Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Максимов, Нетеровость общей краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения, *Дифференц. уравнения*, 1974, том 10, номер 12, 2288–2291

https://www.mathnet.ru/de2348

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
16 декабря 2025 г., 15:32:39

ДЕКАБРЬ 1974 г., ТОМ X, № 12

УДК 517.948.3

НЕТЕРОВОСТЬ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В. П. МАКСИМОВ

Продолжая исследование работ [1—7] о линейном функционально-дифференциальном уравнении, мы доказываем здесь нетеровость, вычисляем индекс оператора $\mathcal{L}_l$, соответствующего общей краевой задаче, и находим представление сопряженного оператора $\mathcal{L}_l^*$. Упомянутое уравнение содержит как частные случаи разрешенные относительно производной обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с отклоняющимся аргументом и интегро-дифференциальные уравнения, а также уравнения, приводимые к таковым (см. по этому поводу [1, 7]). В общей постановке краевые задачи для таких уравнений (вопросы нормальной разрешимости и построения сопряженных задач) рассматривались ранее в работах [8—12]. Мы используем идею подхода к указанным вопросам, предложенную Векслером [9].

Обозначим через R_n линейное пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $\|\cdot\|$, A_n — линейное пространство квадратных матриц порядка n, L—пространство суммируемых на отрезке $[a, b]$ функций $y:[a\ b]\to R_n$ с нормой $\|y\|_L=\int\limits_a^b \|y(t)\|\,dt$, C — пространство непрерывных функций $y:[a, b]\to R_n$ с нормой $\|y\|_C=\max\limits_{t\in[a,b]}\|y(t)\|$ и D—пространство абсолютно непрерывных функций $y:[a, b]\to R_n$ с нормой $\|y\|_D=\|y\|_C+\|\dot y\|_L$.

Уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t)\equiv\dot x(t)-\int\limits_a^b d_sR(t, s)\,x(s)=f(t),\quad t\in[a, b], \tag{1}$$

рассматривается в следующих предположениях.

R) Функция $R(t, s):[a, b]\times[a, b]\to A_n$ при каждом фиксированном s суммируема по t, $R(\cdot, a)=0$, $n\times n$-матрица $\rho(t)$, элементами которой являются полные вариации на промежутке $[a, b]$ соответствующих элементов матрицы $R(t, \cdot)$, суммируема.

Под решением уравнения (1) понимаем функцию из D, удовлетворяющую (1) почти всюду на $[a, b]$.

В сделанных предположениях оператор T:

$$(Tx)(t)=\int\limits_a^b d_sR(t, s)\,x(s) \tag{2}$$

действует из пространства C в пространство L и U-ограничен [13]. В [14] показано, что всякий линейный U-ограниченный оператор $T:C\to L$ имеет представление (2).

п. **1. Полная непрерывность оператора** $T:D\to L$

Лемма 1. *Пусть функция $M(t, s):[a, b]\times[a, b]\to R_1$ при каждом фиксированном t имеет ограниченное изменение по s, при каждом фиксированном s суммируема по t и $|M(t, s)|\leqslant\mu(t)$ $\forall s\in[a, b]$, где μ — суммируемая на $[a, b]$ функция. Тогда $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$:*

$$\forall s\in[a, b]\ (|\eta|<\delta)\Rightarrow\left(\int\limits_a^b |M(t, s)-M(t+\eta, s)|\,dt<\varepsilon\right)$$

(вне квадрата $[a, b]\times[a, b]$ функция M полагается равной нулю).

С помощью леммы 1 доказывается

Лемма 2. *Пусть функция* $R:[a, b]\times[a, b]\to A_n$ *удовлетворяет условиям* R). *Тогда оператор* K, *определяемый равенством*

$$(Kz)(t)=\int_a^b R(t, s)\, z(s)\, ds,$$

действует в пространстве L *и вполне непрерывен.*

Доказательство этой леммы использует критерий Рисса компактности множества в L. При этом возникает необходимость изменения порядка интегрирования в повторном интеграле от функций $R(t, s)\, z(s)$, которая не является, вообще говоря, измеримой по совокупности переменных. Возможность перемены порядка интегрирования в этом случае следует из теоремы п. 69 книги [15].

Теорема 1. *Оператор* $T:D\to L$, *определенный равенством (2), вполне непрерывен.*

Доказательство. Для $x\in D$ имеем $Tx=R(\cdot, b)\, x(b)-K\dot{x}$. Утверждение теоремы следует теперь из полной непрерывности оператора K (лемма 2), ограниченности оператора дифференцирования как оператора из D в L и полной непрерывности оператора $x\in D\to R(\cdot, b)\, x(b)\in L$.

Отметим, что теорема 1 решает обсуждавшийся в [5] вопрос о полной непрерывности оператора TG, где G—ограниченный оператор из L в D. Таким образом, некоторые доказательства из [5] можно упростить.

п. **2. Краевая задача**. Пусть $\{l_i:D\to R_1,\ i=1, \ldots, m\}$—линейно независимая система линейных ограниченных функционалов. Через l обозначим вектор-функционал $l=\mathrm{col}\,(l_1, \ldots, l_m)$. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}x=f,\quad lx=\alpha,\quad \alpha\in R_m. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\mathcal{L}_l:x\in D\to\begin{pmatrix}\mathcal{L}x\\ lx\end{pmatrix}\in L\times R_m.$$

В прямое произведение $L\times R_m$ введем норму: для $(f, \alpha)\in L\times R_m$ ($f\in L$, $\alpha\in R_m$) $\|(f, \alpha)\|=\max(\|f\|_L, \|\alpha\|)$. Оператор $\mathcal{L}_l$ ограничен. Запишем эквивалентное задаче (3) уравнение

$$\mathcal{L}_l x=\begin{pmatrix}f\\ \alpha\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Определим операторы $B:D\to L$, $B_l:D\to L\times R_m$ и $T_0:D\to L\times R_m$ равенствами

$$(Bx)(t)=\dot{x}(t),\quad B_l x=\begin{pmatrix}Bx\\ lx\end{pmatrix},\quad T_0 x=\begin{pmatrix}Tx\\ 0\end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях уравнение (4) принимает вид

$$B_l x-T_0 x=\begin{pmatrix}f\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

В силу полной непрерывности оператора T_0 из теоремы 16.4 книги [16] и результатов работы [9] вытекает

Теорема 2. *Уравнение (4) нетерово. Индекс оператора* $\mathcal{L}_l$ *равен* $n-m$.

п. **3. Сопряженная задача**. Для вектор-функционала $l:D\to R_m$ имеем [17]:

$$\forall x\in D\quad lx=P\cdot x(a)+\int_a^b Q(s)\,\dot{x}(s)\, ds, \tag{5}$$

где P—постоянная $m\times n$-матрица, а элементы $m\times n$-матрицы Q измеримы и ограничены в существенном. Сопряженное к D пространство D^* изометрично произведению $L^*\times R_n^*$ (считаем, что норма в нем согласована с введенной выше нормой в $L\times R_n$).

Сопряженное к (4) уравнение мы сможем записать в явном виде, если найдем представление оператора $\mathcal{L}_l^*$. Линейный непрерывный оператор $\mathcal{L}_l^*:L^*\times R_m^*\to D^*$ определяется, как известно, равенством

$$\langle x, \mathcal{L}_l^*(y, \beta)\rangle_D=\langle \mathcal{L}_l x, (y, \beta)\rangle_{L\times R_m},\quad x\in D,\ (y, \beta)\in L^*\times R_m^*$$

(через $\langle x, y\rangle_X$ мы обозначаем значение функционала $y\in X^*$ на элементе $x\in X$). Имеем ([13], стр. 48)

$$\langle \mathcal{L}_l x, (y, \beta)\rangle_{L\times R_m}=\langle \mathcal{L}x, y\rangle_L+\beta(lx).$$

Поэтому

$$\langle x, \mathcal{L}_l^* (y, \beta) \rangle_D - \langle Bx, y \rangle_L - \langle Tx, y \rangle_L + \beta (lx) = \langle x, B^*y - T^*y + l^*\beta \rangle_D.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}_l^* (y, \beta) = B^*y - T^*y + l^*\beta.$$

Оператор $B^* : L^* \to D^*$ определяется равенством

$$\langle x, B^*y \rangle_D = \langle Bx, y \rangle_L, \quad y \in L^*.$$

Далее,

$$\langle Bx, y \rangle_L = \int_a^b y(s) \dot{x}(s)\, ds = 0 \cdot x(a) + \int_a^b y(s) \dot{x}(s)\, ds.$$

Таким образом,

$$B^* = \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix},$$

где J — тождественный оператор в L^*. Оператор $T^* : L^* \to D^*$ определяется равенством

$$\langle x, T^*y \rangle_D = \langle Tx, y \rangle_L = \int_a^b y(t) \int_a^b d_s R(t, s)\, x(s)\, dt.$$

Применяя интегрирование по частям к внутреннему интегралу, получаем

$$\int_a^b y(t) R(t, b)\, dt \cdot x(b) - \int_a^b y(t) \int_a^b R(t, s) \dot{x}(s)\, ds dt.$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим

$$\int_a^b y(t) R(t, b)\, dt \cdot x(b) - \int_a^b \left\{ \int_a^b y(t) R(t, s)\, dt \right\} \dot{x}(s)\, ds,$$

откуда с учетом равенства $x(b) = x(a) + \int_a^b \dot{x}(s)\, ds$ приходим к равенству

$$\langle x, T^*y \rangle_D = \int_a^b y(t) R(t, b)\, dt \cdot x(a) + \int_a^b \left\{ \int_a^b y(t) [R(t, b) - R(t, s)]\, dt \right\} \dot{x}(s)\, ds.$$

Таким образом,

$$(T^*y)(t) = \begin{pmatrix} \int_a^b y(s) [R(s, b) - R(s, t)]\, ds \\ \int_a^b y(s) R(s, b)\, ds \end{pmatrix}.$$

Наконец,

$$(l^*\beta)(t) = \begin{pmatrix} \beta \cdot Q(t) \\ \beta \cdot P \end{pmatrix},$$

и $\mathcal{L}_l^*$ имеет вид

$$[\mathcal{L}_l^* (y, \beta)](t) = \begin{pmatrix} y(t) + \beta Q(t) - \int_a^b y(s) [R(s, b) - R(s, t)]\, ds \\ \beta \cdot P - \int_a^b y(s) R(s, b)\, ds \end{pmatrix},$$

где матрицы P и Q определяются вектор-функционалом (5).

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Задача (3) разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_a^b y(s)\, f(s)\, ds + \beta \cdot \alpha = 0$$

для любого решения (y, β) *однородной сопряженной задачи* $\mathcal{L}_l^*(y, \beta) = 0$.

Литература

1. Рахматуллина Л. Ф. Дифференц. уравнения, **8**, № 3, 1972.
2. Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Дифференц. уравнения, **9**, № 6, 1973.
3. Максимов В. П. Труды Московск. ин-та химического машиностроения, вып. 48, 1973, стр. 6—7.
4. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Сулавко Т. С. Труды Московск. ин-та химического машиностроения, вып. 48, 1973, стр. 67—69.
5. Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Дифференц. уравнения, **9**, № 12, 1973.
6. Максимов В. П. Труды Московск. ин-та химического машиностроения, вып. 10, 1974, стр. 10.
7. Азбелев Н. В. Дифференц. уравнения, **10**, № 4, 1974.
8. Ландо Ю. К. Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1968.
9. Wexler D. Ann. di Mat. pura ed appl., v. 80, 1968, 123—134.
10. Пархимович И. В. Изв. АН БССР, серия физ.-мат. наук, № 3, 1972, стр. 91—93.
11. Tvrdy M., Vievoda O. Čas. pěst. mat., 98, № 1, 1973, 26—42.
12. Исламов Г. Г. Дифференц. уравнения, **10**, № 3, 1974.
13. Крейн С. Г. и др. Функциональный анализ. М., «Наука», 1972.
14. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.—Л., Физматгиз, 1950.
15. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 5. М., Физматгиз, 1959.
16. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1971.
17. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.

Поступила в редакцию
20 марта 1974 г.

Тамбовский институт
химического машиностроения