $(0,\pi)$ при добавочных предположениях об a_k) рассматривались в [4], [1], [5].[1)]

В связи с этими результатами П. Л. Ульянов на семинаре по теории функций в МГУ в 1979 г. поставил следующие задачи:

1) может ли множество нулей функции $f(x)$—суммы ряда (1) с монотонными коэффициентами—иметь мощность континуума?

2) может ли это множество иметь положительную меру?

3) вообще, для некоторой конкретной системы функций $(f_k)_1^\infty$, заданной на множестве A, указать необходимые и достаточные условия на множество $E\subset A$, чтобы это множество было множеством нулей некоторой функции $f(x)$, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$, $a_k>0$, $a_k\downarrow 0$. П. Л. Ульянов установил, что для системы Хаара множество нулей $E\subset[0, 1]$ для $f(x)$ не может иметь положительной меры, хотя и может иметь мощность континуума[2)]. В данной заметке для тригонометрических рядов дается решение первой из сформулированных выше задач.

Теорема 1. *Существует ряд* (1) *такой, что функция* $f(x)$ *имеет на отрезке* $[0,\pi]$ *континуум нулей.*

Аналогичное утверждение справедливо и для рядов по косинусам.

Теорема 2. *Существует ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx=g(x)$, $a_1>0$, $a_k\downarrow 0$, *такой, что функция* $g(x)$ *имеет на отрезке* $[0,\pi]$ *континуум нулей.*

Доказательства этих утверждений существенно опираются на одно свойство лакунарных рядов—при определенных предположениях сумма лакунарного степенного ряда есть „кривая Пеано". Так как нам потребуются соответствующие количественные оценки для синус-рядов и косинус-рядов, сформулируем подробно этот результат, принадлежащий Р. Салему и А. Зигмунду (см. [6]).

Теорема. *Пусть* $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos n_k x$, $\sum_1^{\infty}|c_k|<\infty$, *где* $1\leqslant n_1<n_2<\ldots$ — *целые числа и* $n_{k+1}/n_k\geqslant\lambda>1$ $(k=1,2,\ldots)$. *Пусть для некоторого* $p\geqslant 1$ *выполнены условия*

$$\lambda|c_1|+\lambda^2|c_2|+\ldots+\lambda^n|c_n|\leqslant c\lambda^n(|c_{n+1}|+|c_{n+2}|+\ldots)\ n=p,\ p+1,\ldots \tag{2}$$

Относительно чисел c *и* λ *предполагается, что*

$$\lambda(\lambda-1)-2\pi\sqrt{2}(5\lambda-1)>0 \tag{3}$$

1) См. также обзорную статью И. Н. Пака [7].

2) Это утверждение приводится здесь с любезного согласия П. Л. Ульянова.

и

$$0 < c < [\lambda(\lambda-1) - 2\pi\sqrt{2}(5\lambda-1)]/[\lambda(\lambda-1) + 2\pi\sqrt{2}(5\lambda-1)] < 1. \tag{4}$$

Пусть далее $\eta > 0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$2\pi/\lambda < \eta < ((1-c)/(1+c)) \cdot (1/\sqrt{2})((\lambda-1)/(5\lambda-1)) \tag{5}$$

и

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2}/2 - \eta(5\lambda-1)/(\lambda-1). \tag{6}$$

Если интервал $(a, b) \subset (0, 2\pi)$ *таков, что* $2\eta/n_p \leqslant b - a < 2\eta/n_{p-1}$ *(для того же* p*, что в условиях* (2)*),* $x_0 = (a+b)/2$*, то любое значение* v *из интервала*

$$\left(\sum_{k=1}^{p} c_k \cos n_k x_0 - \varepsilon_0 \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_k|,\ \sum_{k=1}^{p} c_k \cos n_k x_0 + \varepsilon_0 \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_k|\right)$$

функция $g(x)$ *принимает на множестве* $K_v \subset (a, b)$ *мощности континуума.*

Аналогичное утверждение справедливо для функции $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin n_k x$ при тех же предположениях о c_k, n_k.

Доказательство теоремы 1. Искомый ряд (1) получим, взяв $a_k = \sum_{s=m}^{\infty} s^{-\alpha} = b_m$ при $10^{3(m-1)} \leqslant k < 10^{3m}$, $m \geqslant 1$, где $\alpha = 1,001$. Покажем, что его сумма $f(x)$ имеет континуум нулей. Очевидно, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \Delta_m(x),$$

где

$$\Delta_m(x) = \sum_{k=10^{3(m-1)}}^{10^{3m}-1} \sin kx = \frac{\cos\left(10^{3m} - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(10^{3(m-1)} - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Преобразование Абеля приводит к выражению

$$f(x)\, 2\sin\frac{x}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha} \cos\left(10^{3m} - \frac{1}{2}\right)x + c_1 \cos\frac{x}{2}, \quad c_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} = -b_1. \tag{7}$$

Обозначим $x = 2y$, $n_m = 2\cdot 10^{3(m-1)} - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $c_m = (m-1)^{-\alpha}$ $(m = 2, 3, \ldots)$. Равенство (7) переписывается в виде

$$f(2y)\, 2\sin y = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos n_m y = g(y) \quad \left(0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{8}$$

Так как $\sin y$ при $0 < y < \pi/2$ в нуль не обращается, то к функции $g(y)$ и к значению $v = 0$ нужно применить теорему Салема—Зигмунда. В силу выбора чисел n_m $n_{m+1}/n_m = (2\cdot 10^{3m} - 1)/(2\cdot 10^{3(m-1)} - 1) > 10^3$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Положим $\lambda = 10^3$, $c = 0,9$, $\eta = 7\cdot 10^{-3}$. Тогда выполнены условия (3), (4), (5) и из (6) следует, что $\varepsilon_0 > 0,5$. Далее, условия (2) при $n \geqslant 2$ (т. е. для $p = 2$) имеют вид

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^{k+1} k^{-\alpha} \leqslant 0,9\lambda^n \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

и эти соотношения при $\lambda = 10^3$, $\alpha = 1,001$ легко проверяются. Применим теорему Салема—Зигмунда к интервалу $a < y < b$, $a = \pi/2 - 3\eta/n_2$, $b = \pi/2 - \eta/n_2$,

$b-a=2\eta/n_2$, $y_0=\pi/2-2\eta/n_2$; $\eta=7\cdot 10^{-3}$. Функция $g(y)$ принимает любое значение v из интервала

$$(c_1\cos n_1 y_0+c_2\cos n_2 y_0)\pm\varepsilon_0\sum_{k=3}^{\infty}|c_k| \tag{9}$$

в континууме точек $K_v\subset(a,\ b)$. Так как $n_1=1$, n_2—нечетное число, то

$$|c_1\cos n_1 y_0+c_2\cos n_2 y_0|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}\left|\sin\frac{2\eta}{n_2}\right|+|\sin 2\eta|<0{,}03,$$

а $\varepsilon_0\sum\limits_{k=3}^{\infty}|c_k|>10$. Значит, интервал (9) содержит нуль и функция $g(y)$ обращается в нуль на множестве точек $K_0\subset(a,\ b)$ мощности континуума. Из тождества (8) следует, что теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается теорема 2. Благодаря формуле

$$\sum_{k=10^{3(m-1)}}^{10^{3m}-1}\cos kx=\frac{\sin\left(10^{3m}-\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(10^{3(m-1)}-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

имеем

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sum_{k=10^{3(m-1)}}^{10^{3m}-1}\cos kx=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-\alpha}\sin\left(10^{3m}-\frac{1}{2}\right)x+c_1\sin\frac{x}{2},$$

и доказательство завершается так же, как и раньше, с использованием теоремы Салема—Зигмунда для лакунарных рядов по синусам (интервал $(a,\ b)$ на этот раз выбирается близко от 0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fejer L. Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.—Trans. Amer. Math. Soc., 1936, v. 39, p. 18—59.

2. Szàsz O. On uniform convergence of Fourier series.—Bull. Amer. Math. Soc., 1944, v. 50, № 12, p. 856—867.

3. Karamata J., Tomič M. Sur les séries trigonométrique monotone.—Publ. Inst. Math. Belgrade, 1948, t. 2, p. 157—175.

4. Пак И. Н. О корнях и интервалах постоянства сумм некоторых тригонометрических рядов.—Матем., сб., 1966, т. 71 (113): 3, с. 83—95.

5. Askey R., Steinig J. A monotonic trigonometric sum.—Trans. Amer. Math. Soc., 1974, v. 187, № 1, p. 295—308.

6. Salem R., Zygmund A. Lacunary power series and Peano curves.—Duke Math J., 1945, v. 12, № 4, p. 569—578.

7. Пак И. Н. О суммах тригонометрических рядов.—УМН, 1980, т. XXXV, вып. 2, с. 91—144.

г. Москва

Поступила
27 II 1980