

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Аксентьев, Ю. А. Решетников, Об однолистной  
разрешимости обратной задачи гидромеханики,  
*Тр. сем. по краев. задачам*, 1971, выпуск 8, 12–21

<https://www.mathnet.ru/kukz463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

18 мая 2025 г., 20:15:33



Л. А. АКСЕНТЬЕВ, Ю. А. РЕШЕТНИКОВ

## ОБ ОДНОЛИСТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ

Целью статьи является получение условий простоты (т. е. условий отсутствия самопересечений) искомого профиля в обратной задаче гидромеханики ([1], гл. III). Будем рассматривать такие варианты постановки задачи: 1) задана область в плоскости годографа скорости, 2) известна величина скорости  $v(s)$  в функции дуговой координаты,  $0 \leq s \leq l$ , 3) распределение скоростей  $v(\theta)$  задается в функции от полярного угла вспомогательной окружности  $\zeta = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

В § 1 исследуется разрешимость трех задач в первом варианте. В § 2 исследуются вопросы однолистности полученных функций. В § 3 получены достаточные условия однолистной разрешимости второго и третьего вариантов обратной задачи.

Статья продолжает серию исследований по однолистной разрешимости обратной задачи гидромеханики, которые выполнены В. С. Рогожиным, Л. А. Аксентьевым и С. Н. Кудряшовым (см. библиографию в [1]).

§ 1. *Задача 1.* Пусть задана не менее чем двулистная область в плоскости годографа скорости с точкой ветвления первого порядка в  $C$ . Пусть также задан разрез, который соединяет точку  $v_\infty$  (предполагаем, что  $v_\infty > 0$ ) с граничной точкой  $O$  — началом координат и который соответствует разрезу в физической плоскости  $z$  вдоль линии тока от точки схода потока до  $\infty$ . Поэтому над точкой  $O$  будет расположено не менее трех граничных точек:  $A$ , которая соответствует точке разветвления потока, и  $B^+$ ,  $B^-$ , которые соответствуют точке схода потока и расположены на разных бе-

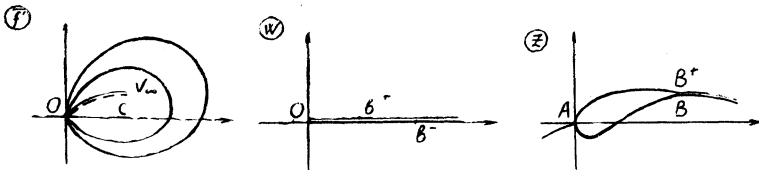


Рис. 1

регах разреза. Построим профиль (может быть, незамкнутый), полное обтекание которого соответствует данной области в плоскости годографа с дополнительно заданной величиной циркуляции  $|\Gamma| > 0$  (знак  $\Gamma$  определится после решения задачи).

При решении задачи несколько видоизменим схему Л. А. Симонова [2], [3].

Вначале перейдем к области  $D'$  в плоскости  $f'(z) = \vec{v}(z)$ , так как дальше будут использоваться аналитические функции. С помощью некоторой функции  $w = \varphi(f')$  отобразим область  $D'$  на область в плоскости комплексного потенциала  $w$  (плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси) с таким соответствием точек (рис. 1):  $v_\infty \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow 0$  и  $B^+ \rightarrow b^+$ . При произвольно выбранной точке  $b^+$  (на верхнем берегу разреза плоскости  $w$ ) отображающая функция определится единственным образом. Тем самым точка  $B^-$  перейдет во вполне определенную точку  $b^-$ . Составим отношение  $|b^+ - b^-| : |\Gamma| = k_0$ , где  $|\Gamma|$  — заданная величина циркуляции, и возьмем соотношение  $k_0 w = \varphi(f')$ . Обозначим через  $\Phi$  функцию, обратную к  $\varphi$ , и воспользуемся равенством  $\frac{dw}{dz} = \Phi(k_0 w)$ , из которого получим

$$z = \int \frac{dw}{\Phi(k_0 w)} + c_1, \quad (1)$$

причем  $c_1$  — комплексная постоянная.

Функция (1) отображает область в плоскости  $w$  на искомую область в физической плоскости  $z$ . Полученный в результате этого отображения профиль  $L$  может быть незамкнутым, но по области в плоскости комплексного потенциала мы можем судить, что величина циркуляции для профиля  $L$  равна  $|\Gamma|$ . Знак циркуляции определяется положением точки  $b^-$  по отношению к точке  $b^+$ :  $\Gamma > 0$ , если  $b^+ < b^-$ , и  $\Gamma < 0$ , если  $b^+ > b^-$ . Если  $b^+ = b^-$ , то задача оказывается неразрешимой.

Следовательно, задача 1 имеет единственное решение (с точностью до параллельного переноса) или не имеет решения. Единственность решения доказывается на основе единственности использованных конформных преобразований.

**Задача 2.** Рассмотрим вариант задачи 1 в случае, когда  $\Gamma = 0$ , и поэтому  $C = v_\infty$ . (Последнее равенство получается из представления  $f'(z) = v_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots$  в окрестности бесконечно удаленной точки). Разрез, соединяющий  $v_\infty$  и  $O$ , задавать не нужно. Требуется определить профиль, который обтекается бесциркуляционным потоком с заданной областью в плоскости годографа.

Теперь над началом координат плоскости  $f'$  будет расположено не менее двух граничных точек  $A, B$  заданной области  $D'$ . Построим функцию, отображающую область  $D'$  на внешность разреза на положительной вещественной полуоси плоскости  $w$  между точками  $O$  и  $b$ . Примем такое соответствие точек:  $v_\infty \rightarrow \infty, A \rightarrow 0, B \rightarrow b$ . Это отображение невозможно или возможно с произволом в одну вещественную постоянную. Обозначим отображающую функцию  $f' = \Phi(kw)$ ,  $k$  — положительный коэффициент. Тогда, как при решении задачи 1, получим

$$z = \int \frac{dw}{\Phi(kw)} + c_2, \quad (2)$$

где  $c_2$  — комплексная постоянная. Отличие полученного решения (2) от (1) состоит в том, что там коэффициент  $k$  является фиксированным, а здесь он произволен. Поэтому задача 2 имеет единственное решение (с точностью до подобия и параллельного переноса) или не имеет решения.

Отметим один важный частный случай задачи 2, когда она наверняка будет разрешимой. Пусть  $D'$  является симметричной областью, т. е. ее можно разбить на две одинаковые области  $D'_0$  и  $D'_1$ , в каждой из которых имеется прямой разрез, соединяющий  $v_\infty$  с  $O$ . Построение отображающей функции можно провести так. Возьмем область  $D'_0$  и отображим ее на верхнюю полуплоскость так, чтобы  $A \rightarrow 0, B \rightarrow b, v_\infty \rightarrow \infty$ . (Точки  $A$  и  $B$  являются концевыми точками разреза на границе области  $D'_0$ ). Применяя принцип симметрии Римана — Шварца, получим, что вся область  $D'$  отобразится на внешность разреза между точками  $O$  и  $b$ . Нетрудно показать, что в качестве искомого получатся симметричные профили.

Итак, в случае симметричной области  $D'$  решение задачи 2 единственно (с точностью до подобия и параллельного переноса).

**Задача 3.** Задана область  $D'$  в плоскости  $f'$ , причем из начала координат  $O$  проведен разрез в какую-нибудь точку границы ( $B^+, B^-$ ). Нужно определить профиль, чисто циркуляционное обтекание которого имеет годограф, совпадающий с  $\bar{D}'$  (черта означает знак комплексного сопряжения).

Отобразим конформно область  $D'$  на полуполосу  $\{\operatorname{Re} w < |\Gamma|/2, \operatorname{Im} w < 0\}$  при  $\Gamma > 0$  (или на полуполосу  $\{\operatorname{Re} w < |\Gamma|/2, \operatorname{Im} w > 0\}$  при  $\Gamma < 0$ ) с соответствием точек:  $B^+ \rightarrow \frac{|\Gamma|}{2}, B^- \rightarrow -\frac{|\Gamma|}{2}, O \rightarrow \infty$ . Отображающая функция  $w = \varphi(f')$  определяется единственным образом. Поэтому решение задачи представится функцией

$$z = \int \frac{dw}{\Phi(w)} + c_3, \quad (3)$$

причем  $\Phi(\omega)$  — функция, обратная к  $\varphi(f')$ , и  $c_3$  — комплексная постоянная.

Итак, задача 3 имеет единственное решение (с точностью до параллельного переноса).

Единственность (с точностью до подобия и параллельного переноса) решения задачи построения изолированного профиля по заданному годографу скорости можно доказать и не опираясь на способ его получения. Пусть профили  $L$  и  $L_1$ , расположенные в плоскостях  $z$  и  $z_1$ , соответственно, построены по одному и тому же годографу скорости. Рассмотрим конформное соответствие между плоскостями  $z$  и  $z_1$  с помощью функции  $z_1 = g(z)$ , которая определяется через комплексные потенциалы течений в этих плоскостях. В силу конформности функции  $\ln g'(z) = \ln |g'(z)| + i \arg g'(z)$  будет аналитической во внешности  $L$ . Из геометрического смысла аргумента производной аналитической функции следует, что  $\arg g'(z) = 0$  на  $L$ . Поэтому  $\arg g'(z) = 0$  во внешности  $L$  в силу принципа максимума для гармонических функций. Для сопряженной гармонической функции получим:  $\ln |g'(z)| = -\ln g'(z) = a$ , где  $a$  — вещественная постоянная. Отсюда  $z_1 = g(z) = Az + B$ , причем  $A = e^a$ ,  $B$  — комплексная постоянная. Таким образом, профили, отвечающие одному и тому же годографу скорости, будут отличаться лишь размерами и положением на плоскости.

Мы рассмотрели все возможные случаи областей в плоскости годографа скорости (при условии, что критических точек в потоке нет):  $v_\infty \neq 0$ ,  $\Gamma \neq 0$  (задача 1),  $v_\infty \neq 0$ ,  $\Gamma = 0$  (задача 2),  $v_\infty = 0$ ,  $\Gamma \neq 0$  (задача 3). В дальнейшем исследовании будем предполагать, что решение для каждой из рассмотренных задач уже построено. Для того, чтобы профиль  $L$  был простым, необходимо и достаточно, чтобы отображающая функция (вида (1), (2) или (3)) была однолистной в замкнутой области из плоскости  $\omega$ .

§ 2. Исследование однолистности отображающей функции проведем в связи со следующей задачей Г. Г. Тумашева.

Будем говорить, что величина скорости  $v(t) \in \mathfrak{M}$  (принадлежит классу  $\mathfrak{M}$ ), если на замкнутом интервале  $0 \leq t \leq T$  она имеет три нуля, два максимума, а на остальных участках строго монотонна. Параметр  $t$  может принимать одно из следующих значений: дуговой координаты  $s$ ,  $0 \leq s \leq l$ , на искомом профиле; полярного угла  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , на вспомогательной окружности  $\zeta = e^{i\theta}$ ; дуговой координаты на границе области в плоскости годографа. *Требуется определить такие подклассы класса  $\mathfrak{M}$ , которые обеспечивают простоту профиля  $L$ .*

Отметим некоторые факты, которые легко получаются для задачи 2 в предположении симметрии области годографа.

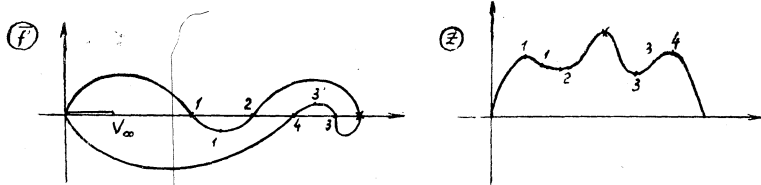


Рис. 2

1°. Из рис. 2 видно, что условие  $v \in \mathfrak{M}$  не обеспечивает монотонность  $\arg \vec{v}(z)$  в ту же сторону, что и  $v$ . Действительно, на участке (1,1') величина скорости растет, а  $\arg \vec{v}$  убывает, на участке (3,3') — наоборот: величина скорости убывает, а  $\arg \vec{v}$  растет.

2°. Монотонность  $\arg \vec{v}$  обеспечивается, в частности, функциями, не принадлежащими классу  $\mathfrak{M}$ . Этот факт становится очевидным, если взять звездную относительно начала координат область годографа, т. е. такую область, что любой луч, проведенный из начала, пересекает границу области не более, чем в одной точке (рис. 3).

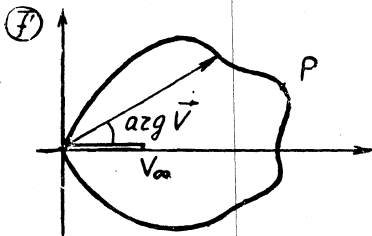


Рис. 3

Такой области в плоскости  $z$  соответствует выпуклый профиль. Отметим, что если точку типа  $P$  устремить в  $\infty$ , то в пределе на профиле появится угловая точка.

3°. Рассматривая функцию  $z(w)$  в полуплоскости (верхней или нижней), переформулировкой теоремы, приведенной в работе [4], можно получить следующее достаточное условие: функция  $z(w)$  будет однолистной в замкнутой области и поэтому каждая кромка профиля (верхняя и нижняя) будет простой, если  $|\arg \vec{v}(z) + \gamma| < \pi/2$ , где  $\gamma$  — вещественная постоянная,  $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$ .

Эти выводы (1°–3°) годятся и для решения задач 1 и 3. Заметим, что в случае задачи 3 будем относить к классу  $\mathfrak{M}$  функцию  $v(t) - v_m$ , где  $v_m = \min v(t)$ .

4°. В классе  $\mathfrak{M}$  выделим подкласс  $\mathfrak{M}_0$  следующим образом. Будем говорить, что  $v(t) \in \mathfrak{M}_0$ , если  $v(t) \in \mathfrak{M}$ , и, кроме того, функция  $v(t)$  является симметричной (четной) относительно  $t = T/2$  и  $t = T/4$ . Задавая  $v(t)$  в подклассе  $\mathfrak{M}_0$ , получим профили, имеющие две взаимно перпендикулярные оси симметрии, так как  $\arg \vec{v}(t)$  будет нечетной функцией отно-

сительно  $T/2$  и  $T/4$ . Назовем такие профили двоякосимметричными.

Теперь можно сформулировать достаточное условие простоты профиля при двоякой симметрии. *Искомый профиль*

*будет простым, если  $v(t) \in \mathfrak{M}_0$  и  $|\arg \vec{v}| < \pi/2$ .*

Из второго условия следует простота верхней и нижней кромок (согласно  $3^\circ$ ). Из первого условия получается двоякая симметрия профиля. Область годографа для двоякосимметричных профилей симметрична относительно вещественной оси. Поэтому (в случае  $v \in \mathfrak{M}_0$ )  $\arg \vec{v}$  в точках, отличных от критических, может обращаться в нуль не более одного раза. Следовательно, верхняя и нижняя кромки не пересекаются между собой. Тем самым доказана простота профиля.

*Принадлежность  $v(t)$  к классу  $\mathfrak{M}$  не обеспечивает, в общем случае, простоту искомого профиля.* Появление непротых профилей можно проследить на следующем примере.

Пусть симметричный относительно вещественной оси профиль обтекается плоским бесциркуляционным потоком несжимаемой жидкости. Скорость на  $\infty$  направлена вдоль вещественной оси. За каноническую область примем внешность окружности  $|\zeta| = 1$  (рис. 4). Скорость потока на верхней кромке профиля зададим как функцию полярного угла  $\theta$  окружности  $|\zeta| = 1$  в следующем виде:

$$v(\theta) = \sin^\lambda \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 < \lambda < 2, \quad v(\theta) \in \mathfrak{M}_0.$$

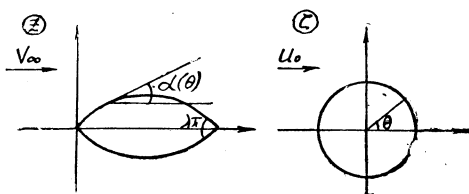


Рис. 4.

Из сравнения потенциалов скорости находим

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{v_0}{v} = -2u_0 \sin^{1-\lambda} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

где  $v_0(\theta)$  — скорость на окружности,  $v(\theta)$  — скорость на профиле,  $u_0$  — скорость в бесконечно удаленной точке плоскости  $\zeta$ . Используя эту формулу, можно перейти от  $v(\theta)$  к функции  $v(s)$ , которая, очевидно, также принадлежит  $\mathfrak{M}_0$ . Решая обратную краевую задачу, получим параметрические

уравнения верхней кромки искомого профиля (нижняя достраивается по симметрии)

$$x = -2u_0 \int_0^\theta \frac{\cos \lambda (\pi/2 - \gamma)}{\sin^{\lambda-1} \gamma} d\gamma, \quad y = 2u_0 \int_0^\theta \frac{\sin \lambda (\pi/2 - \gamma)}{\sin^{\lambda-1} \gamma} d\gamma,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

Величина  $u_0$  на однолиственность не влияет, ее можно найти, если задать длину искомого профиля. Угол между вектором скорости и осью  $x$  найдем по формуле

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln v(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \gamma}{2} d\gamma.$$

В рассматриваемом примере  $\alpha(\theta) = \lambda(\theta - \pi/2)$ ,  $\alpha'(\theta) = \lambda > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Следовательно, каждая из кромок профиля выпукла и пересечение их между собой невозможно. Неоднолиственность может возникнуть лишь тогда, когда произойдет самопересечение каждой кромки. Изменяя параметр  $\lambda$ , можно проследить переход однолистных областей в неоднолистные (рис. 5). Отсюда можно сделать вывод, что неоднолистные решения возможны даже в случае простейшего распределения скорости. Заметим, что в данном примере, исключая  $\theta$  из выражений для  $v(\theta)$  и  $\alpha(\theta)$ , можно получить зависимость  $v(\alpha) = \cos^\lambda \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $|\alpha| \leq \lambda\pi/2$ , и построить те же самые профили, используя в качестве исходных данных  $v = v(\alpha)$ .

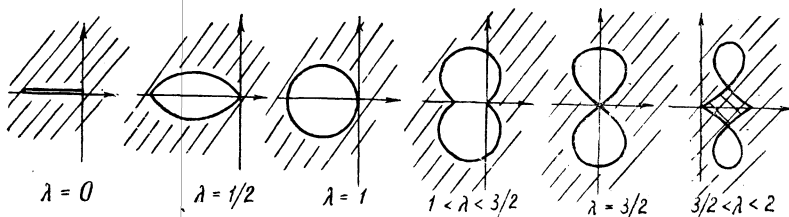


Рис. 5.

§ 3. Приступим к условиям однолистной разрешимости задач по заданным скоростям в функции от  $s$  и  $\theta$ . Исследование решения этих задач проведено в [1], гл. III и в [5]. Рассмотрим задачу построения двоякосимметричного профиля, обтекаемого плоским потенциальным чисто циркуляционным потоком несжимаемой жидкости. Обозначим через  $2\beta\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq 1/2$ , углы в концевых точках профиля. Тогда скорость на профиле можно задать в следующем виде:

$$v(s) = s^n (l/2 - s)^n v_1(s),$$



где  $-1/2 \leq n < \infty$ ,  $v_1(s)$  удовлетворяет условию Гельдера и не обращается в нуль при  $s \in [0, l]$ . Имеют место формулы при  $0 \leq s \leq l/2$ :

$$\beta = \frac{2n+1}{2(n+1)}, \quad v(s) = \left( \cos \frac{2\pi\varphi(s)}{\Gamma} \right)^{\frac{n}{n+1}} e^{f(s)},$$

где  $\Gamma = \int_0^l v(s) ds$  и  $\varphi(s) = -\frac{\Gamma}{4} + \int_0^s v(s) ds$ , причем  $f(s)$  удовлетворяет условию Гельдера для  $0 \leq s \leq l/2$ . Справедлива

**Теорема 1.** *Задача об отыскании профиля в чисто циркуляционном случае разрешима однолистно, если  $v(s) \in \mathfrak{M}_0$  и*

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq [2\beta + \pi(1 - 2\beta)] \left| \sin \frac{2\pi\varphi(s_1)}{\Gamma} - \sin \frac{2\pi\varphi(s_2)}{\Gamma} \right|.$$

Приведем кратко схему доказательства. Сначала доказыва-  
ется, что при выполнении второго условия  $|\arg \bar{v}| \leq \pi/2$  на  
каждой кромке профиля, т. е. каждая кромка профиля про-  
стая. Так как в силу первого условия профиль двоякосим-  
метричен, то весь профиль представляет собой простую  
кривую.

Исследуем теперь обратную задачу для профиля с нуле-  
вым углом атаки в бесциркуляционном случае. Распреде-  
ление скорости можно задать в виде:  $v(s) = s^m (l/2 - s)^m v_1(s)$ ,  
причем  $0 \leq m \leq 1$ ,  $v_1(s)$  удовлетворяет условию Гельдера и  
не обращается в нуль для  $0 \leq s \leq l$ . Имеют место следующие  
формулы при  $0 \leq s \leq l/2$ :

$$\beta = \frac{m}{m+1}, \quad v(s) = [\varphi(s)]^\beta [a - \varphi(s)]^\beta e^{f(s)},$$

где  $\varphi(s) = \int_0^s v(s) ds$ ,  $a = \int_0^{l/2} v(s) ds$  и  $f(s)$  удовлетворяет усло-  
вию Гельдера для  $s \in [0, l/2]$ . Имеет место

**Теорема 2.** *Задача об отыскании профиля с нулевым уг-  
лом атаки в бесциркуляционном случае имеет однолистное  
решение, если выполнены условия:  $v(s) \in \mathfrak{M}_0$  и*

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq \frac{4\beta + 2\pi(1 - 2\beta)}{a} |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)|, \quad s_1, s_2 \in [0, l/2].$$

Кроме того, должны быть выполнены обычные условия  
разрешимости (т. е. условия замкнутости профиля). Доказа-  
тельство этого признака аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим задачу в третьем варианте постановки. Не-  
обходимое и достаточное условие выпуклости  $d \arg \bar{v}(\theta) \geq 0$

можно записать в виде:  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \theta}{2} d \ln v(\gamma) \leq 0$ , причем  $\theta$

не совпадает с нулями функции  $v(\gamma)$ . Отсюда видно, что свойство выпуклости связано с дифференциальным качеством функции  $v(\theta)$ .

Обозначим через  $e^{i\theta_1}$ ,  $e^{i\theta_2}$  критические точки потока, обтекающего круг единичного радиуса. Пусть порядки нулей  $v(\theta)$  в точках  $\theta_1$  и  $\theta_2$  равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Имеет место следующее достаточное условие выпуклости.

**Теорема 3.** Если  $|p'(\gamma_1) - p'(\gamma_2)| \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2M(1)} |\gamma_1 - \gamma_2|$  и  $\lambda_1 \leq 1$ ,  $\lambda_2 \leq 1$ , то профиль будет выпуклым и, следовательно, простым. Здесь  $p(\gamma) = \ln v(\gamma) - \lambda_1 \ln \left| \sin \frac{\gamma - \theta_1}{2} \right| - \lambda_2 \ln \left| \sin \frac{\gamma - \theta_2}{2} \right|$ ,  $M(1) \approx 1,166$ .

При доказательстве используется представление  $\alpha(\theta)$ , аргумента скорости на профиле, через сингулярный интеграл с ядром Гильберта. Вычитанием функции  $\lambda_1 \ln \left| \sin \frac{\gamma - \theta_1}{2} \right| + \lambda_2 \ln \left| \sin \frac{\gamma - \theta_2}{2} \right|$  устраняются особенности  $\ln v(\gamma)$ . Показывается, что на каждой кромке профиля  $\alpha'(\theta) \geq 0$ , применяется оценка интеграла, которая приведена в работе [6]. Из того, что  $\lambda_1 \leq 1$ ,  $\lambda_2 \leq 1$ , следует выпуклость профиля в целом.

**Теорема 4.** Задача отыскания профиля, обтекаемого бесциркуляционным потоком, разрешима однолистно, если  $v(\theta) \in \mathfrak{M}_0$  и  $|p_1(\gamma_1) - p_1(\gamma_2)| \leq \frac{\pi(1-\lambda)}{M(1)} |\gamma_1 - \gamma_2|$ , где  $p_1(\gamma) = \ln \frac{v(\gamma)}{|\sin \gamma|^\lambda}$ ,  $\lambda$  — порядок нуля  $v(\theta)$  при  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ .

Применением оценок из работ [6], [7] доказывается, что  $|\alpha(\theta)| \leq \pi/2$  на каждой кромке профиля, т. е. выполняется достаточное условие простоты двоякосимметричного (в силу того, что  $v(\theta) \in \mathfrak{M}_0$ ) профиля. Заметим, что в теоремах 3 и 4 условия замкнутости профиля предполагаются выполненными.

Авторы выражают искреннюю признательность Ф. Г. Авахадиеву, Н. Б. Ильинскому, Н. Ф. Салихову и Н. Д. Якимову за советы и обсуждение результатов.

Доложено на семинаре 18 мая 1970 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд. КГУ, 1965.
2. Симонов Л. А. Построение профилей по годографу скоростей. ПММ, т. IV, в. 4, 1940, с. 97—116.

3. Симонов Л. А. Построение профилей по годографу скоростей. ПММ, т. V, в. 2, 1941, с. 193—222.

4. Аксентьев Л. А. Достаточные условия однолиственности решения обратной краевой задачи теории фильтрации. УМН, т. 114, в. 4, 1959, с. 133—140.

5. Peebles G. A method for calculating airfoil sections from specifications on the pressure distributions. J. of the Aeronautical Sciences, v. 14, N 8, 1947.

6. Аксентьев Л. А. Точные оценки для гармонических в круге функций. Изв. вузов, Матем., 1968, № 3, с. 3—8.

7. Авхадиев Ф. Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений. Матем. заметки, т. 7, в. 5, 1970, с. 581—592.