М. Ш. Бирман, Дискретный спектр периодического оператора Шредингера возмущенного убывающим потенциалом,
Алгебра и анализ, 1996, том 8, выпуск 1, 3–20

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 1

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ВОЗМУЩЕННОГО УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

© М. Ш. Бирман

Обзор. Рассматривается дискретный спектр, возникающий в спектральных лакунах эллиптического периодического оператора второго порядка при возмущении убывающим потенциалом. Возмущение считается знакоопределенным. Ищется асимптотика по большой константе связи числа уровней, прошедших через заданную точку спектральной лакуны (возможно, крайнюю). Выделяются высокоэнергетические (вейлевские), пороговые и нелокальные по энергии асимптотики. Рассматривается эффект периодического множителя, введенного в правильно убывающее возмущение. Предварительно обсуждаются аналогичные вопросы об отрицательном спектре оператора Шредингера с убывающим потенциалом.

Оглавление

Введение

Пусть A — эллиптический периодический оператор второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 2$, и пусть V — оператор умножения на функцию $V(x) \geqslant 0$, стремящуюся (в подходящем смысле) к нулю при $|x| \to \infty$. Пусть (λ_-, λ_+) — лакуна в спектре A и λ — фиксированное число, $\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+$. Для оператора

$$A_\pm(\alpha) = A \mp \alpha V, \quad \alpha > 0,$$

[1]Текст доклада, прочитанного в сентябре 1993 г. на конференции „Асимптотические методы спектральной теории“, Институт Эйлера, С.-Петербург.

Ключевые слова: оператор Шредингера, периодический потенциал, возмущения, лакуны, дискретный спектр.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 93-01-01697.

через $N_\pm(\alpha,\lambda)$ обозначается число собственных значений оператора $A_\pm(t)$, прошедших через точку λ при росте константы связи t от 0 до α.

Цель доклада — дать обзор результатов об асимптотике $N_\pm(\alpha,\lambda)$ при $\alpha\to\infty$. Известным способом вопрос сводится к изучению асимптотики спектра некоторого компактного оператора. В конечном счете приходится рассматривать спектр ΨDO отрицательного порядка с довольно простым, но „сингулярным" символом. В простом по постановке вопросе мы сталкиваемся со значительным разнообразием в характере асимптотик. Ответ сильно зависит от знака возмущения и скорости его убывания. Существенно также различие между $\lambda\in(\lambda_-,\lambda_+)$ и более трудным случаем $\lambda=\lambda_\pm$. В некоторых случаях асимптотики имеют вейлевский (высокоэнергетический) характер и отвечают стандартному порядку $\alpha^{d/2}$. Иногда ответ существенно зависит от спектральных свойств оператора A вблизи края лакуны $\lambda_\pm$ („пороговые" асимптотики). Наконец, встречаются случаи, когда вейлевский характер асимптотики проявляется после замены ролей координат и (квази)импульсов. Такие асимптотики нелокальны по энергии, а их порядок может отличаться от стандартного.

Мы рассматриваем здесь лишь степенные по α асимптотики, хотя более общие случаи не приводят к новым принципиальным трудностям (ср., например, [BS3], где речь идет об асимптотике числа отрицательных уровней оператора $(-\Delta)^l-\alpha V$).

Исходными для обсуждаемого круга вопросов явились работы [H1, ADH], а также некоторые работы автора, в которых удалось рассмотреть случай $\lambda=\lambda_\pm$. Более подробные литературные указания приведены в §3. В обзоре не нашли отражения результаты о знакопеременных возмущениях. По этому поводу укажем работы [H2, Le2], где для функций $N_\pm(\alpha,\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$, получены оценки, но не асимптотики. Наконец, отметим статью [AADH] и доклад [B5], где обсуждается асимптотика функции $N_-(\alpha,\lambda)$ для опоератора $A+\alpha B$, где B — самосопряженный эллиптический оператор второго порядка с убывающими коэффициентами.

В обзоре три параграфа. В §1 собран предварительный материал. В §2 дается краткий обзор результатов об асимптотике функции $N_+(\alpha,\lambda)$ для оператора $-\Delta-\alpha V$. Знакомство с этим параграфом должно облегчить чтение §3, где излагается основной материал обзора.

В тексте встречаются символы, помеченные парой индексов „$\pm$". Соответствующие утверждения при каждом из знаков следует читать независимо.

Ниже интеграл без обозначения пределов распространен по всему $\mathbb{R}^d$; $\mathbb{I}$ — единичная $(d\times d)$-матрица; $\mathbb{Q}^d$ — единичный куб в $\mathbb{R}^d$; $\mathbb{T}^d$ — плоский d-мерный тор; $\omega_d=\operatorname{vol}\{x\in\mathbb{R}^d:|x|<1\}$; через $\hat u$ обозначается преобразование Фурье функции u; через $H^1(\mathbb{R}^d)$ — класс Соболева первого порядка.

§1. Предварительные сведения

1.1. Пусть $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства; пусть $Q : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_\infty$, т.е. Q — компактный оператор. Через $s_k(Q)$ обозначим последовательные (с учетом кратностей) сингулярные числа оператора Q, т.е. собственные значения оператора $(Q^*Q)^{1/2}$; через $n(\cdot, Q)$ — функцию распределения чисел s_k:

$$n(s, Q) = \#\{k \in \mathbb{N} : s_k(Q) > s\}, \quad s > 0.$$

Далее, пусть $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty$ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, $\lambda_k^{(+)}(T)$ — его последовательные положительные собственные значения, $\lambda_k^{(-)}(T) := \lambda_k^{(+)}(-T)$. Положим

$$n_\pm(s, T) = \#\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k^{(\pm)}(T) > s\}, \quad s > 0.$$

Очевидно, $n(s,T) = n_+(s,T) + n_-(s,T)$ и $n_+(s,T) = n(s,T)$ при $T > 0$. Отметим еще, что

$$n(s, Q^*Q) = n(\sqrt{s}, Q) = n(\sqrt{s}, Q^*) = n(s, QQ^*). \tag{1.1}$$

1.2. Для самосопряженного в $\mathfrak{H}$ оператора A через $\sigma(A)$ обозначается спектр, через $\rho(A)$ — резольвентное множество, через $\operatorname{Dom} A$ — область определения. Предполагается, что A полуограничен снизу. Через $a[\cdot,\cdot]$ обозначается соответствующая замкнутая полуограниченная полуторалинейная форма с областью определения $\operatorname{Dom} a$. Без ограничения общности считаем, что $\inf \sigma(A) = 0$. Отметим, что $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} A^{1/2}$.

Пусть теперь $W : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ — замыкаемый оператор, $\operatorname{Dom} W \supset \operatorname{Dom} a$. Предположим, что

$$W(A + \gamma^2 I)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}), \quad \gamma > 0. \tag{1.2}$$

(Если (1.2) выполнено при каком-либо $\gamma > 0$, то оно выполнено при всех $\gamma > 0$). Рассмотрим форму[2]

$$v[u_1, u_2] = (Wu_1, Wu_2). \tag{1.3}$$

Условие (1.2) означает, что форма (1.3) компактна в гильбертовом пространстве с метрической формой $a[u,u] + \gamma^2\|u\|^2$. При условии (1.2) форма

$$a_\pm(\alpha) = a \mp \alpha v, \quad \alpha > 0, \tag{1.4}$$

полуограничена снизу и замкнута на $\operatorname{Dom} a$ при любом $\alpha > 0$. Соответствующий форме (1.4) самосопряженный в $\mathfrak{H}$ оператор обозначим через $A_\pm(\alpha)$. Таким образом, *в смысле форм-суммы*

$$A_\pm(\alpha) = A \mp \alpha V, \quad V = W^*W, \ \alpha > 0. \tag{1.5}$$

[2]Через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ обозначается скалярное произведение и норма как в $\mathfrak{G}$, так и в $\mathfrak{H}$. Это не ведет к недоразумениям.

1.3. Предполагается, что в спектре A есть лакуна $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+) \subset \rho(A)$. Будем считать, что $\lambda_\pm \in \sigma(A)$; лишь при $\lambda_+ = 0$, т.е. для полубесконечной лакуны, полагаем $\lambda_- = -\infty$. При условии (1.2) спектр $A_\pm(\alpha)$ в Λ дискретен при всех $\alpha > 0$ и может накапливаться разве лишь к точке $\lambda_\pm$. С ростом α собственные значения $A_+(\alpha)$ двигаются влево, а $A_-(\alpha)$ — вправо.

Фиксируем „точку наблюдения" $\lambda \in \Lambda$. Через $N_\pm(\alpha, \lambda)$ обозначим *число собственных значений оператора $A_\pm(t)$, прошедших через точку λ при росте t от нуля до $t = \alpha$*. Вблизи точки $\lambda_\mp$ функция $N_\pm(\alpha, \lambda)$ постоянна по λ. Это постоянное значение по определению примем за $N_\pm(\alpha, \lambda_\mp)$. Если общее число собственных значений оператора $A_\pm(\alpha)$ в Λ конечно, то подобным же образом вводится величина $N_\pm(\alpha, \lambda_\pm)$. Следовательно, при любой комбинации знаков,

$$N_\varepsilon(\alpha, \lambda_\tau) := \lim_{\lambda \to \lambda_\tau} N_\varepsilon(\alpha, \lambda), \quad \varepsilon = \pm, \ \tau = \pm.$$

Пусть теперь $\lambda = -\gamma^2$, $\gamma \geqslant 0$. Тогда $N_-(\alpha, -\gamma^2) = 0$, а $N_+(\alpha, -\gamma^2)$ есть *число собственных значений оператора $A_+(\alpha)$, лежащих левее $\lambda = -\gamma^2$*. В частности, $N_+(\alpha, 0)$ есть полное число отрицательных собственных значений оператора $A_+(\alpha)$.

При условии (1.2) выполнено

$$T(\lambda) := W(A = \lambda I)^{-1} W^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{G}), \quad \lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}.$$

Оператор $T(\lambda)$ самосопряжен в $\mathfrak{G}$. Будем пользоваться известным соотношением

$$N_\pm(\alpha, \lambda) = n_\pm(s, T(\lambda)), \quad \alpha s = 1, \ \lambda = \bar{\lambda} \in \Lambda. \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) переносится на значение $\lambda = \lambda_\pm$, если существует предел по операторной норме в $\mathfrak{G}$

$$T(\lambda_\pm) := \operatorname*{u\text{-}lim}_{\lambda \to \lambda_\pm} T(\lambda).$$

При $\lambda = -\gamma^2$, $\gamma > 0$, оператор $T(\lambda)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= Q(\gamma) Q^*(\gamma), \\ Q(\gamma) &:= W(A + \gamma^2 I)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В силу (1.1), (1.6)

$$N_+(\alpha, -\gamma^2) = n(\sqrt{s}, Q(\gamma)), \quad s\alpha = 1. \tag{1.8}$$

Если при $\gamma \to 0$ существует предел

$$Q(0) := \operatorname*{u\text{-}lim}_{\gamma \to 0} Q(\gamma),$$

то (1.8) переносится на значение $\gamma = 0$.

1.4. Периодические операторы. Ниже $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 2$. Пусть g — вещественная $(d \times d)$-матрица-функция, p — вещественная функция,

$$p, g \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad g(x) \geqslant c_0 \mathbb{1}, \ c_0 > 0,$$
$$g(x+n) = g(x), \ p(x+n) = p(x), \quad n \in \mathbb{Z}^d, \ d \geqslant 2.$$

Невозмущенный оператор

$$A = -\operatorname{div} g \operatorname{grad} + p = \nabla^* g \nabla + p \tag{1.9}$$

вводится через соответствующую квадратичную форму

$$a[u,u] = \int (|\sqrt{g}\nabla u|^2 + p|u|^2)dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.10}$$

За счет добавления к p постоянной будем считать $\inf \sigma(A) = 0$. Оператор A — *периодический*, с решеткой $\mathbb{Z}^d$. Случай общей решетки сводится к случаю $\mathbb{Z}^d$ за счет изменения матрицы g. В частности, *периодический оператор Шредингера* сводится к оператору (1.9) с *постоянной* матрицей g.

Спектр оператора A — зонный и может содержать лакуны. Пусть $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ — одна из таких лакун. Не исключается, что $\Lambda = (-\infty, 0)$.

В дальнейшем V — оператор умножения на функцию $V(x) \geqslant 0$, такую, что выполнено условие (1.2) при $W = V^{1/2}$. Оператор $A_\pm(\alpha)$ вида (1.5) определяется через форму (1.4), где a — форма (1.10), v — форма (1.3) при $W = V^{1/2}$. Формально оператор $A_\pm(\alpha)$ определяется выражением

$$A_\pm(\alpha) = \nabla^* g \nabla + p \mp \alpha V. \tag{1.11}$$

Наша основная цель — изучение для оператора $A_\pm(\alpha)$ асимптотики функции $N_\pm(\alpha, \lambda)$ при $\alpha \to \infty$ и фиксированной *точке наблюдения* λ, $\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+$.

1.5. Введем теперь стандартные объекты, связанные со спектральным разложением периодического оператора A. В $L_2(\mathbb{Q}^d)$ рассмотрим семейство самосопряженных операторов A_ξ, $\xi \in \mathbb{T}^d$, определяемых дифференциальным выражением $\nabla^* g \nabla + p$ и (ξ)-квазипериодическим граничным условием

$$u(x)\exp(-ix\xi) = u(x+n)\exp(-i(x+n)\xi), \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Спектр A_ξ неотрицателен и дискретен. Обозначим через

$$E_1(\xi) \leqslant \cdots \leqslant E_{r-1}(\xi) \leqslant E_r(\xi) \leqslant \dots$$

его последовательные собственные значения, и через $\psi_l(\xi, x)$ — соответствующие (нормированные в $L_2(\mathbb{Q}^d)$) собственные функции. Спектр $\sigma(A)$ состоит из последовательности отрезков (*зон*) — образов непрерывных отображений $E_l\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$. При достаточно больших значениях энергии зоны заведомо перекрываются. Однако $\sigma(A)$ может содержать лакуны. Мы считаем, что $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ — одна из таких лакун, причем

$$\lambda_- = \max_\xi E_{r-1}(\xi), \qquad \lambda_+ = \min_\xi E_r(\xi). \tag{1.12}$$

При $\Lambda = (-\infty, 0)$ в (1.12) $r = 1$, $\lambda_+ = 0$, $\lambda_- = -\infty$.

Определение 1.1. *Край лакуны* λ_+ *называется правильным, если* i) $E_{r+1}(\xi) > \lambda_+$, $\xi \in \mathbb{T}^d$. ii) *Минимум в* (1.12) *достигается лишь в конечном числе точек* $\xi_j^{(+)}$, $j = 1, \ldots, M_+$, *причем*

$$E_r(\xi) - \lambda_+ = h_j^{(+)}(\xi - \xi_j^{(+)}) + o(|\xi - \xi_j^{(+)}|^2), \quad j = 1, \ldots, M_+, \tag{1.13}$$

и все квадратичные формы $h_j^{(+)}$ *— положительно определенные.*

Вполне аналогично и в аналогичных обозначениях дается определение того, что точка λ_- является *правильным краем* лакуны Λ.

Замечание 1.2. Точка $\lambda = \inf \sigma(A)$ всегда является правильным краем полубесконечной лакуны. При этом $M_+ = 1$ и $\xi^{(+)} = 0$.

В дальнейшем нам иногда придется предполагать край лакуны правильным. В некоторых случаях асимптотика явно зависит от форм $h_j^{(+)}$ из (1.13) или от форм $h_j^{(-)}$,

$$\lambda_- - E_{r-1}(\xi) = h_j^{(-)}(\xi - \xi_j^{(-)}) + o(|\xi - \xi_j^{(-)}|^2), \quad j = 1, \ldots, M_-. \tag{1.14}$$

§2. Оператор Шредингера с убывающим потенциалом

2.1. Многие типичные эффекты обнаруживаются уже при рассмотрении полубесконечной лакуны для оператора

$$A = \nabla^* g \nabla, \quad g = \mathrm{const}, \tag{2.1}$$

при *постоянной* положительной матрице g. Оператору (2.1) соответствует возмущенный оператор

$$\nabla^* g \nabla - \alpha V_0(y), \quad \alpha > 0. \tag{2.2}$$

Замена координат $y = g^{1/2}x$ приводит оператор (2.2) к виду

$$A_+(\alpha) = -\Delta - \alpha V(x), \quad \alpha > 0, \tag{2.3}$$

$$V(x) = V_0(g^{1/2}x). \tag{2.4}$$

Именно об операторе (2.3) будет идти речь в §2. Нам предстоит обсуждать асимптотику функции $N_+(\alpha, -\gamma^2)$, $\gamma \geqslant 0$, при $\alpha \to \infty$. Оператор (1.7) для (2.3) есть интегральный оператор (ΨДО)

$$(Q(\gamma)u)(x) = (2\pi)^{-d/2} W(x) \int \frac{e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)}{\sqrt{|\xi|^2 + \gamma^2}} d\xi, \tag{2.5}$$

где $W = V^{1/2}$. Соотношение (1.8) позволяет использовать оператор (2.5) при изучении $N_+(\alpha, -\gamma^2)$. При $d \geqslant 3$ у оператора (2.5) есть предел по операторной норме при $\gamma \to 0$. Случай $d \geqslant 3$ является основным для дальнейшего.

В этом параграфе в обозначении $N_+(\alpha, -\gamma^2)$ индекс „+“ опускается.

2.2. Наиболее просто обстоит дело, если

$$V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d), \quad d \geqslant 3. \tag{2.6}$$

По терминологии [BS3] условие (2.6) выделяет *регулярные* возмущения.

Предложение 2.1. *При условии* (2.6) *для оператора* (2.3) *выполнены соотношения*

$$N(\alpha, -\gamma^2) \leqslant C(d)\alpha^{d/2} \int V^{d/2}\, dx, \qquad \gamma \geqslant 0,\ d \geqslant 3, \tag{2.7}$$

$$N(\alpha, -\gamma^2) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} (2\pi)^{-d}\omega_d \alpha^{d/2} \int V^{d/2}\, dx, \quad \gamma \geqslant 0,\ d \geqslant 3. \tag{2.8}$$

Оценка (2.7) есть хорошо известная оценка Розенблюма–Либа–Цвикеля. Асимптотика (2.8) имеет вейлевский характер. Справедливо следующее обращение предложения 2.1.

Предложение 2.2. *Если* $V \in L_{1,\mathrm{loc}}$ *и при каком-либо* $\gamma \geqslant 0$

$$N(\alpha, -\gamma^2) = O(\alpha^{d/2}),$$

то выполнено (2.6), *а тогда и* (2.7), (2.8).

Замечание 2.3. **a.** Асимптотика (2.8) не зависит от $\gamma \geqslant 0$. **b.** Оператор (2.5) при условии (2.6) следует рассматривать как ΨДО порядка (-1). Для таких ΨДО известна [BS2] спектральная асимптотика вейлевского типа. Отсюда с помощью

(1.8) можно прийти к (2.8), хотя этот путь — не самый короткий. **c.** Соотношение (1.8) позволяет трактовать асимптотику (2.8) как *высокоэнергетическую* в следующем смысле. Асимптотика при $s \to 0$ функции $n(s, Q(\gamma))$ не изменится, если в (2.5) исключить из области интегрирования любой шар $\{|\xi| < R\}$. **d.** От условия $V(x) \geqslant 0$ можно отказаться. Тогда в (2.8) надо заменить V на $V_+(x) = \max\{V(x), 0\}$. Предложение 2.2 для знакопеременных V теряет силу.

2.3. Обсудим теперь случай регулярных возмущений при $d = 2$. Покроем $\mathbb{R}^2$ решеткой единичных квадратов $Q_n = \mathbb{Q}^2 + n$, $n \in \mathbb{Z}^2$. Будем писать

$$V \in l_1(\mathbb{Z}^2; L_r(\mathbb{Q}^2)), \quad r > 1, \tag{2.9}$$

если суммируема последовательность $L_r(Q_n)$-норм функции V. Ясно, что из (2.9) следует, что $V \in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Предложение 2.4. a. *Пусть* $d = 2$ *и выполнено* (2.9). *Тогда для оператора* (2.3) *при* $\gamma > 0$ *справедлива асимптотика*

$$N(\alpha, -\gamma^2) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{4\pi} \int V dx. \tag{2.10}$$

b. *Если дополнительно*

$$\int (1 + \log(1 + |x|))V(x)dx < \infty, \tag{2.11}$$

то асимптотика (2.10) *справедлива и при* $\gamma = 0$.

Замечание 2.5. a. Условие (2.9) можно ослабить, но его нельзя свести к требованию $V \in L_1$. Этим случай $d = 2$ отличается от случая $d \geqslant 3$. **b.** Условие (2.11) не является необходимым, но не может быть просто отброшено. Для любого $q > 1$ найдется потенциал V, удовлетворяющий (2.9), для которого $N(\alpha, 0) \sim c\alpha^q$. Существуют также потенциалы, для которых

$$N(\alpha, 0) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} c\alpha, \quad c > \frac{1}{4\pi} \int V dx.$$

Таким образом, при $d = 2$ невозможен аналог предложения 2.2.

2.4. Рассмотрим теперь некоторые случаи „нерегулярных“ возмущений, когда (2.6) не выполнено. Здесь надо разделить значения $\gamma = 0$ и $\gamma > 0$. Начнем со второго случая. Предположим, что

$$V \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \tag{2.12}$$

$$V(x) \underset{|x|\to\infty}{\sim} F(\theta)|x|^{-2\sigma}, \quad \sigma > 0,\ d \geqslant 2,\ \theta = x/|x|,\ F(\theta) \geqslant 0. \tag{2.13}$$

Предложение 2.6. *Пусть выполнены условия* (2.12), (2.13) *и пусть* $\sigma < 1$, $\gamma > 0$, $q = d/2\sigma$. *Тогда для оператора* (2.3)

$$\left.\begin{aligned} N(\alpha, -\gamma^2) &\underset{\alpha\to\infty}{\sim} C\alpha^q\gamma^{d-2q} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} F^q dS(\theta), \\ C &= (2\pi)^{-d}\omega_d \int\limits_0^1 (t^{-2\sigma}-1)^{d/2} t^{d-1}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Замечание 2.7. **a.** Асимптотика (2.14) явно зависит от γ. **b.** Соответствующий ΨДО (2.5) теперь следует рассматривать как оператор порядка $(-\sigma)$. При этом роли переменных x и ξ меняются: порядок однородности определяется асимптотикой символа по x, а интегрирование в (2.5) охватывает все значения $\xi \in \mathbb{R}^d$. С учетом перемены ролей x и ξ асимптотика (2.14) имеет вейлевский характер. **c.** Условие асимптотической однородности (2.13) можно заменить более общим условием *анизотропной однородности* (см. [BS2]). Применение соответствующего результата о спектральной асимптотике из [BS2] позволяет обобщить (2.14). **d.** Можно отказаться от условия $F(\theta) \geqslant 0$. Тогда в (2.14) надо заменить F на F_+.

Характер асимптотики меняется, если в (2.13) $\sigma = 1$. Приведем результат при $d \geqslant 3$.

Предложение 2.8. *Пусть* $d \geqslant 3$, $\gamma > 0$. *Пусть выполнено* (2.12) *и* (2.13) *при* $\sigma = 1$. *Тогда для оператора* (2.3)

$$N(\alpha, -\gamma^2) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} (2\pi)^{-d}\frac{\omega_d}{2}\alpha^{d/2}\log\alpha \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} F^{d/2} dS(\theta). \tag{2.15}$$

Замечание 2.9. **a.** Асимптотика (2.15) не зависит явно от γ, но она неравномерна по γ. **b.** Для незнакоопределенного F в (2.15) следует заменить F на F_+.

2.5. В случае $\gamma = 0$ функция $N(\alpha, 0)$ более чувствительна к асимптотике потенциала. Степенные порядки для $N(\alpha, 0)$ зависят от поведения потенциала в логарифмической шкале. Предположим, что

$$V(x) \underset{|x|\to\infty}{\sim} F(\theta)|x|^{-2}(\log|x|)^{-1/q}, \quad d \geqslant 3, \ \theta = x/|x|, \ F(\theta) \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Предложение 2.10. *Пусть выполнены условия* (2.12) *и* (2.16) *при* $2q > d$. *Тогда для оператора* (2.3) *справедлива асимптотика*

$$N(\alpha, 0) \underset{\alpha \to \infty}{\sim} C(q, F)\alpha^q. \tag{2.17}$$

Замечание 2.11. Коэффициент в (2.17), вычисляется следующим образом. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ оператор $-\Delta_\theta - t^{-1/q}F(\theta)$, где Δ_θ — оператор Лапласа на сфере. Пусть $\mu_l(t)$ — его последовательные собственные числа. Тогда

$$C(q, F) = \frac{1}{\pi}\sum_l \int_0^\infty \left(- \mu_l(t) - \left(\frac{d-2}{2}\right)^2\right)_+^{1/2} dt. \tag{2.18}$$

Замечание 2.12. **a.** Асимптотика (2.17) имеет не вейлевский характер, что видно уже из выражения (2.18). **b.** Асимптотика (2.17), (2.18) имеет *пороговое* происхождение по энергии. Это означает, что асимптотика $n(s, Q(0))$ не изменится, если в интеграле (2.5) (при $\gamma = 0$) свести интегрирование к сколь угодно малой сфере $\{|\xi| < \varepsilon\}$. **c.** Сопоставление с (2.15) показывает, что в условиях предложения 2.10 $N(\alpha, -\gamma^2) = o(\alpha^{d/2} \log \alpha)$ при $\gamma > 0$. **d.** При $2q < d$ потенциал с асимптотикой (2.16) удовлетворяет „условию регулярности“ (2.6). Можно показать, что если в (2.16) $2q = d$, то выполнено $N(\alpha, 0) \sim c\alpha^{d/2} \log \alpha$.

Определенный интерес представляет следующее:

Предложение 2.13. *Пусть функция f удовлетворяет условиям*

$$f \in L_\infty, \qquad f(x) \geqslant 0, \qquad f(x+n) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.19}$$

Пусть выполнено (2.12) *и* (2.16) *при* $2q > d$ *и при замене F на fF. Тогда справедлива асимптотика вида* (2.17) *с коэффициентом* $C(q, f_0F)$, *где* $f_0 = \int_{\mathbb{Q}^d} f(x)dx$.

2.6. Заключительные замечания.

Замечание 2.14. Пусть потенциалы V, V_0 связаны соотношением (2.4). Пересчет в (2.8) приводит для оператора (2.2) к асимптотике

$$N(\alpha, -\gamma^2) \sim (2\pi)^{-d}\omega_d\alpha^{d/2}(\det g)^{-1/2} \int V_0^{d/2} dy, \quad \gamma \geqslant 0, \ d \geqslant 3.$$

Несложен пересчет и в асимптотиках (2.14), (2.15), (2.17). Действительно, асимптотики (2.13) и (2.16) равносильны таким же асимптотикам для V_0, но с пересчитанной функцией F.

Замечание 2.15. Условие (2.12) означает, что нарушение (2.6) возможно лишь за счет поведения V в бесконечности. При нарушении (2.6) за счет локальных особенностей V различие между $\gamma > 0$ и $\gamma = 0$ исчезает.

Замечание 2.16. При $d = 2$ аналогом (2.16) является асимптотика

$$V(x) \underset{|x|\to\infty}{\sim} F(\theta)|x|^{-2}(\log|x|)^{-2}(\log\log|x|)^{-1/q}, \quad q > 1. \tag{2.20}$$

В этом случае $N_+(\alpha, 0) \sim c(q, F)\alpha^q$, но коэффициент существенно отличается от (2.18).

2.7. Литературные указания. Оценка (2.7) независимо получена в работах [R, Lb, C] (см. также [RS]). Методы этих трех работ существенно различны и каждый из них получил дальнейшие применения. Асимптотика вида (2.8) была впервые установлена в [B1] для задачи Дирихле в ограниченной области. В [BS1] был предложен общий прием „замыкания асимптотики". Этот прием автоматически приводит к асимптотикам вейлевского типа, коль скоро получены оценки для $N(\alpha, -\gamma^2)$ через какую-либо *сепарабельную* норму (или квазинорму) потенциала V. Для задач в $\mathbb{R}^d$ для этой цели использовались оценки через „решетчатые" нормы (ср. с (2.9)). После открытия оценки (2.7) справедливость (2.8) при единственном условии (2.6) автоматически получалась „замыканием асимптотики". Предложение 2.2 установлено в [R].

Предложение 2.4a заимствовано из статьи [BB]. Условие (2.9) недавно ослаблено в [S] за счет перехода от L_r-норм на кубах решетки к нормам типа Орлича. Предложение 2.4b установлено автором (не публиковалось). В [S] асимптотика (2.10) при $\gamma = 0$ установлена при несколько иной комбинации условий. Ситуация, описанная в замечаниях 2.5b, 2.16 подробно исследована в работе [BL].

Содержание п. 2.4 заимствовано из статьи [BS3].

Асимптотика (2.17) получена в [BS3] при $F(\theta) = 1$. Общая формула (2.17), (2.18) получена в [L]. Предложение 2.13 принадлежит автору (не публиковалось).

По поводу локальных особенностей потенциала V (замечание 2.15) см. [BW].

§3. Возмущения периодического оператора второго порядка

Переходим к обсуждению асимптотики функции $N_\pm(\alpha, \lambda)$ при $\alpha \to \infty$ для возмущенного периодического оператора (1.11).

3.1. Как и в §2, начнем со случая регулярного возмущения.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* (2.6)*. Тогда для оператора* $(1.11)_+$ *справедлива асимптотика*

$$N_+(\alpha,\lambda) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} (2\pi)^{-d}\omega_d\alpha^{d/2}\int\frac{V^{d/2}}{\sqrt{\det g}}dx, \quad \lambda\in\Lambda,\ d\geqslant 3. \tag{3.1}$$

Теорема 3.2. *Пусть* $d=2$ *и выполнено условие* (2.9)*. Тогда для оператора* $(1.11)_+$ *справедлива асимптотика*

$$N_+(\alpha,\lambda) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{V}{\sqrt{\det g}}dx, \quad \lambda\in\Lambda. \tag{3.2}$$

Приведенные утверждения близки к предложениям 2.1 (при $\gamma>0$) и 2.4.a. Теперь рассмотрим значения $\lambda=\lambda_\pm$, для которых нужны дополнительные предположения.

Теорема 3.3. *Пусть в условиях теоремы* 3.1 *край лакуны* $\lambda_\pm$ *— правильный. Тогда асимптотика* (3.1) *переносится на значение* $\lambda=\lambda_\pm$.

Теорема 3.4. *Пусть в условиях теоремы* 3.2 *край лакуны* $\lambda_\pm$ *— правильный и дополнительно выполнено* (2.11)*. Тогда асимптотика* (3.2) *переносится на значение* $\lambda=\lambda_\pm$.

Две последние теоремы аналогичны предложениям 2.1 (при $\gamma=0$) и 2.4.b.

Замечание 3.5. В соответствии с замечанием 1.2 значение $\lambda=0$ всегда является правильным краем.

Замечание 3.6. Теоремы 3.1, 3.2 фактически не требуют периодичности оператора (1.6). Они справедливы при значительно более широких предположениях, главное из которых — наличие лакуны в $\sigma(A)$. Для оператора Шредингера и $V(x)=O(|x|^{-\sigma})$, $|x|\to\infty$, $\sigma>2$, асимптотики вида (3.1), (3.2) были установлены в [H1]. Более общие результаты, содержащие, в частности, теоремы 3.1, 3.2 в полном объеме, получены в [B2]. Методы работ [H1, B2] различны. Отметим еще работу [BR], где роль оператора A играет магнитный оператор Шредингера.

Замечание 3.7. В условиях теорем 3.3, 3.4 периодичность оператора A существенна. Существенно также условие регулярности края лакуны, хотя оно может быть несколько ослаблено. Формы $h_j^{(+)}$ из (1.13) явно в асимптотику $N_+(\alpha,\lambda_+)$ не входят; аналогично формы $h_j^{(-)}$ не входят в асимптотику $N_+(\alpha,\lambda_-)$. Теоремы 3.3, 3.4 получены в [B3, B6]. Техника этих работ иная, чем в [H1] или в [B2]. Она специально приспособлена к изучению краев лакуны.

Замечание 3.8. Асимптотика в теоремах 3.1–3.4 — *высокоэнергетическая*. Это означает следующее. Пусть χ_R — характеристическая функция полуоси $[R,\infty)$ и

$$T_R(\lambda) := W(A-\lambda I)^{-1}\chi_R(A)W. \tag{3.3}$$

Тогда при любом $R>0$ асимптотика функций $n_+(s,T(\lambda))$, $n_+(s,T_R(\lambda))$ при $s\to 0$ одинакова. Вместе с (1.6) это придает сказанному точный смысл.

Замечание 3.9. Асимптотики (3.1), (3.2) не зависят от p и от $\lambda\in[\lambda_-,\lambda_+]$. Это делает трудной задачу вычисления асимптотики при $\alpha\to\infty$ для величины

$$N_+(\alpha,\lambda_2)-N_+(\alpha,\lambda_1),\quad \lambda_-\leqslant\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_+. \tag{3.4}$$

При $d=1$ для потенциалов V со степенной асимптотикой при $|x|\to\infty$ содержательные результаты на этот счет получены в [Sb].

3.2. Мы перейдем теперь к рассмотрению *нерегулярных* возмущений и начнем с аналогов предложения 2.10. В отличие от случая регулярных возмущений функции $N_+(\alpha,\lambda_+)$ и $N_-(\alpha,\lambda_-)$ сейчас равноправны. Как и в п. 2.5, мы ограничимся здесь случаем $d\geqslant 3$. Результат для $d=2$ формулируется более громоздко.

Теорема 3.10. *Пусть выполнены условия* (2.12), (2.16) *при* $2q>d$, *и пусть* $\lambda_\pm$ — *правильный край лакуны* Λ. *Тогда для оператора* (1.11)

$$N_\pm(\alpha,\lambda_\pm)\underset{\alpha\to\infty}{\sim}=D_\pm\alpha^q, \tag{3.5}$$

$$N_\pm(\alpha,\lambda)\underset{\alpha\to\infty}{\sim}o(\alpha^{d/2}\log\alpha),\quad \lambda\in\overline{\Lambda},\ \lambda\neq\lambda_\pm. \tag{3.6}$$

Поясним теперь, как вычисляется коэффициент в (3.5). Для определенности речь пойдет о D_+. Пусть $h_j^{(+)}$, $j=1,\dots,M_+$, — квадратичные формы из (1.13). Пусть $h_j^{(+)}(-i\nabla)$ — соответствующий эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, т. е. оператор вида (2.1). Пусть $\mathcal{N}_j(\alpha)$ — число отрицательных собственных значений для *модельного оператора*

$$h_j^{(+)}(-i\nabla)-\alpha V,\ \ \alpha>0,\quad j=1,\dots,M_+, \tag{3.7}$$

вида (2.2). Асимптотика для $\mathcal{N}_j$ имеет вид

$$\mathcal{N}_j(\alpha)\underset{\alpha\to\infty}{\sim}C_j(+)\alpha^q,\quad j=1,\dots,M_+.$$

Коэффициенты $C_j(+)$ вычисляются явно. Для этого нужно произвести пересчет асимптотики (2.17), (2.18) в соответствии с замечанием 2.14. Наконец,

$$D_+ = \sum_{j=1}^{M_+} C_j(+).$$

Аналогично вычисляется D_-. Нужно лишь заменить в (3.7) $h_j^{(+)}$ на $h_j^{(-)}$ из (1.14).

Замечание 3.11. a. Теорема 3.10 является следствием более общей „полуэффективной" теоремы из [B3]. Последняя сводит изучение асимптотики $N_\pm(\alpha, \lambda_\pm)$ к изучению асимптотики числа отрицательных уровней модельных операторов вида $h_j^{(\pm)}(-i\nabla) - \alpha V$. Дополнительные требования гладкости коэффициентов, принятые в [B3], могут быть сняты. **b.** Асимптотика (3.5) имеет *пороговый* характер. Ситуация здесь аналогична той, что описана в замечании 3.8. Нужно лишь заменить в (3.3) функцию χ_R характеристической функцией $\chi_\varepsilon^{(\pm)}$ ε-окрестности точки $\lambda_\pm$. **c.** Сравнение (3.5) и (3.6) показывает, что асимптотика $(3.5)_+$ переносится на величину (3.4) при $\lambda_2 = \lambda_+$. Аналогично асимптотика $(3.5)_-$ переносится на величину (3.4) при $\lambda_1 = \lambda_-$. **d.** Аналог теоремы 3.10 для $d = 2$ связан с потенциалами вида (2.20).

3.3. Введем теперь в V осциллирующий множитель, подобно тому, как это сделано в предложении 2.13. Во избежание громоздких формулировок ограничимся случаем полубесконечной лакуны. Таким образом, $\Lambda = (-\infty, 0)$, $\lambda_+ = 0$, $M_+ = 1$, $\xi_1^{(+)} = 0$. Обозначим $h(\xi) = h_1^{(+)}(\xi)$, $\psi(x) = \psi_1(0, x)$. Тогда $\psi(x+n) = \psi(x)$, $n \in \mathbb{Z}^d$; при этом можно считать, что $\psi(x) > 0$. Пусть D_+^0 — коэффициент D_+ в асимптотике $(3.5)_+$ в условиях теоремы 3.10 при $\lambda_+ = 0$. Пусть, наконец, f — функция, удовлетворяющая (2.19), и

$$f^0 = \int_{\mathbb{Q}^d} f(x)\psi^2(x)dx. \tag{3.8}$$

Теорема 3.12. *Пусть V удовлетворяет условиям* (2.12), (2.16). *Тогда для оператора* $(1.11)_+$, *в котором заменено V на fV, справедлива асимптотика*

$$N_+(\alpha, 0) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} D_+^0(\alpha f^0)^q. \tag{3.9}$$

Замечание 3.13. Из (3.8) видно, что асимптотика (3.9) зависит не только от формы h, но и от соответствующей собственной функции ψ. При $f \equiv 1$ в силу нормированности ψ оказывается $f^0 = 1$, и зависимость от ψ исчезает.

3.4. Рассмотрим теперь оператор $A_-(\alpha)$, определенный в $(1.11)_-$, в предположении, что возмущение V удовлетворяет условиям (2.12), (2.13). В отличие от предыдущего, этот случай не имеет своего аналога в §2.

Рассмотрим величину

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_q(\lambda) &= \frac{1}{d(2\pi)^d}\Bigg(\sum_{j\leqslant r-1}\int_{\mathbb{T}^d}(\lambda - E_j(\xi))^{-q}d\xi\Bigg)\int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(\theta)^q d\theta, \\ &2\sigma q = d \geqslant 2, \quad \lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

При $\lambda \neq \lambda_-$ величина $\Gamma_q(\lambda)$ заведомо конечна. При $\lambda = \lambda_-$ конечность $\Gamma_q(\lambda_-)$ есть условие на σ и на край лакуны. Во всяком случае необходимо, чтобы было $\sigma > 1$; если при этом λ_- — правильный край лакуны, то $\Gamma_q(\lambda_-) < \infty$.

Теорема 3.14. *Пусть выполнено* (2.12), (2.13). *Тогда для оператора* $A_-(\alpha)$ *из* (1.11) *выполнено*:

a.

$$N_-(\alpha,\lambda) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} \Gamma_q(\lambda)\alpha^q, \quad 2q\sigma = d \geqslant 2, \ \lambda_- < \lambda \leqslant \lambda_+. \tag{3.11}$$

b. *Если* $\Gamma_q(\lambda_-) < \infty$, *то асимптотика* (3.11) *переносится на значение* $\lambda = \lambda_-$.

Замечание 3.15. В условиях теоремы 3.14 случай $d = 2$ не является особым. В асимптотику (3.11) входят все зонные функции E_j, $j \leqslant r - 1$. Собственные функции ψ_j в ответ не входят. Вклады отдельных зон входят аддитивно.

Коэффициент в асимптотике (3.11) существенно меняется, если ввести в V осциллирующий множитель вида (2.19). Положим

$$f_{ij}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}^d} f(x)\psi_i(\xi,x)\overline{\psi_j(\xi,x)}dx,$$

$$z_{ij}(\xi) = (\lambda - E_i(\xi))^{-1/2}(\lambda - E_j(\xi))^{-1/2}f_{ij}(\xi), \quad i,j \leqslant r-1,$$

и введем матрицу

$$z(\xi) = \{z_{ij}(\xi)\}, \quad i,j \leqslant r-1.$$

Наконец, обозначим

$$\widetilde{\Gamma}_q(\lambda) = \frac{1}{d(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} Tr z(\xi)^q d\xi \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F^q(\theta)d\theta. \tag{3.12}$$

Теорема 3.16. *Пусть выполнены условия* (2.12), (2.13). *Тогда для оператора* $(1.11)_-$, *в котором* V *заменено на* fV, *справедлива асимптотика*

$$N_-(\alpha,\lambda) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} \widetilde{\Gamma}_q(\lambda)\alpha^q, \quad 2q\sigma = d \geqslant 2, \ \lambda_- < \lambda \leqslant \lambda_+. \tag{3.13}$$

Если $\widetilde{\Gamma}_q(\lambda_-) < \infty$, *то асимптотика* (3.13) *переносится на значение* $\lambda = \lambda_-$.

Замечание 3.17. Сравним (3.10) с (3.12). В (3.12) входят не только зонные функции E_j, но и собственные функции ψ_j. Вклады отдельных зон в асимптотику (3.13) входят не аддитивно.

Замечание 3.18. Теоремы 3.14, 3.16 могут быть обобщены на случай, когда условие (2.13) заменено условием асимптотической анизотропной однородности (ср. замечание 2.7c).

В заключение укажем аналог теоремы 3.14 для оператора $A_+(\alpha)$. Пусть выполнено (2.13). Введем величину

$$\left.\begin{aligned} G_q(\lambda) = \frac{1}{d(2\pi)^d}\left(\sum_{j\geqslant r}\int_{\mathbb{T}^d}(E_j(\xi)-\lambda)^{-q}\,d\xi\right)\int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(\theta)^q\,d\theta,\\ 2\sigma q = d \geqslant 2, \ \lambda_- \leqslant \lambda < \lambda_+. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Конечность $G_q(\lambda)$ равносильна условию $\sigma < 1$. Значение $\lambda = \lambda_+$ в (3.14) при этом *недопустимо*. Последнее согласуется с тем, что при $\sigma < 1$ собственные значения оператора $(1.11)_+$ накапливаются к точке $\lambda = \lambda_+$.

Теорема 3.19. *Пусть выполнены условия* (2.12) *и* (2.13) *при* $\sigma < 1$. *Тогда для оператора* $(2.11)_+$ *справедлива асимптотика*

$$N_+(\alpha,\lambda) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} G_q(\lambda)\alpha^q, \quad 2q\sigma = d \geqslant 2, \ \lambda_- < \lambda \leqslant \lambda_+. \tag{3.15}$$

3.5. Литературные указания. Здесь мы дополним сказанное в замечаниях 3.6, 3.7, 3.9, 3.11.

Теорема 3.12 приводится впервые. Теорема 3.14a содержится (при $g = \mathbb{1}$, $\lambda \in \Lambda$) в результатах пионерской работы [ADH]. В [ADH] потенциал p не обязательно периодичен. Предполагается лишь, что для оператора $A = -\Delta + p(x)$ существует так называемая *проинтегрированная плотность состояний*, в терминах которой записывается асимптотический коэффициент. В недавнем препринте [Le1] изучаются оценки остатка в асимптотике вида (3.11) при $g = \mathbb{1}$, $\lambda \in \Lambda$ и периодическом p. Техника работ [ADH, Le1] существенно зависит от предположения $\lambda \neq \lambda_\pm$.

Теорема 3.14b установлена автором (см. [B4]). Теорема 3.16 также установлена автором, публикуется впервые. Теорема 3.19 в приведенной формулировке получена автором. Независимо (для $A = -\Delta + p(x), \lambda \in \Lambda$) асимптотика вида (3.15) получена в [Le1] с оценкой остатка. В [Le2] аналогичная асимптотика (без оценки остатка) найдена в предположении, что для $A = -\Delta + p(x)$ существует плотность состояний.

Список литературы

[AADH] Alama S., Avellaneda M., Deift P. A., Hempel R., *On the existence of eigenvalues of a divergence form operator* $A + \lambda B$ *in a gap of* $\sigma(A)$, Asymptotic Anal. **8** (1994), no. 4, 311–344.

[ADH] Alama S., Deift P. A., Hempel R., *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator* $H - \lambda W$ *in a gap of* $\sigma(H)$, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 2, 291–321.

[B1] Birman M. Sh., *On the spectrum of singular boundary-value problems*, Mat. Sb. **55** (1961), no. 2, 125–174; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **53** (1966), 23–80.

[B2] Birman M. Sh., *Discrete spectrum in the gaps of a continuous one for perturbations with large coupling constant*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 57–73.

[B3] Birman M. Sh., *The discrete spectrum in the gaps of a second-order perturbed periodic operator*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **25** (1991), no. 2, 89–92; English transl, Functional Anal. Appl. **25** (1991), no. 2, 158–161; *Discrete spectrum in a gap of perturbed periodic operator at large coupling constants*, Rigorous Results in Quantum Dynamics (Liblice, 1990), World Sci. Publishing, Singapore, 1991, pp. 16–24.

[B4] Birman M. Sh., *Discrete spectrum of the periodic Schrödinger operator for non-negative perturbations*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Blossin, 1993), Oper. Theory Adv. Appl., **70**, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 3–7.

[B5] Birman M. Sh., *Discrete spectrum of the periodic elliptic operator with a differential perturbation*, „Équations aux Dérivées Partielles“ (Saint-Jean-de-Monts, 1994), Exposé no. 14, École Polytech., Palaiseau, 1994, 4 pp.; Journées „Équations aux Dérivées Partielles“ Groupement de Recherche CNRS, no. 1151, XIV, 1–4.

[B6] Birman M. Sh., *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations*, Adv. Partial Differential Equations, **2**, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 334–352.

[BB] Birman M. Sh., Borzov V. V., *On the asymptotics of the discrete spectrum for certain singular differential operators*, Spectral Theory, Probl. Mat. Fiz., **5**, Leningrad. Univ., Leningrad, 1971, pp. 24–38; English transl., Topics in Math. Phys., **5**, Consultants Bureau, New York–London, 1972, pp. 19–30.

[BL] Birman M. Sh., Laptev A. A., *The negative discrete spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator*, Preprint no. TRITA-MAT-95-MA-16, Dep. Math. Royal Inst. Technol., Stockholm, 1995.

[BR] Birman M. Sh., Raĭkov G. D., *Discrete spectrum in the gaps for perturbations of the magnetic Schrödinger operator*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 75–84.

[BS1] Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *The principal term of the spectral asymptotics for „non-smooth" elliptic problems*, Funktstional. Anal. i Prilozhen. **4** (1970), no. 4, 1–13; English transl., Functional Anal. Appl. **4** (1970), 265–275.

[BS2] Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropically homogeneous symbols.* I, Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **1977**, vyp. 3, 13–21; English transl., Vestnik Leningrad Univ. Math. **10** (1982), 237–247; II. Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **1979**, vyp. 3, 5–10; English transl., Vestnik Leningrad Univ. Math. **12** (1980), 155–161.

[BS3] Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Estimates for the number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalizations*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 1–55.

[BW] Birman M. Sh., Weidl T., *The discrete spectrum in a gap of the continuous one for compact supported perturbations*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Blossin, 1993), Oper. Theory Adv. Appl., **70**, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 9–12.

[C] Cwikel M., *Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), no. 1, 93–100.

[H1] Hempel R., *On the asymptotic distribution of the eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H \pm \lambda W$ in a spectral gap of H*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 38–59.

[H2] Hempel R., *Eigenvalues in gaps and decoupling by Neumann boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **169** (1992), no. 1, 229–259.

[L] Laptev A., *Asymptotics of the negative discrete spectrum of a class of Schrödinger operators with large coupling constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 2, 481–488.

[Lb] Lieb E., *Bounds on the eigenvalues of the Laplace and Schrödinger operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 751–753.

[Le1] Levendorskiĭ S. Z., *Asymptotic formulae with remainder estimates for eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of H*, Report no. 296, Univ. Augsburg, 1994.

[Le2] Levendorskiĭ S. Z., *Lower bounds for the number of eigenvalue branches for the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of H: the case of indefinite W*, Report no. 297, Univ. Augsburg, 1994.

[R] Rozenblyum G. V., *Distribution of the discrete spectrum of singular differential operators*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **1976**, no. 1, 75–86; English transl., Soviet Math. (Iz. VUZ) **20** (1976), no. 1, 63–71.

[RS] Reed M., Simon B., *Methods of modern mathematical physics.* IV. *Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978.

[S] Solomyak M. Z., *Spectral problems related to the critical exponent in the Sobolev embedding theorem*, Proc. London Math. Soc. (3) **71** (1995), 53–75.

[Sb] Sobolev A. V., *Weyl asymptotics for the discrete spectrum of the perturbed Hill operator*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 159–178.

С.-Петербургский
государственный университет,
физический факультет

Поступило 13 сентября 1995 г.